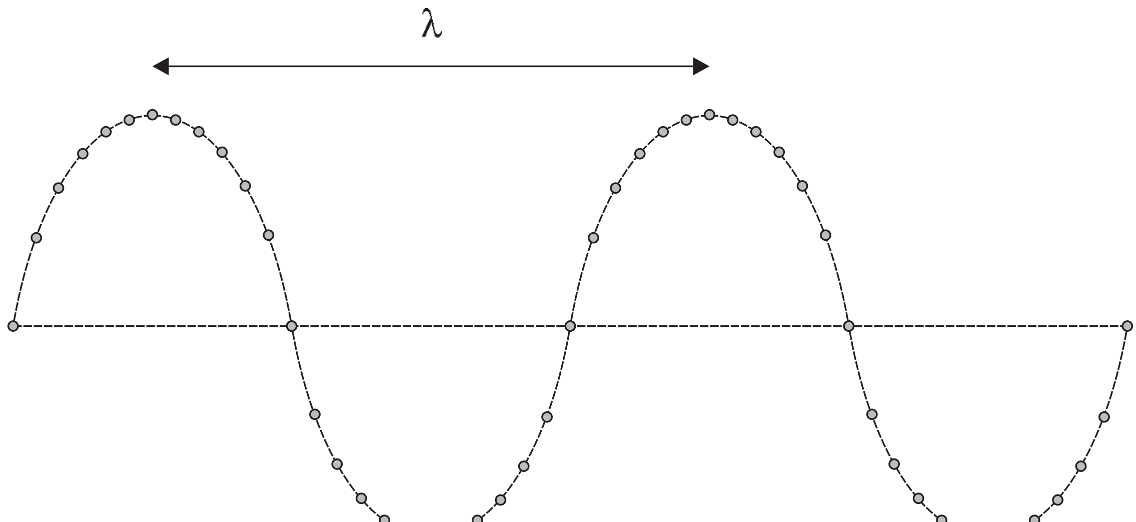
Vježba 1

Stojni valovi

Teorijski uvod

Djelujemo li impulsom vanjskih sila na neko homogeno tijelo možemo pobuditi gibanje malog dijela tog sredstva, koje će se prenositi na njegove ostale dijelove. Ovakav način prijenosa energije nazivamo valom. Pri širenju vala čestice sredstva ostaju na svojim mjestima i titraju oko ravnotežnog položaja, a širi se samo stanje titranja, odnosno prenosi se energija izvora vala.

Valovi mogu biti longitudinalni ili transverzalni. Valove pri kojima čestice sredstva titraju okomito na smjer širenja vala zovemo transverzalnim valom (slika 1.1).



Slika 1.1: Transverzalni val je val u kojemu je titranje čestica okomito pravcu širenja vala.

Slika 1.2: Longitudinalni val je val u kojemu je titranje čestica paralelano pravcu širenja vala.

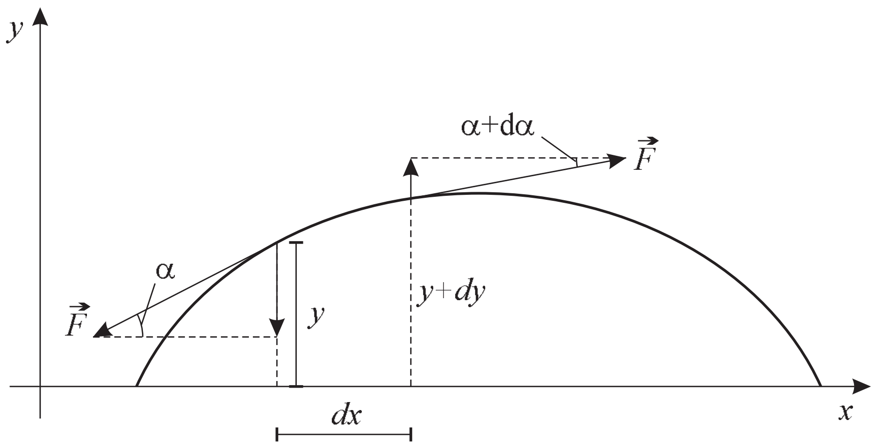
Longitudinalni su oni valovi u kojima čestice titraju u smjeru širenja vala (1.2). Zvučni su valovi longitudinalni.

Druga podjela valova je na progresivne i stojne valove. Progresivni (putujući) val giba se u određenom smjeru i pritom se energija prenosi s čestice na česticu. Pri stojnom valu neke čestice titraju, a neke stalno miruju: valna se slika ne mijenja s vremenom već je stacionarna. Suprotno progresivnom valu, pri stojnom valu energija se ne širi prostorom.

Transverzalni valovi mogu se proizvesti na elastičnoj napetoj niti. Pobudimo li je impulsom sile u smjeru okomitom na njen pravac, nastat će transverzalni poremećaj koji će se po niti širiti putem elastične sile. Na slici 1.3 je prikazan dio napete niti. Sila na svaki njen djelić je tangencijalna te je y-komponta sile koja djeluje na djelić žice duljine dx jednaka

$$F_y = F\sin\alpha - F\sin(\alpha + d\alpha). \tag{1.1}$$

Kut α se može aproksimirati sljedećim izrazom:



Slika 1.3: Uz izvod valne jednadžbe transverzalnog vala na napetoj niti.

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}. \tag{1.2}$$

Pošto je $dy \approx 0$, vrijedi da je $\sin\alpha = \mathrm{tg}\alpha = \alpha$, što zajedno s jednadžbom (1.2) daje

$$d\alpha = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx. \tag{1.3}$$

Uvrstivši gornji izraz u lineariziranu jednadžbu (1.1), dobije se

$$F_y = -F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx. \tag{1.4}$$

Masa djelića niti duljine dx je

$$dm = \mu dx, \tag{1.5}$$

gdje je μ linearna gustoća mase niti (ili drugim riječima, masa niti po jedinici dužine $\mu = dm/dl$). Iz jednadžbe gibanja $F = ma$ slijedi

$$dm \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -F_y \tag{1.6}$$

slijedi ova valna jednadžba:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{1.7}$$

Brzina vala v je jednaka

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}. \tag{1.8}$$

Pod pretpostavkom da je sila koja djeluje na nit periodična, rješenje gornje jednadžbe je:

$$y(x,t) = A \sin(\omega t - kx), \tag{1.9}$$

gdje su A amplituda titranja i $\omega = 2\pi/T$ kružna frekvencija. Argument $(\omega t - kx)$ se naziva fazom vala, a veličina $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$ valnim brojem.

Stojni valovi

Promatrimo ćemo valove na niti učvrščenoj na oba kraja. Upadni se val (koji je direktno posljedica pobuđenja) širi i reflektira na nepomičnom kraju niti. Upadni i odbijeni val imaju jedanka svojstva: brzinu, valnu duljinu i amplitudu, a šire se u suprotnim smjerovima. Interferencijom (zbrajanjem) ovih valova može nastati fenomen koji nazivamo stojnim valom. Mjesta gdje je amplituda stojnog vala najveća zovu se trbusi, a mjesta gdje amplituda iščezava čvorovi vala. Jednadžba vala na niti određena je superpozicijom upadnog i odbijenog vala:

$$y(x,t) = A\sin\big(\omega t - kx\big) + A'\sin\big(\omega t + kx\big). \tag{1.10}$$

Iz rubnog uvjeta $y(0,t) = 0$ izlazi $A = -A'$. Trigonometrijskim transformacijama jednadžbe (1.10) dobijemo:

$$y(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t). \tag{1.11}$$

Za bilo koje vrijeme t ova relacija mora zadovoljavati i drugi rubni uvjet $y(L,t) = 0$ iz kojeg izlazi $kL = n\pi (n \in \mathbb{Z})$, odnosno valna će duljina imati samo diskretne vrijednosti

$$\lambda = \frac{2L}{n}. \tag{1.12}$$

Iz izraza $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$, jednakosti $\omega = 2\pi\nu$ te jednadžbe (1.8) slijedi

$$\nu = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}. \tag{1.13}$$

Na niti se pojavljuju valovi s valnom duljinom određenom nizom cijelih brojeva n. Za $n = 1$ se javlja titranje s osnovnom frekvencijom, a za $n = 2, 3, \ldots$ titranja viših frekvencija (tzv. viši harmonici).

Eksperimentalni uređaj i mjerenje

Eksperimentalni se uređaj za proučavanje stojnih valova sastoji od elektromagnetskog vibratora, koloture, postolja za utege, utega i četiriju niti različitih duljina. Da biste dobili stojni val na niti, jedan njen kraj pričvrstite za elektromagnetski vibrator, a drugi prebacite preko koloture i o kuku objesite postolje za utege. Uključenjem vibratora (čija je frekvencija ν jednaka frekvenciji gradske mreže, odnosno 50 Hz) i opterećenjem slobodnog kraja niti utezima određene težine, nastaju stojni valovi. Stojne ćete valove vidjeti za određeni interval masa utega u postolju, ali slobodni kraj niti nastojte opteretiti tolikom masom da amplituda titranja stojnog vala bude najveća.

Zadaci

1. Odaberite nit duljine 4 m i njen slobodni kraj opteretite utezima tako da dobijete harmonike različitih redova. Dobivene rezultate prikažite u grafu $\log m - \log n$ i provjerite ovisnost iz jednadžbe (1.13), $m \propto n^{-2}$ (koristite `Mathematicu`).

2. Izmjerite ovisnost opterećenja niti o njenoj duljini za jedan harmonik ($n =$ *konst.*). Dobivene rezultate prikažite u grafu $\log m - \log L$ i provjerite ovisnost iz jednadžbe (1.13), $m \propto L^2$ (koristite `Mathematicu`).

Zadaci iz programskog paketa `Mathematica`

1. Nacrtajte grafove i provedite račune iz zadataka 1. i 2.

2. Zamislite dva valna paketa $f(x)$ i $g(x)$ definirane izrazima

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^{-(x-x_0)^2} \\ g(x) &= \mathrm{e}^{-(x-x_0)^2} \sin(x - x_0) \end{aligned}$$

   i koji putuju jedan prema drugome. Nacrtajte rezultatnti val koji nastaje kada se $f(x)$ ($g(x)$) giba od $x = -10$ ($x = 10$) do $x = 10$ ($x = -10$).