SVEUČILIŠTE U SPLITU

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Željana Bonačić Lošić

MATEMATIČKE OSNOVE OPĆE FIZIKE

Sadržaj

1 Vektori **4**

2 Preslikavanje **12**
2.1 Elementarne funkcije . . . 13
2.2 Vektorske funkcije . . . 16

3 Derivacije i njihova primjena u kinematici **20**
3.1 Granične vrijednosti i neprekidnost . . . 20
3.1.1 Granične vrijednosti . . . 20
3.1.2 Neprekidnost funkcije . . . 21
3.2 Brzina u jednoj dimenziji . . . 22
3.3 Derivacije . . . 22
3.3.1 Brzina kao derivacija . . . 25
3.4 Više derivacije i ubrzanje . . . 25
3.4.1 Ubrzanje u jednoj dimenziji . . . 27
3.5 Derivacije vektorskih funkcija . . . 27
3.5.1 Granične vrijednosti i neprekidnost . . . 27
3.5.2 Derivacije . . . 28
3.5.3 Položaj, brzina i ubrzanje u dvije i tri dimenzije . . . 30

4 Određeni i neodređeni integrali **32**
4.1 Određeni integrali . . . 32
4.1.1 Određivanje pomaka iz brzine . . . 32
4.1.2 Riemannova suma i određeni integral . . . 34
4.1.3 Svojstva određenih integrala . . . 37
4.2 Primitivna funkcija i neodređeni integral . . . 38
4.3 Osnovni teoremi integralnog računa . . . 39
4.3.1 Prvi osnovni teorem integralnog računa . . . 39
4.3.2 Drugi osnovni teorem integralnog računa . . . 40
4.4 Primjena u kinematici - jedna dimenzija . . . 40
4.4.1 Određeni integrali . . . 41
4.4.2 Primitivne funkcije . . . 43
4.5 Primjena u kinematici - dvije i tri dimenzije . . . 44
4.5.1 Određeni integrali . . . 44
4.5.2 Primitivne funkcije . . . 45

5 Newtonovi zakoni **46**
5.1 Newtonovi zakoni . . . 46
5.1.1 Newtonovi zakoni . . . 46
5.1.2 Primjena Newtonovih zakona . . . 46
5.1.3 Drugi Newtonov zakon zapisan po komponentama . . . 47
5.2 Primjena drugog Newtonovog zakona . . . 47
5.2.1 Primjene s konstantnom ukupnom silom . . . 47
5.3 Primjena drugog Newtonovog zakona za sile koje se mijenjaju s vremenom . . . 49

6 Diferencijalne jednadžbe **51**
6.1 Uvod u diferencijalne jednadžbe . . . 51
6.2 Metoda separacije varijabli . . . 53

7 Rad i linijski integrali **56**
7.1 Rad u slučaju jednodimenzionalnog gibanja . . . 56
7.1.1 Rad konstantne sile . . . 56
7.1.2 Rad promjenjive sile . . . 57
7.2 Rad i skalarni produkt . . . 58
7.2.1 Rad konstantne sile u više dimenzija . . . 58
7.3 Linijski integrali i rad promjenljive sile u tri dimenzije . . . 58
7.4 Energija . . . 60
7.4.1 Konzervativne i nekonzervativne sile . . . 60
7.4.2 Kinetička energija . . . 60
7.4.3 Potencijalna energija . . . 61
7.5 Relacija između sile i energije . . . 62

8 Nizovi i redovi **63**
8.1 Nizovi . . . 63
8.2 Redovi . . . 65
8.2.1 Geometrijski red . . . 65
8.2.2 p-redovi . . . 65
8.3 Kriteriji za konvergenciju redova . . . 66
8.3.1 Poredbeni kriteriji . . . 66
8.3.2 D'Alambertov kriterij . . . 67
8.3.3 Apsolutna konvergencija . . . 67
8.4 Redovi potencija . . . 67
8.5 Taylorov red . . . 67

9 Oscilacije i diferencijalne jednadžbe drugog reda **68**
9.1 Jednostavni harmonički oscilator . . . 68
9.2 Jednostavno matematičko njihalo . . . 70

Poglavlje 1

Vektori

Fizikalne veličine koje ćemo susretati u ovom tekstu su **skalari** i **vektori**. Skalar je veličina koja je određena jednim brojem; vektor je veličina koja je određena s više od jednog broja.
Možemo razviti numeričko i geometrijsko razumijevanje vektora. Promatrajući numerički, vektor je uređeni par brojeva. Gledajući geometrijski, vektor je strjelica dane duljine i smjera.

Zamislimo brod koji plovi iz jedne luke u drugu. Otok mu ne omogućava direktan put kao što je prikazano na slici 1.1. Primjetimo da slika uključuje kartezijev koordinatni sustav. Predpostavimo da je brod došao na određeni položaj. Nacrtajmo strjelicu iz ishodišta koja će kao vektor određivati ovaj položaj. Ova strjelica ima određenu duljinu i određeni smjer. Možemo dati ovom vektoru simbolično ime $\mathbf{p}$. Projekcija ovog vektora na x-os je 5km, a na y-os 3km. To označavamo zagradama $\mathbf{p} = (5, 3)km$. Općenito, vektor u ravnini označavamo $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, a skalare a_1 i a_2 nazivamo komponentama vektora $\mathbf{a}$.

Definicija 1.1. Suma $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ dvaju vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ je vektor s početkom u početku strjelice $\mathbf{a}$ i krajem na kraju strjelice $\mathbf{b}$ kad je $\mathbf{b}$ nacrtan s početkom na kraju od $\mathbf{a}$.

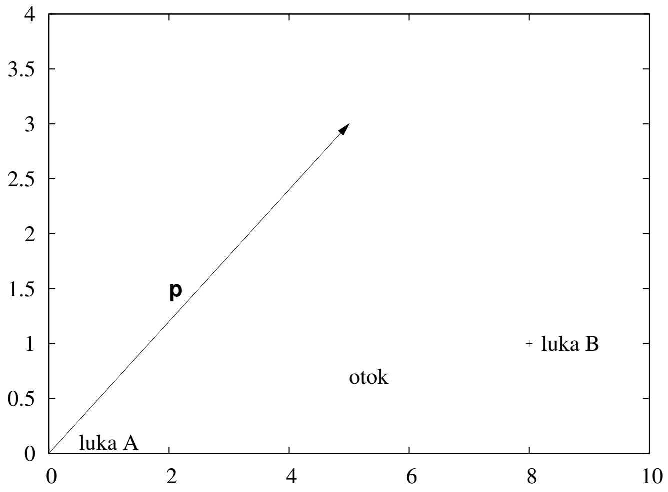
Zamislimo sad da je brod otplovio na drugi položaj koji je određen vektorom $\mathbf{q}$ i da ima komponente $\mathbf{q} = (8, 1)$ kao što je prikazano na slici 1.2. Nalazimo da je pomak broda vektor $\mathbf{r}$ između prvog i drugog položaja $\mathbf{r} = (3, -2)km$. Pomak je jednostavno udaljenost i smjer za koji se brod pomakao idući iz prvog u drugi položaj. Iz slike 1.2 i Definicije 1.1 vidimo da je $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \mathbf{r}$. Uvrštavajući numeričke vrijednosti imamo $(8, 1) = (5, 3) + (3, 2)$. Ovaj primjer motivira nas na sljedeću definiciju.

Definicija1.2. Suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ dvaju vektora $\mathbf{a} = (u_1, u_2)$ i $\mathbf{b} = (v_1, v_2)$ jednaka je

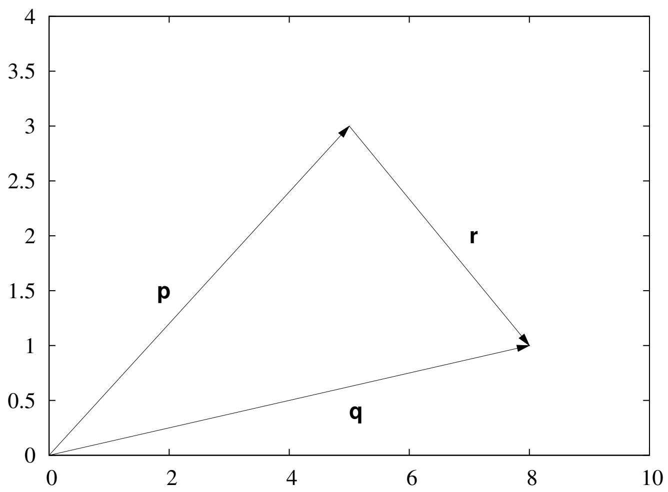
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2). \tag{1.1}$$

Primjer 1.1 Nađite sljedeće sume vektora $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ i $\mathbf{c} + \mathbf{d}$ za vektore $\mathbf{a} = (-5, 2)$, $\mathbf{b} = (3, 2)$, $\mathbf{c} = (7.2, 1.4)$, i $\mathbf{d} = (3.1, -2.9)$. *Rješenje.* Geometrijsko rješenje prikazano je na slici, dok je numeričko jednako

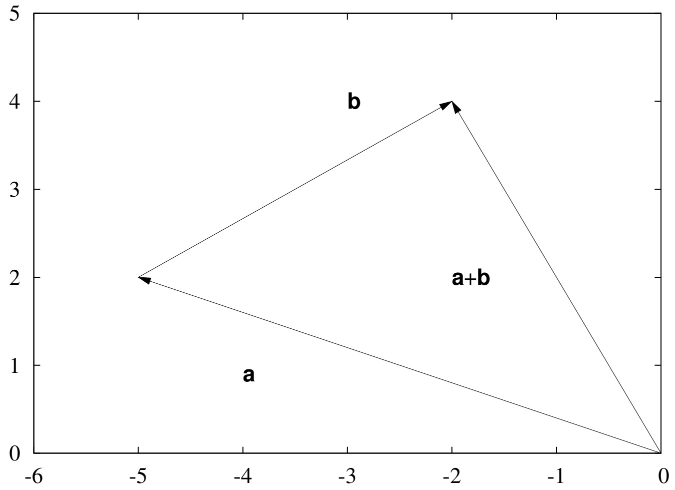
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (-5, 2) + (3, 2) = (-5 + 3, 2 + 2) = (-2, 4). \tag{1.2}$$



Slika 1.1: Vektor **p** predstavlja početni položaj broda.



Slika 1.2: Vektori predstavljaju položaj i pomak broda.



Slika 1.3: Vektori iz Primjera 1.1.

Druga osnovna algebarska operacija je množenje sa skalarom. Operacije oduzimanja i dijeljenja sa skalarom su definirane kao inerzne operacije zbrajanju i množenju sa skalarom.

Definicija1.3. Neka je a skalar i $\mathbf{u}$ vektor s komponentama $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Množenje sa skalarom dano je izrazom

$$a\mathbf{u} = a(u_1, u_2) = (au_1, au_2). \tag{1.3}$$

Primjer 1.2. Izračunajte $(-2)\mathbf{v}$ gdje je $\mathbf{v} = (6, -4)$ i dajte geometrijsku interpretaciju produkta.
Rješenje.

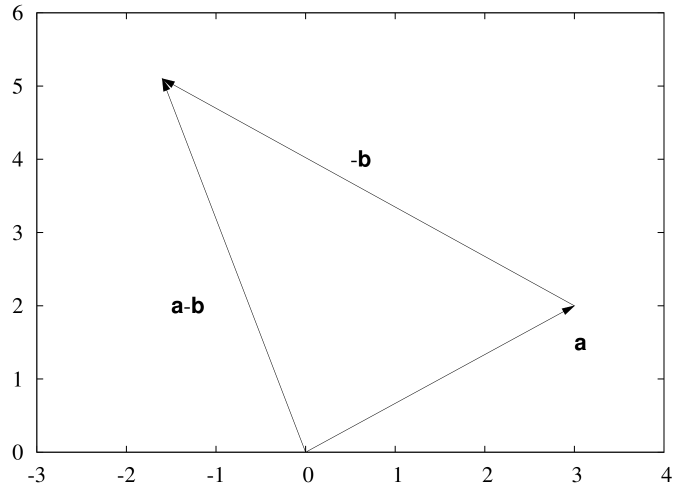
$$(-2)\mathbf{v} = (-2)(6, -4) = ((-2)6, (-2)(-4)) = (-12, 8). \tag{1.4}$$

Primjer 1.3. Izračunajte $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ gdje je $\mathbf{a} = (3, 2)$ i $\mathbf{b} = (4.6, -3.1)$.
Rješenje.

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (3, 2) - (4.6, -3.1) = (3 - 4.6, 2 - (-3.1)) = (-1.6, 5.1). \tag{1.5}$$

Geometrijsko rješenje dano je na slici 1.4.

Nije teško pokazati da vrijede i sljedeća pravila vektorske algebre:
1. komutativnost zbrajanja $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$,
2. asocijativnost zbrajanja $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$,
3. asocijativnost množenja $(c)(d\mathbf{x}) = (cd)\mathbf{x}$,
4. prvo pravilo distributivnosti $c(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\mathbf{x} + c\mathbf{y}$,
5. drugo pravilo distributivnosti $(c + d)\mathbf{x} = c\mathbf{x} + d\mathbf{x}$.



Slika 1.4: Vektori iz Primjera 1.3.

Kada vektor reprezentiramo strjelicom njena duljina određuje iznos tog vektora kao što je to prikazano na slici 1.5. Iznos vektora **a** označavamo $|\mathbf{a}| = a$. Iskoristimo Pitagorin teorem da odredimo iznos vektora **a** preko njegovih komponenti $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ kao što je prikazano na slici 1.5. Primjenjujući Pitagorin teorem na desni trokut prikazan na toj slici 1.5 dobivamo

$$|\mathbf{a}|^2 = (a_1)^2 + (a_2)^2. \tag{1.6}$$

Rješavajući dobijamo

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}. \tag{1.7}$$

Primjer 1.4. Odredite iznos vektora $\mathbf{v} = (3.2, -5.1)$.
Rješenje.

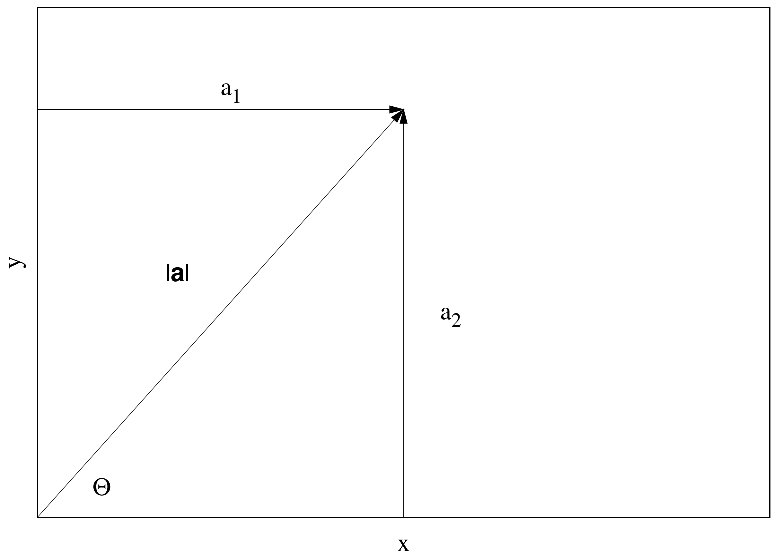
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(3.2)^2 + (-5.1)^2} \approx 6.002. \tag{1.8}$$

Primjena prikaza iznosa vektora preko njegovih komponenti može se lako proširiti i na vektor u tri dimenzije $\mathbf{a} = (x, y, z)$, kao što je prikazano na slici 1.6. U ovom slučaju primjenjujemo Pitagorin teorem dva puta. Prvo, primjenjujemo Pitagorin teorem na pravokutni trokut stranica duljina x i y s hipotenuzom duljine w na slici 1.6. Tako dobivamo

$$w^2 = x^2 + y^2. \tag{1.9}$$

Zatim, primjenjujemo Pitagorin teorem na pravokutni trokut stranica duljina z i w s hipotenuzom duljine a na slici 1.6. Tako dobivamo

$$a^2 = w^2 + z^2. \tag{1.10}$$



Slika 1.5: Komponente vektora **a**.

Uvrštavajući izraz (1.9) i vadeći drugi korijen dobivamo

$$a = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{1.11}$$

Primjer 1.5. Odredite iznos vektora $\mathbf{v} = (7, 2, 5)$
Rješenje.

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(7)^2 + (2)^2 + (5)^2} = \sqrt{78} \approx 8.83. \tag{1.12}$$

Također, možemo povezati smjer vektora **a** s njegovim komponentama $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ pomoću kuta Θ između pozitivnog smjera osi x i vektora kao što je prikazano na slici. Vrijedi

$$tg\Theta = \frac{a_2}{a_1}. \tag{1.13}$$

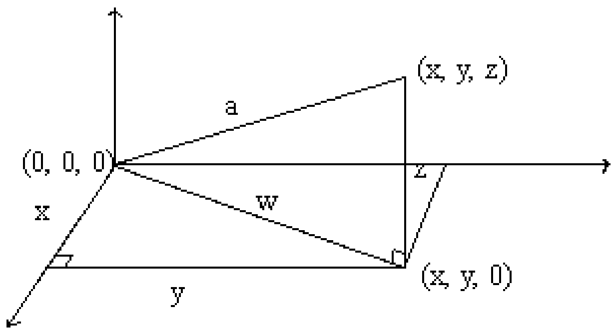
Primjer 1.6. Odredite smjer vektora $\mathbf{v} = (3, -2)$
Rješenje.

$$tg\Theta = \frac{-2}{3}. \tag{1.14}$$

Koristeći kalkulator dobivamo $\Theta \approx -5.7$.

Drugi način određivanja smjera vektora koristi ideju jediničnog vektora. Za dani vektor **a** možemo konstruirati vektor koji ima isti smjer, a iznos mu je 1. Tako, definiramo jedinični vektor u smjeru vektora **a** na sljedeći način

$$\hat{a} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}. \tag{1.15}$$



Slika 1.6: Komponente vektora **a**.

Primjer 1.7. Odredite jedinični vektor u smjeru $\mathbf{a} = (3, -2)$.
Rješenje. $|\mathbf{a}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{13}}(3, -2) = (\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{-2}{\sqrt{13}}). \tag{1.16}$$

Tri jedinična vektora su od posebnog značaja. To su jedinični koordinatni vektori za kartezijev koordinatni sustav u prostoru. Jedinični koordinatni vektor ima smjer u pozitivnom smjeru jedne od koordinatnih osi. Standardni zapis je $\hat{\imath}$ za jedinični vektor u smjeru pozitivne x-osi; $\hat{\jmath}$ za jedinični vektor u smjeru pozitivne y-osi; i $\hat{k}$ za jedinični vektor u smjeru pozitivne z-osi. Zapisani preko svojih komponenti ovi vektori glase

$$\hat{\imath} = (1, 0, 0), \tag{1.17}$$

$$\hat{\jmath} = (0, 1, 0), \tag{1.18}$$

$$\hat{k} = (0, 0, 1). \tag{1.19}$$

Svaki drugi vektor u prostoru može se prikazati kao kombinacija jediničnih vektora $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ i $\hat{k}$. Npr. možemo iskoristiti svojstva vektorske algebre da zapišemo

$$(3, 2, 6) = 3(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 6(0, 0, 0) = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 6\hat{k}. \tag{1.20}$$

Općenito vrijedi

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}. \tag{1.21}$$

Definicija1.4. Skalarni produkt dvaju vektora $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ i $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ je skalar dan izrazom

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2. \tag{1.22}$$

Primjer 1.8. Odredite skalarni produkt vektora $\mathbf{a} = (6, 1)$ i $\mathbf{b} = (2, -4)$.
Rješenje.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (6, 1) \cdot (2, -4) = (6)(2) + (1)(-4) = 8 \tag{1.23}$$

Primjer 1.9. Odredite skalarni produkt vektora $\mathbf{a} = (2, 4)$ i $\mathbf{b} = (-14, 7)$.
Rješenje.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2, 4) \cdot (-14, 7) = (2)(-14) + (4)(7) = 0 \tag{1.24}$$

Primjer 1.10. Odredite skalarni produkt vektora $\mathbf{a} = (-3, 6)$ i $\mathbf{b} = (3, -2)$.
Rješenje.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-3, 6) \cdot (-3, -2) = (-3)(3) + (6)(-2) = -21 \tag{1.25}$$

Koristeći definiciju lako je pokazati da skalarni produkt zadovoljava neke osnovne identitete. Npr. skalarni produkt je komutativan

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = b_1 a_1 + b_2 a_2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \tag{1.26}$$

Skalarni produkt ima i sljedeća svojstva:
1. uvjet pozitivnosti $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ s $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ ako i samo ako $\mathbf{a} = 0$,
2. ,,asocijativnost" sa množenjem skalarom $(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{b}) = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$,
3. distributivnost u odnosu na zbrajanje vektora $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$,
4. komutativnost $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.

Definicija skalarnog produkta pomoću komponenata može se lako proširiti i na tri dimenzije. Za vektore $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \tag{1.27}$$

Primjer 1.11. Odredite skalarni produkt vektora $\mathbf{a} = (2, 4, -1)$ i $\mathbf{b} = (3, 6, 2)$.
Rješenje.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2, 4, -1) \cdot (3, 6, 2) = (2)(3) + (4)(6) + (-1)(2) = 28 \tag{1.28}$$

Primjer 1.12. Odredite skalarni produkt vektora $\mathbf{a} = (2, 4, -1)$ i $\mathbf{b} = (6, -5, -8)$.
Rješenje.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2, 4, -1) \cdot (6, -5, -8) = (2)(6) + (4)(-5) + (-1)(-8) = 0 \tag{1.29}$$

Primjetimo da vrijedi

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\mathbf{a}|^2. \tag{1.30}$$

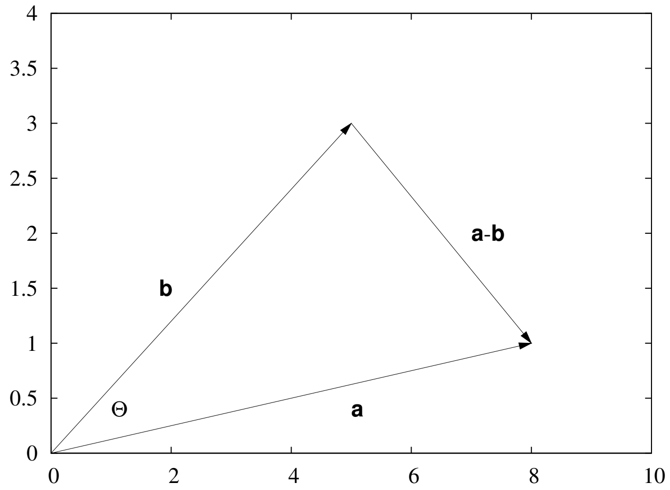
Teorem 1.1. Za dane vektore $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ (oba u ravnini ili prostoru) vrijedi

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \Theta, \tag{1.31}$$

gdje je Θ kut između $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

Dokaz. Promotrimo trokut čije su stranice vektori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ kao što je prikazano na slici 1.7. Naći ćemo dva različita izraza za $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ i zatim ih izjednačiti. Prvo, primjenjujemo pravilo cosinusa za trokut i dobijamo

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \Theta. \tag{1.32}$$



Slika 1.7: Vektori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ korišteni u dokazu Teorema 1.1.

Zatim, koristimo skalarni produkt koji nam daje

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Izjednačavajući izraze (1.32) i (1.33) dobijamo

$$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\Theta = |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2. \tag{1.34}$$

Pojednostavljujući imamo

$$|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\Theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \tag{1.35}$$

Što smo i željeli dokazati.

Iz Teorema 1.1. vidimo da ako je $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ vrijedi jedan od sljedeća tri slučaja:
1. $|\mathbf{a}| = 0$, odnosno $\mathbf{a} = 0$;
2. $|\mathbf{b}| = 0$, odnosno $\mathbf{b} = 0$; ili
3. $\cos\Theta = 0$, odnosno $\Theta = \pi/2$, što znači da su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ okomiti.

Poglavlje 2

Preslikavanje

Definicija 2.1. Preslikavanje skupa X u skup Y je uređena trojka (X, Y, f) koja se sastoji od skupa X (domena), skupa Y (kodomena) i pravila f po kome svakom elementu skupa $x \in X$ iz domene pridružujemo jedan i samo jedan element $y \in Y$ iz kodomene. $y = f(x)$ zovemo vrijednost funkcije na elementu x ili slika elementa x.

Da bismo pokazali da je pravilo f povezano s domenom X i kodomenom Y, pišemo

$$f : X \to Y. \tag{2.1}$$

Da bismo prikazali da je određenom elementu domene pridjeljena njegova slika pišemo

$$f : x \mapsto f(x). \tag{2.2}$$

Primjer 2.1. Prikaži funkciju danu pravilom $f(x) = 3x^2 - 5$ koristeći gornje notacije.
Rješenje

$$f : R \to R, f : x \mapsto f(x) = 3x^2 - 5. \tag{2.3}$$

$$f : R \to [-5, \infty), f : x \mapsto f(x) = 3x^2 - 5. \tag{2.4}$$

Primjetimo da je

$$(R, R, f) \neq (R, [-5, \infty), f). \tag{2.5}$$

$$f : 7 \mapsto f(7) = 3(7)^2 - 5 = 142. \tag{2.6}$$

Možemo izabrati i druga imena za pravilo i za element domene, npr.

$$g : R \to R, g : t \mapsto g(t) = 3t^2 - 5. \tag{2.7}$$

Primjetimo da vrijedi

$$(R, R, f) = (R, R, g). \tag{2.8}$$

Graf preslikavanja je skup $\Gamma = \{(x, f(x)), x \in X\}$.

Prirodna domena ili područje definicije preslikavanja za dano pravilo je najveća domena za koju to pravilo ima smisla. Npr. prirodna domena za pravilo $f(x) = \sqrt{x}$ je $[0, \infty)$.

Slika domene X za funkciju $f : X \to Y$ je skup $f(X) = \{f(x), x \in X\} \subset Y$.

Definicija 2.2. Kompozicija preslikavanja $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ je preslikavanje $h : X \to Z$ takvo da je $h(x) = g[f(x)]$, pa se piše $h = g \circ f$.

Definicija 2.3. Neka je $X_1 \subset X$ i $f : X \to Y$ i $f_1 : X_1 \to Y$ preslikavanja za koja vrijedi $f_1(x) = f(x)$ za svaki $x \in X_1$. f_1 zovemo restrikcija preslikavanja f i pišemo $f_1 = f/X_1$. f zovemo ekstenzija od f_1.

Definicija 2.4. Za preslikavanje $f : X \to Y$ kažemo da je
1) injekcija ako $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, za svaki $x_1, x_2 \in X$
2) surjekcija ako $f(X) = Y$
3) bijekcija ako je injekcija i surjekcija.

Primjer 2.2.
$f : R \to R, f : x \mapsto f(x) = 2x$ je bijekcija.
$f : R \to R, f : x \mapsto f(x) = x^2$ nije ni injekcija ni surjekcija.

Definicija 2.5. Za preslikavanje $g : Y \to X$ kažemo da je inverzno preslikavanje za preslikavanje $f : X \to Y$ ako je kompozicija $g \circ f = 1_X$ i $f \circ g = 1_Y$, ($1_X : X \to X, 1_X(x) = x$ za svaki $x \in X$ identiteta).

Preslikavanje f ima inverzno preslikavanje ako i samo ako je f bijekcija.

2.1 Elementarne funkcije

1. **Polinomi** su dani pravilom

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n, \tag{2.9}$$

gdje je n prirodan broj različit od nula, a koeficijenti a_i za $i = 1, 2, ..., n$ su realni brojevi. Stupanj polinoma je najveća potencija od x. Npr. stupanj polinoma

$$f(x) = 3 + 7x - 15x^2 + 6x^3 \tag{2.10}$$

je 3. Prirodna domena svakog polinoma je skup realnih brojeva budući da su oni definirani za svaki realni broj.

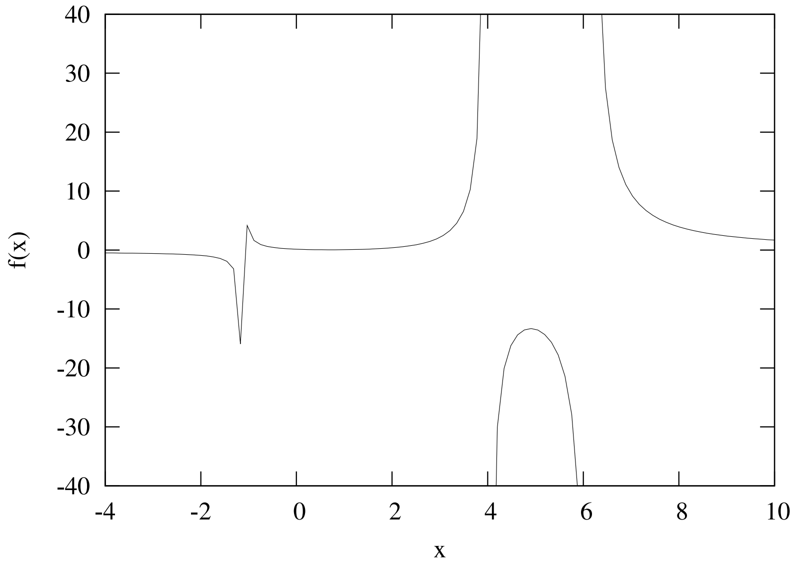
2. **Racionalna funkcija** je kvocijent dvaju polinoma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m}{c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n}. \tag{2.11}$$

Nule polinoma $q(x)$ su isključene iz prirodne domene of f budući da kvocijent nije definiran kad je nazivnik nula. Ovo je ilustrirano na sljedećem primjeru.

Primjer 2.3. Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x) = \frac{4 - 7x + 5x^2}{28 + 13x - 9x^2 + x^3}. \tag{2.12}$$



Slika 2.1: Graf racionalne funkcije (2.12).

Rješenje.
Moramo odrediti nule polinoma $q(x) = 28 + 13x - 9x^2 + x^3$. Faktorizacijom dobivamo

$$q(x) = (x - 4)(x^2 - 5x - 7). \tag{2.13}$$

Koristeći formulu za rješenje kvadratne jednadžbe dobivamo nule kvadratnog člana $(5+\sqrt{53})/2$ i $(5 - \sqrt{53})/2$. Zato iz prirodne domene od f moramo isključiti tri broja 4, $(5 + \sqrt{53})/2$ i $(5 - \sqrt{53})/2$. Primjetimo iz grafa funkcije f prikazanog na slici 2.1 da on ima vertikalne asimptote u nulama nazivnika q.

3. **Trigonomertijske funkcije**

$$f(x) = \sin x, x \in R, f(R) = [-1, 1] \tag{2.14}$$

$$f(x) = \cos x, x \in R, f(R) = [-1, 1] \tag{2.15}$$

$$f(x) = \tan x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \tag{2.16}$$

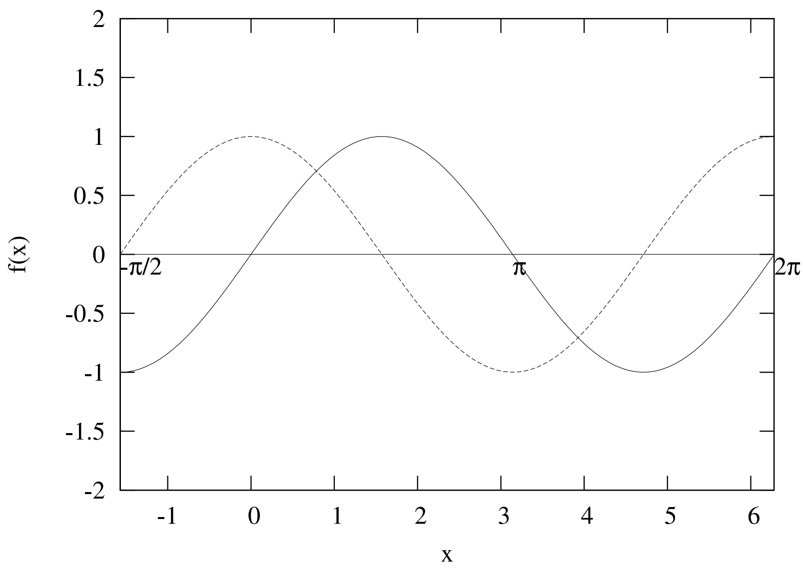
$$f(x) = ctanx, x \neq k\pi \tag{2.17}$$

Uočimo da je funkcija

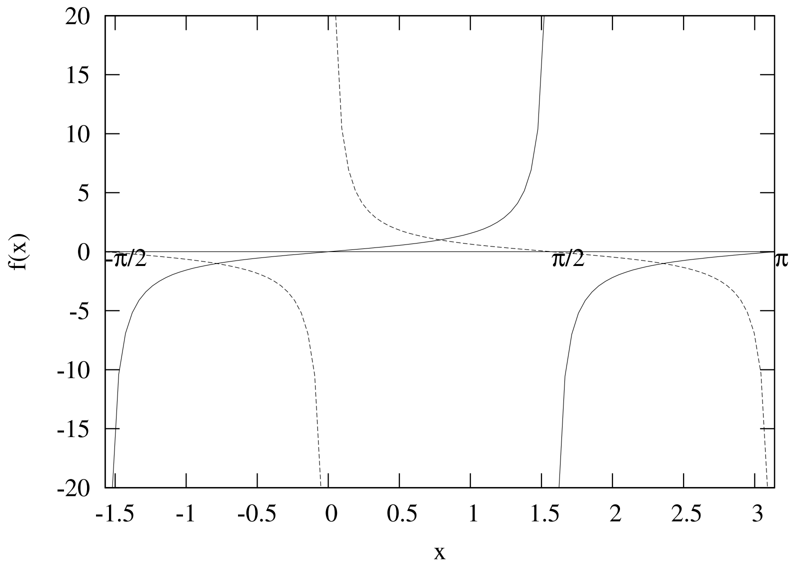
$$f : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1 : 1], f(x) = \sin x \tag{2.18}$$

bijekcija. Njena inverzna funkcija je (sl. 2.4)

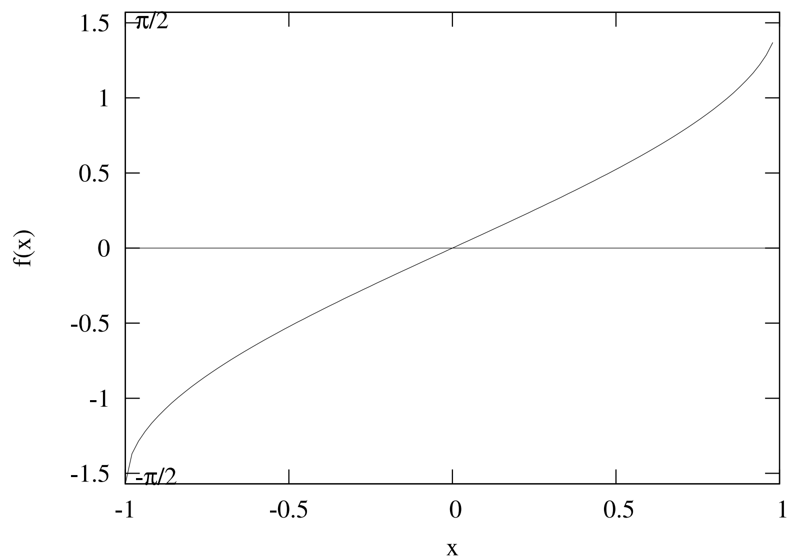
$$f^{-1} : [-1 : 1] \to [-\pi/2, \pi/2], f^{-1}(x) = arcsinx. \tag{2.19}$$



Slika 2.2: Graf sinusne funkcije (puna linija) i kosinusne funkcije (isprekidana linija).



Slika 2.3: Graf tangensne funkcije (puna linija) i kotangensne funkcije (isprekidana linija).



Slika 2.4: Graf funkcije inverzne sinusnoj.

4. **Eksponencijalna funkcija**(2.5)

$$f : R \rightarrow (0, +\infty), f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1 \tag{2.20}$$

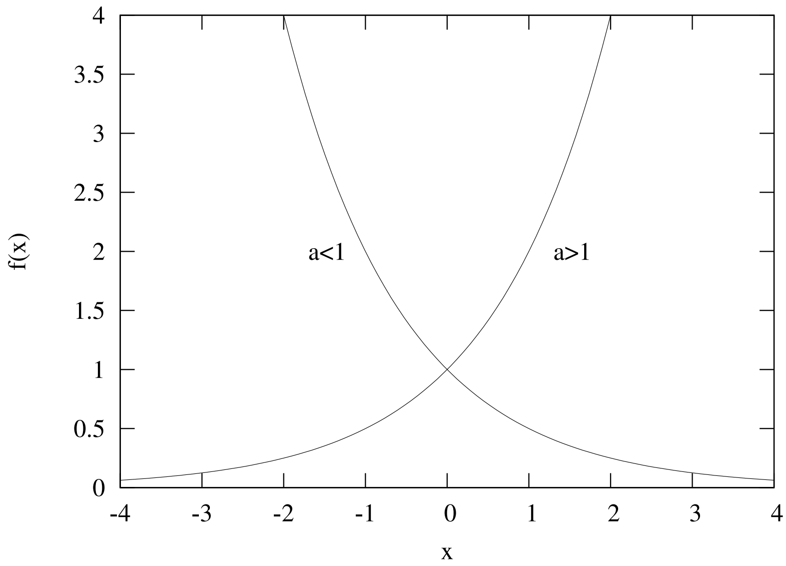
5. **Logaritamska funkcija**

Inverzna funkcija eksponencijalnoj je logaritamska (2.6)

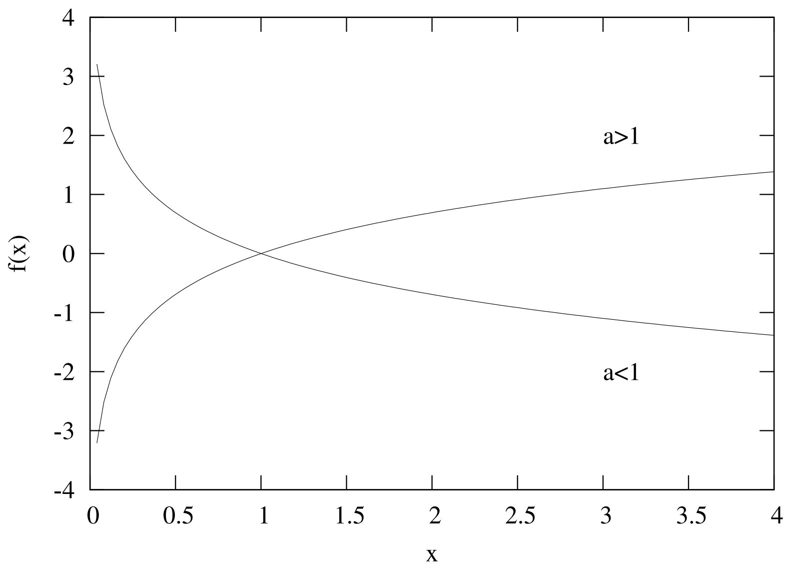
$$f : (0, +\infty) \rightarrow R, f(x) = log_a x, a > 0, a \neq 1 \tag{2.21}$$

2.2 Vektorske funkcije

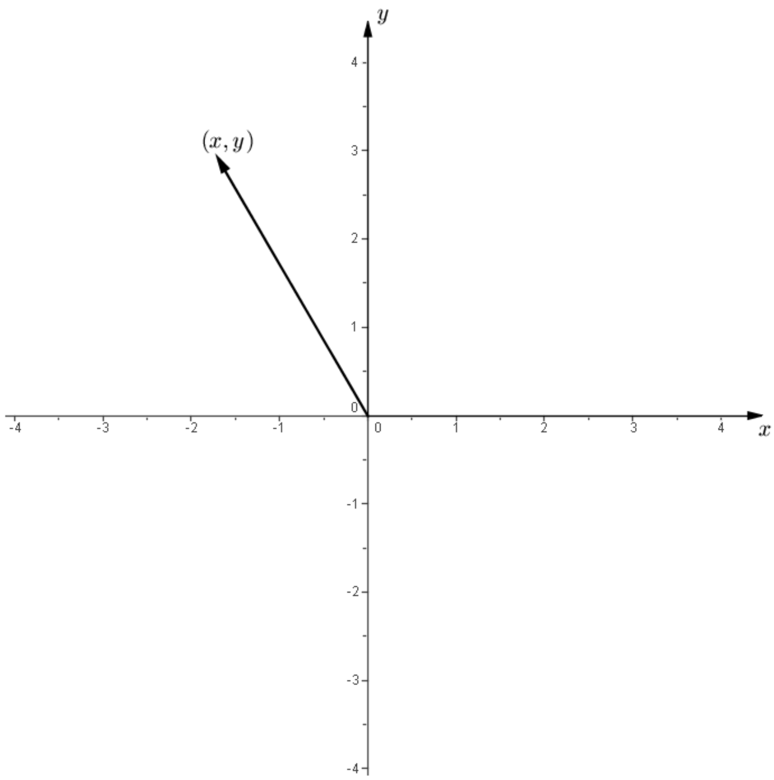
Pogledajmo sada funkcije koje za svoje vrijednosti imaju vektore. Ove funkcije su bitne za modeliranje mnogih fizikalnih situacija kao što su npr. gibanje u ravnini ili prostoru.
Počnimo primjerom. Predpostavimo da proučavamo gibanje kukca po ravnoj površini. Za svaki trenutak u vremenu, bilježimo njegov položaj kao vektor $(x(t), y(t))$ u kartezijevom koordinatnom sustavu (sl. 2.7). Definiramo funkciju čije pravilo svakom trenutku vremena pridjeljuje položaj kukca u tom trenutku $(x(t), y(t))$. Domena ove funkcije je skup realnih brojeva R (koji predstavlja vremenske trenutke), a kodomena je skup vektora (koji predstavljaju položaje kukca). Ovo pravilo označavamo s $\mathbf{r}$, a imamo $\mathbf{r} : R \rightarrow R^2$. Funkciju ovog tipa nazivamo vektorska funkcija.



Slika 2.5: Graf eksponencijalne funkcije.



Slika 2.6: Graf logaritamske funkcije.



Slika 2.7: Vektor položaja kukca na ravnoj površini.

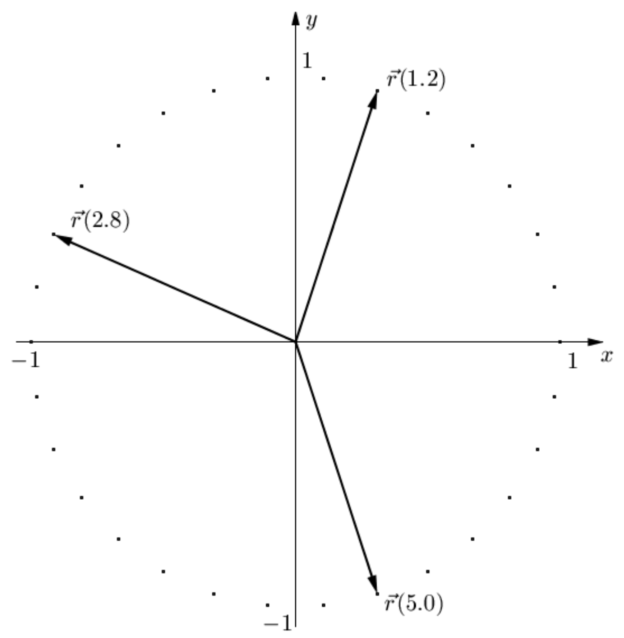
Pogledajmo funkciju

$$\mathbf{r} : t \mapsto (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t). \tag{2.22}$$

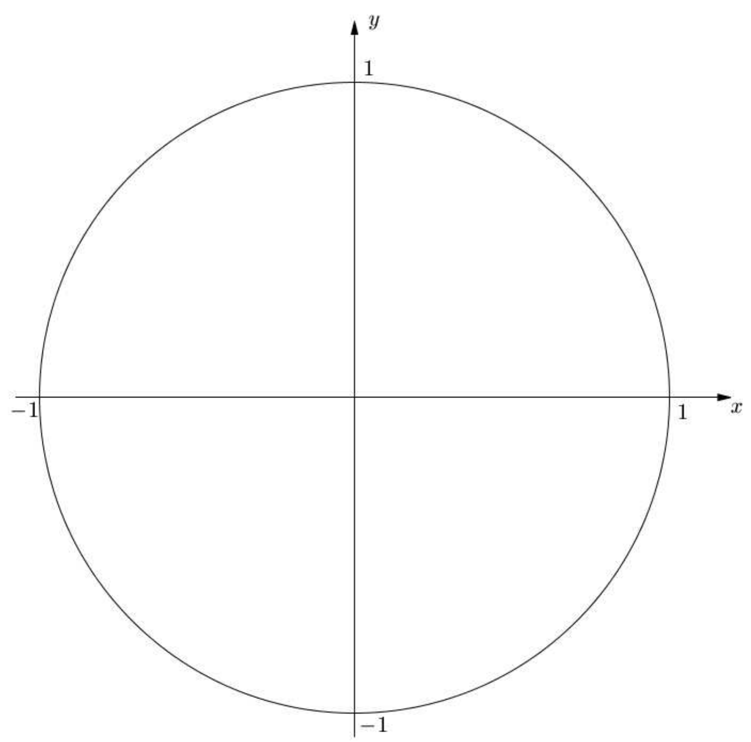
x i y koordinata ove funkcije zadovoljavaju izraz

$$x^2 + y^2 = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1, \tag{2.23}$$

pa je njena izlazna krivulja (krivulja koju opisuju krajevi vektora $\mathbf{r}$ u kartezijevom koordinatnom sustavu u ravnini $(x0y)$) kružnica radijusa 1 s centrom u ishodištu (sl. 2.8 i sl. 2.9).



Slika 2.8: Vrijednosti vektorske funkcije (2.22) za neke vremenske trenutke.



Slika 2.9: Izlazna krivulja za vektorsku funkciju (2.22).

Poglavlje 3

Derivacije i njihova primjena u kinematici

3.1 Granične vrijednosti i neprekidnost

3.1.1 Granične vrijednosti

Definicija 3.1. Granična vrijednost (limes) funkcije f kad se x približava a je vrijednost L kojoj se $f(x)$ može proizvoljno približiti za svaku vrijednosti x dovoljno blizu, ali ne jednake a. Ovo se može zapisati

$$lim_{x \to a} f(x) = L \tag{3.1}$$

i čita "granična vrijednost od f kad se x približava a jednaka je L".

Nije svejedno približavamo li se točki a s lijeve strane ili s desne strane. Graničnu vrijednost zovemo lijeva granična vrijednost ako se x približava a s lijeve strane ($x < a$) i pišemo

$$lim_{x \to a^-} f(x). \tag{3.2}$$

Graničnu vrijednost zovemo desna granična vrijednost ako se x približava a s desne strane ($x > a$) i pišemo

$$lim_{x \to a^+} f(x). \tag{3.3}$$

Primjer 3.1. Analizirajte graničnu vrijednost funkcije

$$S(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

kad se x približava 0.
Rješenje.

$$lim_{x \to 0^-} f(x) = 0, \tag{3.4}$$

$$lim_{x \to 0^+} f(x) = 1. \tag{3.5}$$

Primjer 3.2. Analizirajte graničnu vrijednost funkcije $f(x) = \tan x$ kad se x približava $\pi/4$ i kad se x približava $\pi/2$.

Rješenje.

$$lim_{x\to\pi/4}\tan x = 1, \tag{3.6}$$

$$lim_{x\to\pi/2^-}\tan x = \infty, \tag{3.7}$$

$$lim_{x\to\pi/2^+}\tan x = -\infty. \tag{3.8}$$

Definicija 3.2. Granična vrijednost funkcije f kad se x približava a je L znači da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji vrijednost $\delta > 0$ takva da ako x zadovoljava $0 < |x-a| < \delta$, tada $f(x)$ zadovoljava $|f(x)-L| < \varepsilon$. Pišemo

$$lim_{x\to a}f(x) = L. \tag{3.9}$$

Ako ne postoji L za koji vrijedi gornji iskaz, kažemo da granična vrijednost funkcije f kad se x približava a ne postoji.

Primjer 3.3. Dokažite da je $lim_{x\to 2}3x = 6$.
Rješenje.

$$|f(x)-L| = |3x-6| = 3|x-2|. \tag{3.10}$$

Tada $\delta = \varepsilon/3$ zadovoljava definiciju.

Teorem 3.1. Neka je $lim_{x\to a}f(x) = A$ i $lim_{x\to a}g(x) = B$. Tada je
1. $lim_{x\to a}(cf(x)) = c\,lim_{x\to a}f(x) = cA$
2. $lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = lim_{x\to a}f(x) + lim_{x\to a}g(x) = A+B$
3. $lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = (lim_{x\to a}f(x))(lim_{x\to a}g(x)) = AB$
4. $lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{lim_{x\to a}f(x)}{lim_{x\to a}g(x)} = \frac{A}{B}, B \neq 0.$

Teorem 3.2. Ako $f, g, h : A \to B$ zadovoljavaju $lim_{x\to a}f(x) = lim_{x\to a}h(x) = L$ i $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ na nekom intervalu koji sadrži a, tada je

$$lim_{x\to a}g(x) = L. \tag{3.11}$$

3.1.2 Neprekidnost funkcije

Definicija 3.3. Funkcija $f : A \to R$ je neprekidna u točki $a \in A$ ako je

$$lim_{x\to a}f(x) = f(a). \tag{3.12}$$

To znači da granična vrijednost funkcije (obje i lijeva i desna) mora biti jednaka vrijednosti funkcije.
(Napomena: Funkcija u točki a mora biti definirana da bi u toj točki bila neprekidna.)

Ako je funkcija $f : A \to R$ neprekidna u svakoj točki domene A, kažemo da je neprekidna na skupu A.
Ako f nije neprekidna u točki $a \in A$ onda kažemo da je f u točki a prekidna i tu točku nazivamo točkom prekida funkcije.

Primjer 3.4. $f(x) = x$ je neprekidna na R.

Primjer 3.5. $f(x) = 1/x$ je neprekidna na cijeloj domeni $R\backslash\{0\}$.

Primjer 3.6. Za funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

je $x = 0$ točka prekida jer je $lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, a $lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. U svim ostalim točkama je ova funkcija neprekidna.

3.2 Brzina u jednoj dimenziji

Položaj čestice koja se giba jednodimenzionalno može se predstaviti točkom na x koordinatnoj osi. Kad se čestica u gibanju pomakne iz jednog položja u drugi kažemo da joj je pomak Δx jednak razlici konačnog položaja x_f i početnog položaja x_i.

Definicija 3.4. Prosječna brzina čestice koja se giba u jednoj dimenziji je kvocijent pomaka čestice i odgovarajućeg intervala vremena Δt tog pomaka

$$v_{sr} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}. \tag{3.13}$$

Promotrimo gibanje čestice opisano funkcijom $x(t) = t^2$ (u metrima) u intervalu $[0, 7s]$ (sl. 3.1). Odredimo srednju brzinu u intervalu $[2s, 6s]$. Početni položaj je $x_i = x(2s) = 4m$, a konačni $x_f = x(6s) = 36m$. Srednja brzina je po definiciji

$$v_{sr} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{36m - 4m}{6s - 2s} = 8m/s. \tag{3.14}$$

Primjećujemo da je grafički srednja brzina jednaka nagibu prema vremenskoj osi dužine između točaka koje odgovaraju krajnjim točkama vremenskog intervala na x-t grafu funkcije $x(t)$ (sl. 3.1).

Želimo ispitati što se događa srednjoj brzini kad interval vremena postane mali.

Definicija 3.5. Za jednodimenzionalno gibanje, trenutna brzina v_x je definirana kao srednja brzina u granici kad se vremenski interval približava nuli,

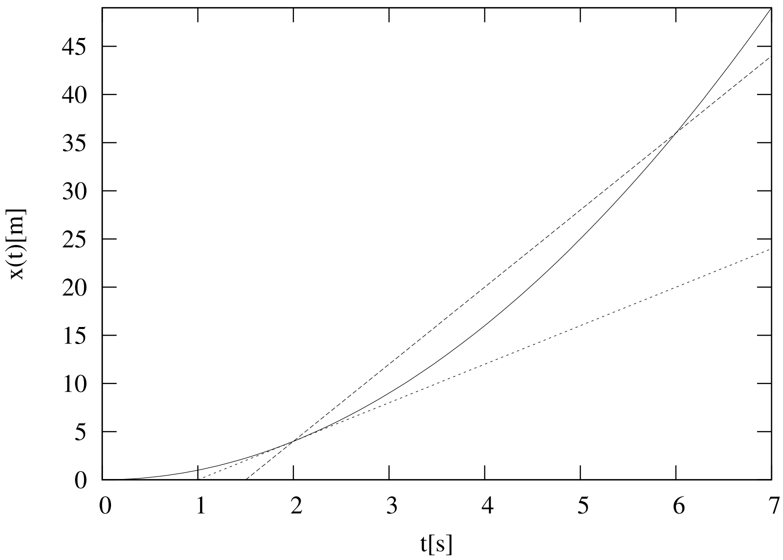
$$v_x = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{3.15}$$

Primjećujemo da je grafički srednja brzina $v_x(t_0)$ u trenutku t_0 jednaka nagibu prema vremenskoj osi tangente na graf funkcije $x(t)$ u danom trenutku t_0(sl. 3.1).

3.3 Derivacije

Definicija 3.6. Funkcija $f : R \to R$ je diferencijabilna u točki $t \in R$ ako postoji

$$\lim_{s\to t} \frac{f(s) - f(t)}{s - t}. \tag{3.16}$$



Slika 3.1: Funkcija $x(t) = t^2$ (puna linija) i pripadne sekanta kroz točke $(2, 4)$ i $(6, 36)$ i tangenta u točki $(2, 4)$ (isprekidana linija).

Ako je f diferencijabilna u točki t, ova granična vrijednost se naziva derivacija funkcije f u točki t i označava

$$f'(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(s) - f(t)}{s - t}. \tag{3.17}$$

Ovim izrazom definirane su vrijednosti funkcije $f' : R \to R$.

Primjer 3.7. Odredite derivaciju funkcije $f(t) = t^2$.
Rješenje.

$$\frac{f(s) - f(t)}{s - t} = \frac{s^2 - t^2}{s - t} = s + t, \tag{3.18}$$

za $s \neq t$.

$$\lim_{s \to t} \frac{f(s) - f(t)}{s - t} = \lim_{s \to t}(s + t) = 2t, \tag{3.19}$$

za svaki t, pa je

$$f'(t) = 2t. \tag{3.20}$$

Uobičajeno je $s - t$ označavati Δt i zvati prirast argumenta, a $f(s) - f(t)$ označavati $\Delta f(t)$ i zvati prirast funkcije. U ovoj notaciji derivacija funkcije je

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \tag{3.21}$$

Geometrijsko značenje derivacije funkcije u točki a je da je ona jednaka nagibu prema osi apscise tangente na graf funkcije u točki $(a, f(a))$ (sl. 3.1), tj.

$$\tan\alpha = \lim_{s\to a}\frac{f(s)-f(a)}{s-a} = f'(a). \tag{3.22}$$

Primjer 3.8. Odredite nagib prema osi apscise tangente na graf funkcije $f(t) = t^2$ u točki $a = 3$.
Rješenje.

$$\frac{f(s)-f(3)}{s-3} = \frac{s^2-3^2}{s-t} = s+3, \tag{3.23}$$

$$\lim_{s\to 3}\frac{f(s)-f(3)}{s-3} = \lim_{s\to 3}(s+3) = 6, \tag{3.24}$$

što se poklapa s rezultatom koji bismo dobili koristeći rješenje u Primjeru 3.6.

$$f'(3) = 6. \tag{3.25}$$

Navedimo derivacije nekih elementarnih funkcija
1. $f(t) = t^n$, $f'(t) = nt^{n-1}$
2. $f(t) = \sin t$, $f'(t) = \cos t$
3. $f(t) = \cos t$, $f'(t) = -\sin t$
4. $f(t) = \tan t$, $f'(t) = 1/(\cos t)^2$
5. $f(t) = e^t$, $f'(t) = e^t$
6. $f(t) = \ln t$, $f'(t) = 1/t$

Alternativni zapis za derivaciju je

$$f' = \frac{df}{dt}. \tag{3.26}$$

Teorem 3.3. Ako su f i g diferencijabilne u danoj točki t, vrijede sljedeća pravila:
1. $\frac{d}{dt}[cf(t)] = c\frac{df(t)}{dt} = cf'(t)$, gdje je c proizvoljna konstanta,
2. $\frac{d}{dt}[f(t)+g(t)] = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt} = f'(t) + g'(t)$,
3. $\frac{d}{dt}[f(t)g(t)] = \frac{df(t)}{dt}g(t) + f(t)\frac{dg(t)}{dt} = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$,
4. $\frac{d}{dt}[\frac{f(t)}{g(t)}] = \frac{\frac{df(t)}{dt}g(t) - f(t)\frac{dg(t)}{dt}}{[g(t)]^2} = \frac{f'(t)g(t)-f(t)g'(t)}{[g(t)]^2}$, $g(t) \neq 0$.

Primjer 3.9. Odredite derivacije funkcija:
a) $g(y) = 3y^2 + 5y - 2$,
b) $h(t) = t^3 \sin t$,
c) $f(x) = (\cos x)/x^3$.
Rješenje.
a) $g'(y) = \frac{d}{dy}[3y^2 + 5y - 2] = 3\frac{d}{dy}[y^2] + 5\frac{d}{dy}[y] = 6y + 5 - 0 = 6y + 5$,
b) $h'(t) = \frac{d}{dt}[t^3\sin t] = \frac{d}{dt}[t^3]\sin t + t^3\frac{d}{dt}[\sin t] = 3t^2\sin t + t^3\cos t$,
c) $f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}[\cos x]x^3 - \cos x\frac{d}{dx}[x^3]}{(x^3)^2} = \frac{-\sin x x^3 - \cos x(3x^2)}{x^6} = -\frac{x\sin x + 3\cos x}{x^4}$.

Teorem 3.4. Ako je h diferencijabilna u točki t i g diferencijabilna u točki $h(t)$, onda je $g \circ h$ diferencijabilna u točki t i vrijedi

$$(g \circ h)'(t) = \frac{d}{dt}[(g \circ h)(t)] = g'(h(t))h'(t). \tag{3.27}$$

Primjer 3.10. Odredite derivaciju funkcije $f(t) = \sin t^4$.
Rješenje.

$$f'(t) = \frac{d}{dt}[\sin t^4] = (\cos t^4)(4t^3) = 4t^3 \cos t^4. \tag{3.28}$$

3.3.1 Brzina kao derivacija

Položaj čestice koja se giba jednodimenzionalno dan je funkcijom $x(t)$ kao što smo vidjeli u Podpoglavlju 3.2. Derivacija funkcije $x(t)$ jednaka je

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \tag{3.29}$$

Vratimo li se definiciji trenutne brzine

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{3.30}$$

vidimo da prirast Δx moramo izračunati između t i $t + \Delta t$. Odnosno, $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$, pa je trenutna brzina jednaka

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \tag{3.31}$$

Uspoređujući (3.29) i (3.31) vidimo da su im desne strane iste. Stoga zaključujemo da je jednodimenzionalna trenutna brzina jednaka derivaciji funkcije položaja po vremenu ili simbolički

$$v_x(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}. \tag{3.32}$$

Primjer 3.11. Čestica se giba u jednoj dimenziji prema zakonu $x(t) = 2t^2 - 3t$ (x je u metrima, a t u sekundama) u vremenskom intervalu $[0, 2.0s]$. Nađite brzinu kao funkciju vremena i nacrtajte funkcije x i v_x.
Rješenje.
$v_x(t) = x'(t) = 4t - 3$ u m/s. Položaj $x(t)$ i brzina $v_x(t)$ su prikazani na slici 3.2.

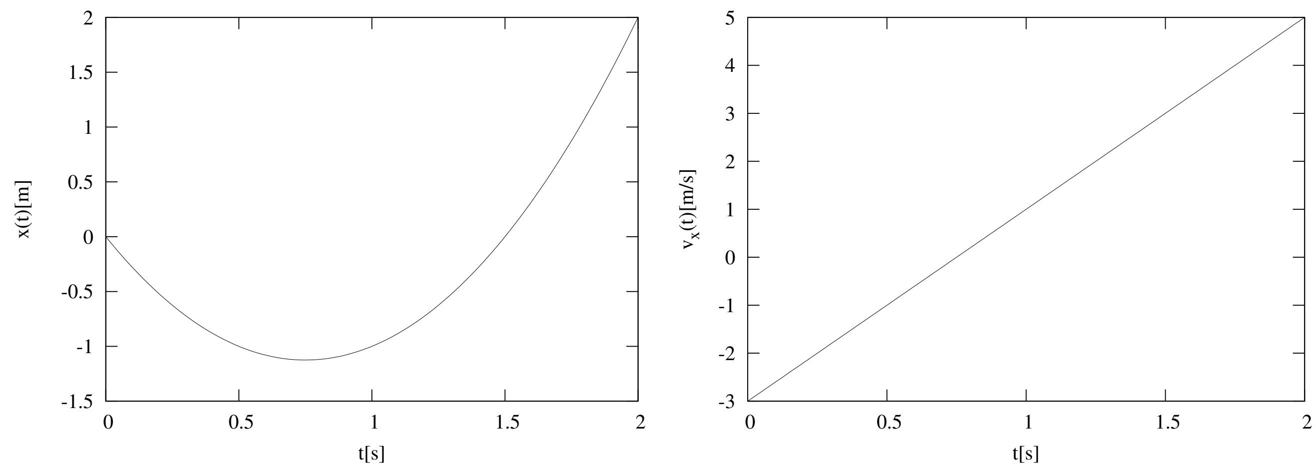
3.4 Više derivacije i ubrzanje

Definicija 3.7. Predpostavimo da je funkcija $f : R \to R$ diferencijabilna u svakoj točki nekog intervala koji sadrži točku t. Ako je derivacija f' diferencijabilna u točki t, onda kažemo da je f dva puta diferencijabilna u točki t i druga derivacija od f u točki t je dana s

$$f''(t) = \lim_{s \to t} \frac{f'(s) - f'(t)}{s - t}, \tag{3.33}$$

ili ekvivalentno

$$f''(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(t + h) - f'(t)}{h}. \tag{3.34}$$



(a) (b)

Slika 3.2: Položaj $x(t)$ i brzina $v_x(t)$ prema izrazima iz Primjera 3.10.

Ovim je definirana nova funkcija koju zovemo druga derivacija funkcije f i označavamo je f'' ili $\frac{d^2 f}{dt^2}$.
Ako je druga derivacija diferencijabilna, moguće je definirati treću derivaciju kao derivaciju druge derivacije. Tada je četvrta derivacija derivacija treće derivacije itd. Koristimo sljedeće notacije za treću derivaciju $f''' = \frac{d^3 f}{dt^3}$, a općenito za n-tu derivacije koristimo notacije $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dt^n}$.

Primjer 3.12. Odredite prvih pet derivacija funkcije $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 2x + 8$.
Rješenje.

$$f'(x) = -3x^2 + 4x - 2, \tag{3.35}$$
$$f''(x) = -6x + 4, \tag{3.36}$$
$$f'''(x) = -6, \tag{3.37}$$
$$f^4(x) = 0, \tag{3.38}$$
$$f^5(x) = 0. \tag{3.39}$$

Primjer 3.13. Odredite prvu i drugu derivaciju funkcije $x(t) = t \sin t$.
Rješenje.

$$x'(t) = \sin t + t \cos t, \tag{3.40}$$
$$x''(t) = 2 \cos t - t \sin t. \tag{3.41}$$

3.4.1 Ubrzanje u jednoj dimenziji

Definicija 3.8. Srednje ubrzanje čestice koja se giba u jednoj dimenziji je promjena trenutne brzine čestice podjeljena s odgovarajućim vremenskim intervalom Δt

$$a_{sr} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i}. \tag{3.42}$$

Definicija 3.9. Trenutno ubrzanje čestice koja se giba u jednoj dimenziji jednako je graničnoj vrijednosti srednjeg ubrzanja kad vremenski interval teži nuli.

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}. \tag{3.43}$$

Veličina Δv_x je razlika brzina u trenutku t i u nekom kasnijem trenutku $t + \Delta t$, tj. $\Delta v_x = v_x(t + \Delta t) - v_x(t)$. Tada je trenutno ubrzanje jednako

$$a_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}. \tag{3.44}$$

Vidimo da je trenutno ubrzanje jednako derivaciji po vremenu trenutne brzine. Simbolički

$$a_x(t) = v_x'(t) \tag{3.45}$$

ili

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}. \tag{3.46}$$

Također, ubrzanje je druga derivacija položaja po vremenu. Simbolički

$$a_x(t) = v_x'(t) = x''(t) \tag{3.47}$$

ili

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{3.48}$$

Primjer 3.14. Nađite (trenutnu) brzinu i ubrzanje čestice koja se giba u jednoj dimenziji prema $x(t) = -6t^3 + 4t$.
Rješenje.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -6(3t^2) + 4(1) = -18t^2 + 4, \tag{3.49}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -18(2t) + 0 = -36t. \tag{3.50}$$

3.5 Derivacije vektorskih funkcija

3.5.1 Granične vrijednosti i neprekidnost

Definicija 3.10. Granična vrijednost (limes) vektorske funkcije $\mathbf{r}$ kad se t približava a je vrijednost $\mathbf{L}$ kojoj se $\mathbf{r}(t)$ može proizvoljno približiti za svaku vrijednosti t dovoljno blizu, ali ne jednake a. Ovo se može zapisati

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}. \tag{3.51}$$

Definicija 3.11. Granična vrijednost funkcije $\mathbf{r}$ kad se t približava a je $\mathbf{L}$ znači da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji vrijednost $\delta > 0$ takva da ako t zadovoljava $0 < |t - a| < \delta$, tada $\mathbf{r}(t)$ zadovoljava $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}| < \varepsilon$. Pišemo

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}. \tag{3.52}$$

Ako ne postoji $\mathbf{L}$ za koji vrijedi gornji iskaz, kažemo da granična vrijednost funkcije $\mathbf{r}$ kad se t približava a ne postoji.

Teorem 3.5. Neka je $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ i $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$. Vrijedi

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L} \tag{3.53}$$

ako i samo ako

$$\lim_{t \to a} x(t) = L_x, \ \lim_{t \to a} y(t) = L_y, \ i \lim_{t \to a} z(t) = L_z. \tag{3.54}$$

Drugim riječima

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = (\lim_{t \to a} x(t), \lim_{t \to a} y(t), \lim_{t \to a} z(t)). \tag{3.55}$$

Neprekidnost vektorske funkcije definira se analogno onoj skalarne funkcije.
$\mathbf{r}$ je neprekidna u točki a ako je

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a). \tag{3.56}$$

3.5.2 Derivacije

Definicija 3.12. Vektorska funkcija $\mathbf{r} : R \to R^3$ je diferencijabilna u točki $t \in R$ ako postoji

$$\lim_{s \to t} \frac{\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(t)}{s - t}. \tag{3.57}$$

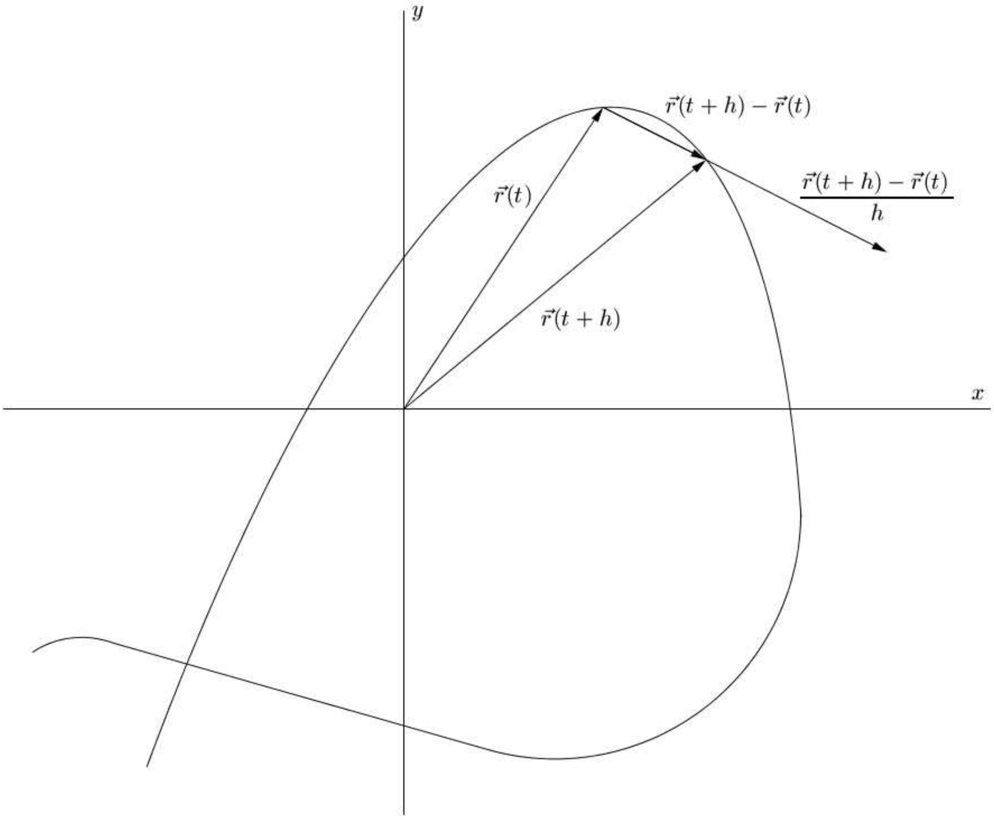
Ako je $\mathbf{r}$ diferencijabilna u točki t, ova granična vrijednost se naziva derivacija funkcije $\mathbf{r}$ u točki t i označava

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{s \to t} \frac{\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(t)}{s - t}. \tag{3.58}$$

Ovim izrazom definirane su vrijednosti funkcije $\mathbf{r}' : R \to R^3$.
Također, taj izraz možemo zapisati u obliku

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)}{h}. \tag{3.59}$$

Da bismo stekli uvid u geometrijski smisao derivacije vektorske funkcije promotrimo izlaznu krivulju na slici 3.3. Budući da prirast argumenta h kojim dijelimo prirast vektorske funkcije $\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)$ teži u nulu, kvocijent $[\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)]/h$ je većeg iznosa (naravno istog smjera) nego $\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)$. Ako granična vrijednost tog kvocijenta kad h teži nuli postoji, derivacija $\mathbf{r}'(t)$ će biti vektor konačnog iznosa u pravcu tangente na izlaznu krivulju i u smjeru napredovanja izlazne krivulje kako argument t raste (sl. 3.4).



Slika 3.3: Kvocijent prirasta vektorske funkcije i prirasta argumenta.

Koristeći Teorem 3.5. se lako pokaže da su komponente derivacije $\mathbf{r}'$ jednake derivacijama komponenti originalne funkcije $\mathbf{r}$, tj.

$$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)), \tag{3.60}$$

ili u preostalim notacijama

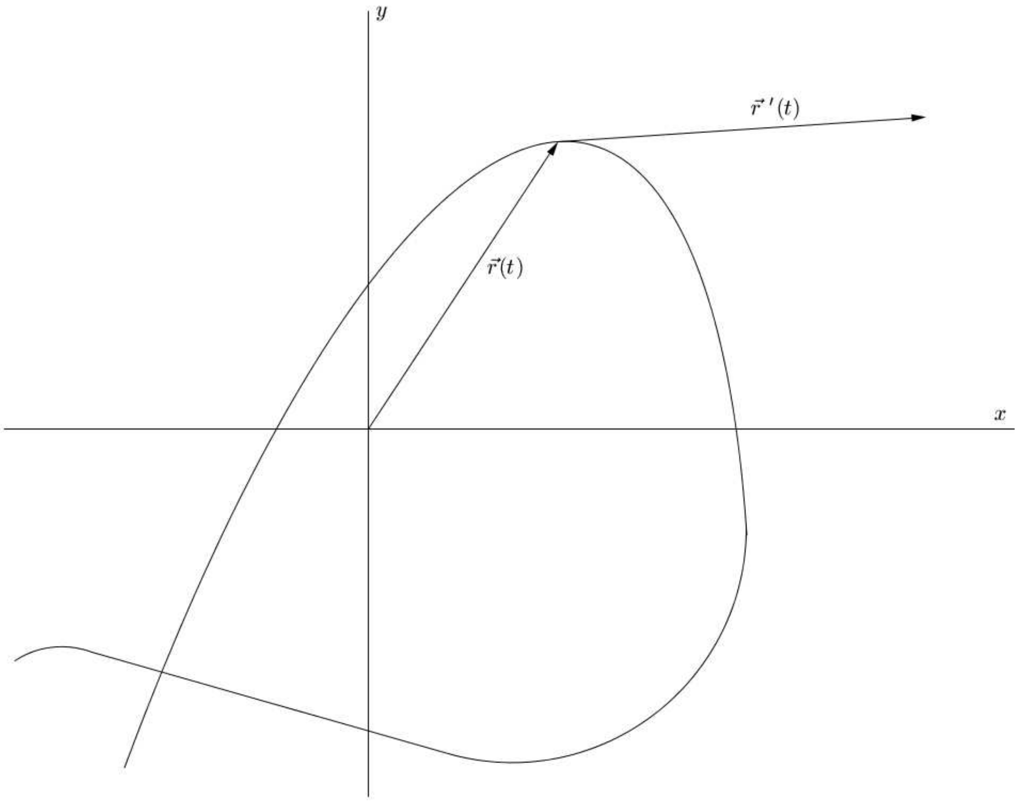
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}), \tag{3.61}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}. \tag{3.62}$$

Primjer 3.15. Odredite derivaciju funkcije $\mathbf{B}(y) = (y^2, -y^2, \cos y)$.
Rješenje.

$$\mathbf{B}'(y) = (2y, -2y, -\sin y). \tag{3.63}$$

Teorem 3.6. Ako su $f : R \to R$, $\mathbf{r} : R \to R^3$ i $\mathbf{p} : R \to R^3$ diferencijabilne u danoj točki t, vrijede sljedeća pravila:
1. $\frac{d}{dt}[c\mathbf{r}(t)] = c\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = c\mathbf{r}'(t)$, gdje je c proizvoljna konstanta,
2. $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) + \mathbf{p}(t)] = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{r}'(t) + \mathbf{p}'(t)$,
3. $\frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{r}(t)] = \frac{df(t)}{dt}\mathbf{r}(t) + f(t)\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = f'(t)\mathbf{r}(t) + f(t)\mathbf{r}'(t)$,
4. $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)\mathbf{p}(t)] = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\mathbf{p}(t) + \mathbf{r}(t)\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{r}'(t)\mathbf{p}(t) + \mathbf{r}(t)\mathbf{p}'(t)$,
5. $\frac{d}{dt}[\frac{\mathbf{r}(t)}{f(t)}] = \frac{\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}f(t) - \mathbf{r}(t)\frac{df(t)}{dt}}{[f(t)]^2} = \frac{\mathbf{r}'(t)f(t) - \mathbf{r}(t)f'(t)}{[f(t)]^2}$, $f(t) \neq 0$.



Slika 3.4: Derivacija vektorske funkcije u danoj točki.

3.5.3 Položaj, brzina i ubrzanje u dvije i tri dimenzije

Derivacije vektorskih funkcija primjenjuju se u kinematici u dimenzijama višim od jedne dimenzije. Koordinete (x, y, z) čestice u tri dimenzije u kartezijevom koordinatnom sustavu su tri komponente vektora pložaja

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \tag{3.64}$$

ili u notaciji preko jediničnih vektora

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}. \tag{3.65}$$

U jednoj dimenziji trenutna brzina je derivacija položaja x po vremenu. Jednako tako, u tri dimenzije, brzina ($\mathbf{v}$) je derivacija vektora položaja po vremenu

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}. \tag{3.66}$$

Tri komponente od $\mathbf{v}$ su derivacije x-,y-, i z- koordinate po vremenu

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt},\ v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{3.67}$$

Isto tako ubrzanje $\mathbf{a}$ je derivacija brzine po vremenu

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}. \tag{3.68}$$

Vidimo da je ubrzanje druga derivacija vektora položaja po vremenu

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}, \tag{3.69}$$

odnosno da su tri komponente ubrzanja jednake drugim derivacijama po vremenu odgovarajućih koordinata

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \frac{d^2y}{dt^2},\ a_z = \frac{d^2z}{dt^2}. \tag{3.70}$$

Primjer 3.16. Odredite brzinu i ubrzanje čestice koja se giba po $\mathbf{r}(t) = 6.0t\hat{\imath} + (25 - 4.9t^2)\hat{\jmath}$.

Rješenje.

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}(6.0t)\hat{\imath} + \frac{d}{dt}(25 - 4.9t^2)\hat{\jmath} = 6.0\hat{\imath} - 9.8t\hat{\jmath}, \tag{3.71}$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}(6.0)\hat{\imath} + \frac{d}{dt}(-9.8t)\hat{\jmath} = -9.8\hat{\jmath}. \tag{3.72}$$

Poglavlje 4

Određeni i neodređeni integrali

4.1 Određeni integrali

4.1.1 Određivanje pomaka iz brzine

Promatrat ćemo jednodimenzionalno gibanje (duž x-osi). U posebnom slučaju $v_x = konst.$ vrijedi da je pomak Δx za vrijeme vremenskog intervala Δt jednak

$$\Delta x = v_x \Delta t. \tag{4.1}$$

Drugi način pristupa problemu je gledati v-t graf (sl. 4.1). Prema izrazu (4.1) pomak je jednak $\Delta x = v_x \Delta t = v_x(t_f - t_i)$, što je također jednako povšini pravokutnika na slici 4.1 čije su stranice v_x i Δt. Stoga je za konstantnu brzinu pomak za vrijeme vremenskog intervala reprezentiran površinom ispod v-t grafa za taj vremenski interval.

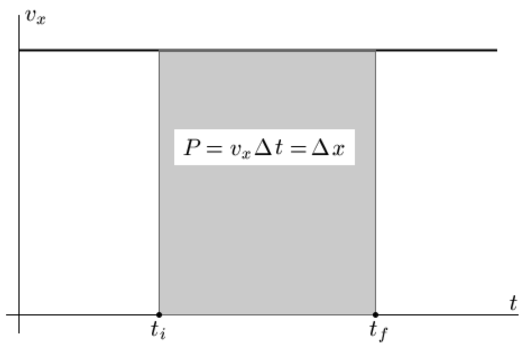
U drugom primjeru promotrimo brzinu koja raste linearno s vremenom (sl. 4.2). U ovom slučaju pomak možemo izračunati koristeći srednju brzinu. Budući da brzina raste linearno, srednja brzina je $v_{sr} = (v_{xi} + v_{xf})/2$. Koristeći definiciju srednje brzine dobijamo

$$\Delta x = v_{sr} \Delta t = \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})\Delta t, \tag{4.2}$$

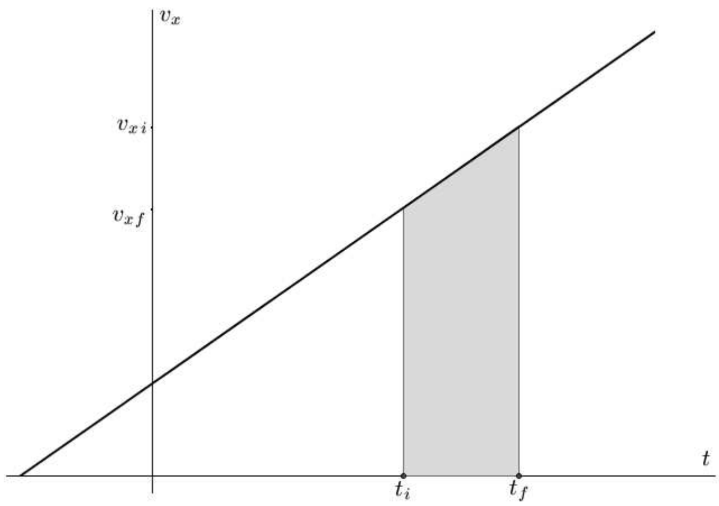
gdje je $\Delta t = t_f - t_i$. Primjetimo da je opet pomak Δx jednak površini ispod v-t grafa.

Primjer 4.1. Brzina čestice koja se giba jednodimenzionalno dana je funkcijom $v_x(t) = 2t$ (m/s). Nađite pomak za vrijeme između $t = 2.5$s i $t = 5.0$s.
Rješenje
$v_{xi} = 5m/s$, $v_{xf} = 10m/s$, $\Delta x = \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})\Delta t = 18.8m$.

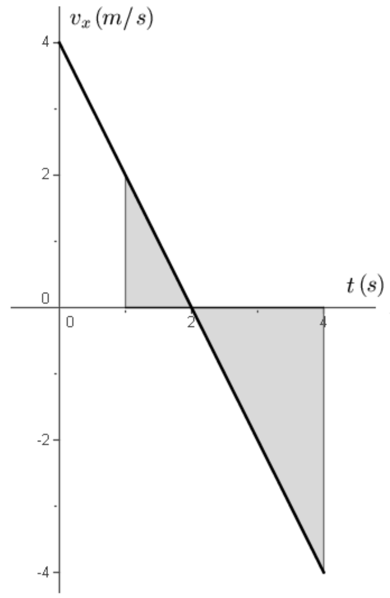
Primjer 4.2. Brzina čestice koja se giba jednodimenzionalno dana je funkcijom $v_x(t) = 4 - 2t$ (m/s). Nađite pomak za vrijeme između $t = 1.0$s i $t = 4.0$s.
Rješenje
$v_{xi} = 2.0m/s$, $v_{xf} = -4.0m/s$, $\Delta x = \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})\Delta t = -3.0m$.
Ovaj rezultat možemo promatrati kao zbroj pozitivne površine ispod v-t grafa (sl. 4.3) od $t = 1.0s$ do $t = 2.0s$ i negativne površine poviše v-t grafa od $t = 2.0s$ do $t = 4.0s$: $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 1.0m + (-4.0m) = -3.0m$.



Slika 4.1: v-t graf za konstantnu brzinu.



Slika 4.2: v-t graf za brzinu koja linearno raste s vremenom.



Slika 4.3: Brzina $v_x(t) = 4 - 2t$.

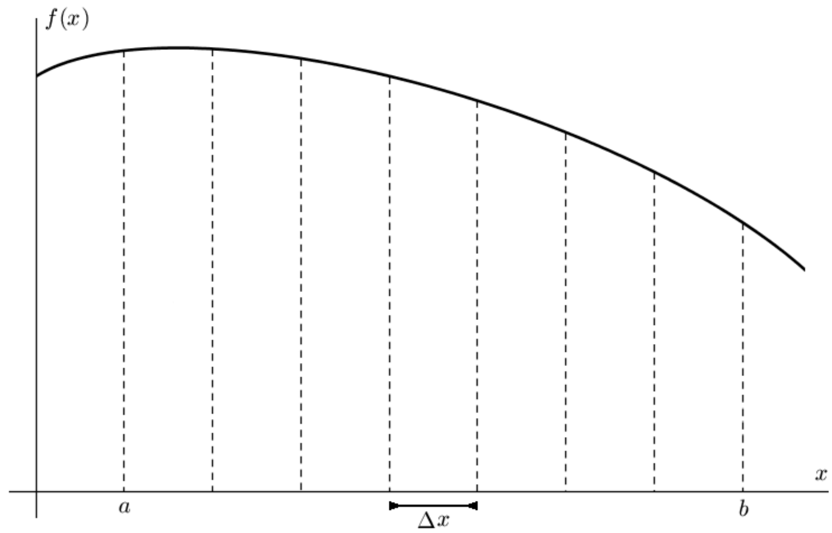
4.1.2 Riemannova suma i određeni integral

Promotrimo proizvoljnu skalarnu funkciju f prikazanu na slici 4.4. Želimo odrediti površinu omeđenu grafom te funkcije i x-osi,te vrijednostima a i b na na x-osi (sl. 4.4). Podijelit ćemo interval $[a, b]$ na male podintervale duljine Δx. Za svaki podinterval površinu ispod grafa aproksimirat ćemo površinom pravokutnika. Suma dobivena zbrajanjem površina pravokutnika za sve podintervale naziva se Riemannova suma. Riemannova suma aproksimira površinu ispod grafa od f. Koristit ćemo njenu graničnu vrijednost da odredimo točnu površinu.
Pogodno je podijeliti interval $[a, b]$ na n jednakih podintervala. Njihova duljina je tada

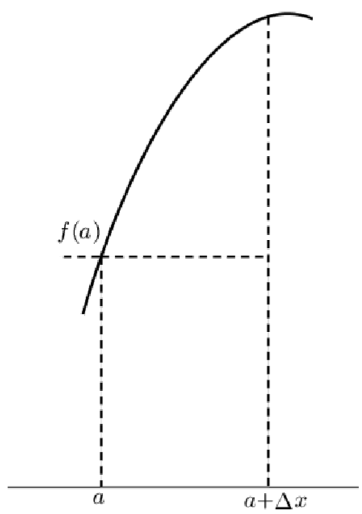
$$\Delta x = \frac{b-a}{n}. \tag{4.3}$$

Navest ćemo tri načina kako izabrati pravokutnik kojim aproksimiramo površinu ispod grafa od f za mali Δx (sl. 4.5). Prvi način je da uzmemo pravokutnik čija je baza Δx, a visina mu je jednaka vrijednosti funkcije na lijevoj granici podintervala $f(a)$ (sl. 4.6 a)). Površina ovog pravokutnika je $f(a)\Delta x$. Drugi način je da uzmemo pravokutnik čija je baza Δx, a visina mu je jednaka vrijednosti funkcije na desnoj granici podintervala $f(a+\Delta x)$ (sl. 4.6 b)). Površina ovog pravokutnika je $f(a+\Delta x)\Delta x$. Konačno, treći način je da uzmemo pravokutnik čija je baza Δx, a visina mu je jednaka vrijednosti funkcije na sredini podintervala $f(a + \Delta x/2)$ (sl. 4.6 c)). Površina ovog pravokutnika je $f(a + \Delta x/2)\Delta x$.
Riemannova suma se dobiva zbrajanjem aproksimativnih površina za izbranu metodu.

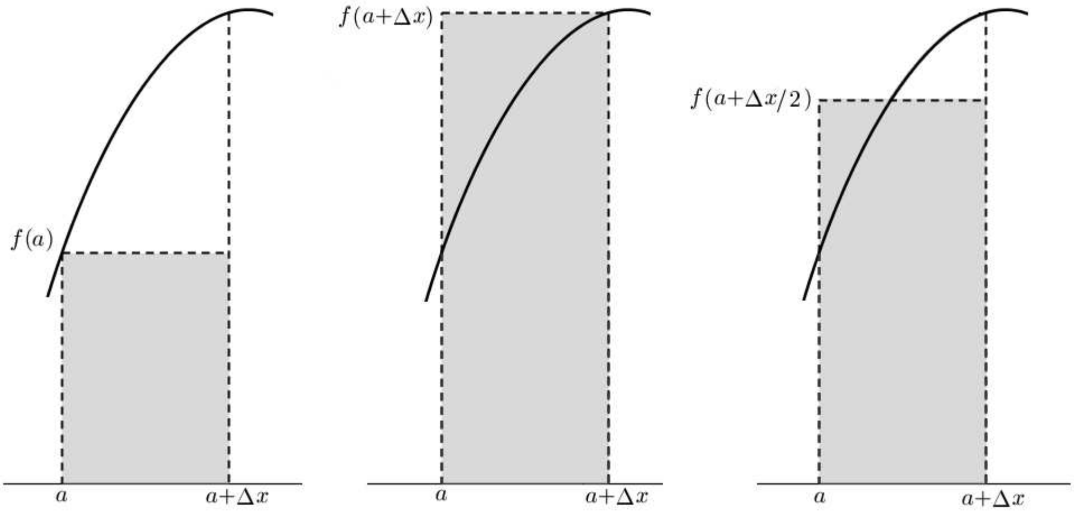
Primjer 4.3. Uzimajući vrijednosti funkcije na lijevim granicama pet podintervala odredite Riemannovu sumu za $f(x) = x^2$ na intervalu $[1, 2]$.
Rješenje.
Svaki podinterval će biti duljine $\Delta x = 0.2$, te imamo



Slika 4.4: Graf proizvoljne funkcije $f(x)$. Interval je podijeljen na podintervale duljine Δx.



Slika 4.5: Pravokutnik kojim aproksimiramo površinu ispod grafa funkcije.



(a) (b) (c)

Slika 4.6: Različiti načini aproksimiranja površine ispod grafa funkcije.

$$\begin{aligned}\sum &= 0.2f(1.0) + 0.2f(1.2) + 0.2f(1.4) + 0.2f(1.6) + 0.2f(1.8)\\ &= 0.2(1.0 + 1.44 + 1.96 + 2.56 + 3.24) = 2.04\end{aligned} \tag{4.4}$$

Primjer 4.4. Uzimajući vrijednosti funkcije na desnim granicama pet podintervala odredite Riemannovu sumu za $f(x) = x^2$ na intervalu $[1, 2]$.
Rješenje.
Svaki podinterval će biti duljine $\Delta x = 0.2$, te imamo

$$\begin{aligned}\sum &= 0.2f(1.2) + 0.2f(1.4) + 0.2f(1.6) + 0.2f(1.8) + 0.2f(2.0)\\ &= 0.2(1.44 + 1.96 + 2.56 + 3.24 + 4.0) = 2.64\end{aligned} \tag{4.5}$$

Primjećujemo da je pravi iznos površine ispod grafa krivulje na danom intervalu u prethodna dva primjera između rezultata 2.04 i 2.64. To nas vodi na sljedeće definicije.

Definicija 4.1. Donja Riemannova suma L_n je Riemannova suma u kojoj se za svaki podinterval uzima najmanja moguća vrijednost funkcije na tom podintervalu za visinu pravokutnika kojim aproksimiramo površinu ispod grafa krivulje na tom podintervalu.

Definicija 4.2. Gornja Riemannova suma U_n je Riemannova suma u kojoj se za svaki podinterval uzima najveća moguća vrijednost funkcije na tom podintervalu za visinu pravokutnika kojim aproksimiramo površinu ispod grafa krivulje na tom podintervalu.

U primjerima 4.3 i 4.4 izračunali smo donju i gornju Riemannovu sumu. Indeks n označava broj podintervala budući da vrijednosti donje i gornje Riemannove sume ovise o broju podintervala.
Kako povećavamo broj podintervala u tim primjerima Riemannova suma se približava

vrijednosti $7/3 \approx 2.333$. Upravo graničnu vrijednost definiramo kao određeni integral funkcije f. Naravno, ako ta granična vrijednost postoji.

Definicija 4.3. Funkcija $f : [a,b] \to R$ je integrabilna ako granične vrijednosti Riemannovih suma postoje i ako su jednake. Odnosno, ako za svaki izbor argumenata x_i u i-tom podintervalu, $i = 1, 2, ..., n$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \tag{4.6}$$

postoji i svi su jednaki. Ako je f integrabilna, određeni integral od f od a do b jednak je toj graničnoj vrijednosti i označava se $\int_a^b f(x)dx$. Odnosno,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \tag{4.7}$$

U određenom integralu, $f(x)$ se naziva integrand. Parametri a i b su granice integracije.

4.1.3 Svojstva određenih integrala

Teorem 4.1. Ako je $f : [a,b] \to R$ integrabilna i c je u intervalu $[a,b]$, onda vrijedi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{4.8}$$

Teorem 4.2. Ako je $f : [a,b] \to R$ integrabilna, onda vrijedi

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \tag{4.9}$$

Teorem 4.3. Neka su $f : [a,b] \to R$ i $g : [a,b] \to R$ integrabilne. Ako je $f(x) \leq g(x)$ za svaki x iz $[a,b]$, onda vrijedi

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \tag{4.10}$$

Teorem 4.3. Neka su $f : [a,b] \to R$ i $g : [a,b] \to R$ integrabilne. Neka je c realan broj. Tada vrijedi

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \tag{4.11}$$

i

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \tag{4.12}$$

Vidjeli smo ranije da površina ispod v-t grafa na vremenskom intervalu $[t_i, t_f]$ daje pomak čestice za vrijeme tog intervala. Stoga je pomak određeni integral brzine od t_i do t_f

$$\Delta x = \int_{t_i}^{t_f} v_x(t)dt. \tag{4.13}$$

4.2 Primitivna funkcija i neodređeni integral

Sada ćemo promotriti problem traženja skalarne funkcije $f : R \to R$ čija je derivacija f' poznata. Ovo je problem traženja primitivne funkcije.

Definicija 4.4 Funkcija f je primitivna funkcija funkcije g na intervalu $[a, b]$ ako $f'(x) = g(x)$ za svaki x iz $[a, b]$.

Primitivnu funkciju od g označavamo

$$\int g(x)dx. \tag{4.14}$$

Npr.

$$\int \cos x dx = \sin x \tag{4.15}$$

i često je zovemo neodređeni integral. Izraz neodređeni integral koristimo i za skup svih mogućih primitivnih funkcija (koje se razlikuju do na aditivnu konstantu). Npr.

$$\int \cos x dx = \sin x + c, \tag{4.16}$$

$$\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1) + c. \tag{4.17}$$

Primjer 4.5. Nađite neodređeni integral od $g(x) = 3x^2 - 4x + 7$.
Rješenje.

$$\begin{aligned} \int (3x^2 - 4x + 7)dx = \int 3x^2 dx - \int 4x dx + \int 7 dx = 3 \int x^2 - 4 \int x dx + 7 \int dx \\ = 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 7x + c = x^3 - 2x^2 + 7x + c. \end{aligned} \tag{4.18}$$

U skladu s Definicijom 4.4. rješenje provjeravamo tako da deriviramo dobiveni rezultat. Ako smo dobro radili moramo dobiti integrand $g(x)$. U danom primjeru je $f(x) = \int g(x)dx = x^3 - 2x^2 + 7x + c$, te je $f'(x) = 3x^2 - 4x + 7 = g(x)$ kao što smo i tražili.

Kao što sljedeći primjer pokazuje, možemo od svih primitivnih funkcija tražiti i neku posebnu koja ima određenu vrijednost $f(a)$ za dani argument a.

Primjer 4.6. Nađite primitivnu funkciju $f(x)$ od $g(x) = 2x$ koja zadovoljava $f(0) = 1$.
Rješenje.
Neodređeni integral je

$$\int 2x dx = 2 \int x dx = x^2 + c. \tag{4.19}$$

Vidimo da je skup primitivnih funkcija $f(x) = x^2 + c$. Iz uvjeta $f(0) = 1$ slijedi $1 = c$, pa je tražena primitivana funkcija $f(x) = x^2 + 1$.

Prijeđimo sada na primjenu neodrednih integrala u fizici. Znamo da je brzina derivacija položaja po vremenu. U jenoj dimenziji to simbolički zapisujemo $v_x = dx/dt$. Budući da je brzina derivacija položaja, položaj $x(t)$ je primitivna funkcija brzine $v_x(t)$. Možemo zapisati

$$\int v_x(t)dt = x(t) + c, \tag{4.20}$$

odnosno

$$x(t) = \int v_x(t)dt + c. \tag{4.21}$$

Uzimanjem određene vrijednosti od c biramo određenu primitivnu funkciju $x(t)$ od mnogih mogućih.

Primjer 4.7. Čestica se giba u jednoj dimenziji brzinom $v_x = 5.0 - 9.8t$ i prolazi položejem $x = 3.5$ u trenutku $t = 0$. Nađite položaj čestice kao funkciju vremena.
Rješenje.

$$\int v_x dt = \int (5.0 - 9.8t)dt = 5.0 \int dt - 9.8 \int tdt = 5.0t - 9.8t^2/2 = 5.0t - 4.9t^2, \tag{4.22}$$

$$x(t) = 5.0t - 4.9t^2 + c, \tag{4.23}$$

$$x(0) = 3.5 = 5.0(0) - 4.9(0)^2 + c = c, \tag{4.24}$$

pa je $c = 3.5$ i položaj kao funkcija vremena

$$x(t) = 3.5 + 5.0t - 4.9t^2 \tag{4.25}$$

4.3 Osnovni teoremi integralnog računa

4.3.1 Prvi osnovni teorem integralnog računa

Teorem 4.4. Ako je $f : [a, b] \to R$ neprekidna na intervalu $[a, b]$, tada je funkcija $A : [a, b] \to R$ definirana pravilom

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{4.26}$$

primitivna funkcija od f. Odnosno, vrijedi $A'(x) = f(x)$ za svaki $x \in [a, b]$.

Primjer 4.8. Za funkciju $f(t) = 2t$ i $a = 1$ odredite funkciju $A(x)$ iz izraza (4.26).
Rješenje.
Lik ispod grafa funkcije f na intervalu $[a, x]$ je trapez čija je osnovica duljine $x - 1$, a visine stranica su $f(1) = 2$ i $f(x) = 2x$. Kako je površina trapeza jednaka $(baza)(h_1 + h_2)/2$ vrijedi

$$A(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(2 + 2x) = (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1. \tag{4.27}$$

Primjer 4.9. Pokažite da uvjeti prvog osnovnog teorema integralnog računa vrijede u prethodnom primjeru.
Rješenje.
Uzimajući derivaciju $A'(x) = 2x = f(x)$ dobivamo da prvi osnovni teorem integralnog računa daje dobar rezultat.

Primjer 4.10. Pomoću prvog osnovnog teorema integralnog računa izrazite primitivnu funkciju od $(\sin x)^2$.
Rješenje.
Po prvom osnovnom teoremu integralnog računa funkcija

$$A(x) = \int_a^x (\sin t)^2 dt \tag{4.28}$$

je primitivna funkcija funkcije $f(x) = (\sin x)^2$, gdje je a konstanta. Primjetimo da različite primitivne funkcije odgovaraju različitim izborima konstante a.

Primjer 4.11. U prethodnom primjeru nađite određenu primitivnu funkciju od $(\sin x)^2$ koja ima vrijednost 0 kad je $x = \pi$. Odnosno, nađite takav A da je $A(\pi) = 0$.
Rješenje.

$$A(\pi) = \int_a^\pi (\sin t)^2 dt = 0. \tag{4.29}$$

$$A(x) = \int_\pi^x (\sin t)^2 dt. \tag{4.30}$$

4.3.2 Drugi osnovni teorem integralnog računa

Teorem 4.5. Ako je $f : [a, b] \to R$ neprekidna na intervalu $[a, b]$ i funkcija $F : [a, b] \to R$ primitivna funkcija od f, tada je

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx. \tag{4.31}$$

Primjer 4.12. Izračunajte vrijednost određenog integrala

$$\int_1^2 x^2 dx \tag{4.32}$$

koristeći drugi osnovni teorem integralnog računa.
Rješenje.
Znamo da je primitivna funkcija od x^2 $g(x) = x^3/3$. Koristeći drugi osnovni teorem integralnog računa dobivamo

$$\int_1^2 x^2 dx = g(2) - g(1) = 8/3 - 1/3 = 7/3. \tag{4.33}$$

Kad koristimo drugi osnovni teorem integralnog računa za računanje određenih integrala, pomaže pisati međukorak u kojem se vidi neodređeni integral s granicama integracije. Oznaka je vertikalna crta s desne strane neodređenog integrala s donjom i gornjom granicom integracije napisanom na dnu i vrhu te crte. Tako bi u prethodnom primjeru pisali

$$\int_1^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = 8/3 - 1/3 = 7/3. \tag{4.34}$$

4.4 Primjena u kinematici - jedna dimenzija

Možemo rasvijetliti vezu između određenih integrala i primitivnih funkcija gledajući njihov odnos u kinematici. Vidjeli smo da je pomak određeni integral brzine, a položaj primitivna funkcija brzine. Slijedeći prvi osnovni teorem integralnog računa definirajmo funkciju pomaka na sljedeći način:

$$D(t) = \int_{t_0}^t v_x d\tau. \tag{4.35}$$

U početnom trenutku t_0 čestica je bila na položaju x_0, tako da $D(t)$ mjeri pomak čestice od t_0 do t. Pomak je tada $x - x_0$, gdje je x položaj čestice u trenutku t. Simbolički,

$$D(t) = x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v_x d\tau. \tag{4.36}$$

Položaj je s druge strane primitivna funkcija brzine

$$x = \int v_x dt + c. \tag{4.37}$$

Položaj x je isti u izrazima (4.36) i (4.37). Primjenjujući prvi osnovni teorem integralnog računa, derivacija lijeve strane u izrazu (4.36) je $(x - x_0)' = x'$, jer je x_0 konstantno. Stoga je $v_x = x'$. Budući da je brzina derivacija položaja, položaj je primitivna funkcija brzine, što izraz (4.37) i kaže. Dakle, određeni integral i primitivna funkcija daju ekvivalentne informacije o gibanju čestice.

Primjer 4.13. Brzina čestice u jednoj dimenziji je dana funkcijom $v_x = 2t$. Položaj čestice u trenutku $t = 3s$ je $x = 10m$. Nađite položaj čestice kao funkciju vremena (a) koristeći određeni integral, (b) koristeći neodređeni integral.
Rješenje.
(a) Po izrazu (4.36)

$$x - x_0 = \int_3^t v_x d\tau = \int_3^t (2t) d\tau = \tau^2 \Big|_3^t = t^2 - 9. \tag{4.38}$$

Koristeći uvjet $x = 10m$ u $t = 3s$ dobivamo

$$10 - x_0 = 3^3 - 9 = 0, \tag{4.39}$$

te je $x_0 = 10m$ i

$$x = t^2 + 1. \tag{4.40}$$

(b) Po izrazu (4.37)

$$x = \int v_x dt + c = \int (2t) dt = t^2 + c. \tag{4.41}$$

Koristimo početni uvjet $x = 10m$ u $t = 3s$ da nađemo c

$$10 = 3^2 + c. \tag{4.42}$$

Stoga je $c = 1$ i konačni rezultat

$$x = t^2 + 1. \tag{4.43}$$

4.4.1 Određeni integrali

Kao što smo već vidjeli pomak čestice koja se giba u jednoj dimenziji za vrijeme intervala $[t_i, t_f]$ može se izračunati pomoću određenog integrala

$$\Delta x = \int_{t_i}^{t_f} v_x(t) dt. \tag{4.44}$$

uz uvjet da je v_x poznata funkcija vremena. Drugi osnovni teorem integralnog računa omogućava nam da odredimo pomake za različite moguće funkcije brzine.

Primjer 4.14. Brzina čestice u jednoj dimenziji je dana funkcijom $v_x(t) = -2+3t+t^2-6t^3[m/s]$. Nađite pomak čestice od $t = 3.5s$ do $t = 6.9s$.
Rješenje.

$$\Delta x = \int_{t_i}^{t_f} v_x(t)dt = \int_{3.5}^{6.9}(-2+3t+t^2-6t^3)dt = (-2t+\frac{3}{2}t^2+\frac{t^3}{3}-\frac{3}{2}t^4)\Big|_{3.5}^{6.9} = -3033.5m. \quad (4.45)$$

Primjer 4.15. Brzina čestice u jednoj dimenziji je dana funkcijom $v_x(t) = 3e^{-t}+2\cos t[m/s]$. Nađite pomak čestice od $t = 1.0s$ do $t = 1.5s$.
Rješenje.

$$\begin{aligned}\Delta x &= \int_{t_i}^{t_f} v_x(t)dt = \int_{1.0}^{1.5}(3e^{-t}+2\cos t)dt = \int_{1.0}^{1.5}3e^{-t}dt + 2\int_{1.0}^{1.5}\cos t dt \\ &= -3e^{-t}\Big|_{1.0}^{1.5} + 2\sin t\Big|_{1.0}^{1.5} = -3e^{-1.5}+3e^{-1}+2\sin 1.5 - 2\sin 1. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Pomaci u $y-$ ili $z-$ smjeru su

$$\Delta y = \int_{t_i}^{t_f} v_y(t)dt \quad \Delta z = \int_{t_i}^{t_f} v_z(t)dt, \quad (4.47)$$

gdje su pripadne brzine $v_y = y'(t)$ i $v_z = z'(t)$.

Primjer 4.16. Brzina čestice koja se giba duž $y-$ osi je dana funkcijom $v_y(t) = 15.5 - 9.8t[m/s]$. Nađite pomak čestice (a) od $t = 0s$ do $t = 0.5s$, i (b) od $t = 0.5s$ do $t = 1.5s$.
Rješenje.
(a)

$$\Delta y = \int_{t_i}^{t_f} v_y(t)dt = \int_{0}^{0.5}(15.5-9.8t)dt = (15.5t-4.9t^2)\Big|_{0}^{0.5} = 6.5m \quad (4.48)$$

(b)

$$\Delta y = (15.5t-4.9t^2)\Big|_{0.5}^{1.5} = 5.7m. \quad (4.49)$$

Ubrzanje je povezano s brzinom na isti način kao što je brzina povezana s položajem. Naime, brzina je derivacija položaja po vremenu, a ubrzanje je derivacija brzine po vremenu. Jednako tako, budući da je pomak određeni integral brzine u vremenu, promjena brzine je određeni integral ubrzanja u vremenu. Simbolički, za gibanje duž $x-$, $y-$ i $z-$ osi:

$$\Delta v_x = \int_{t_i}^{t_f} a_x(t)dt \quad \Delta v_y = \int_{t_i}^{t_f} a_y(t)dt \quad \Delta v_z = \int_{t_i}^{t_f} a_z(t)dt. \quad (4.50)$$

Primjer 4.17. Uzmimo brzinu $v_y(t) = 15.5 - 9.8t[m/s]$ danu u prethodnom primjeru. (a) Nađite ubrzanje čestice (b)Koristite određeni integral ubrzanja u vremenu da nađete promjenu brzine od $t = 0s$ do $t = 0.5s$, i (c) Koristeći izvornu funkciju brzine, nađite brzine u $t = 0s$ i u $t = 0.5s$ i tako provjerite rezultat dobiven pod (b).

Rješenje.
(a)

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -9.8 \tag{4.51}$$

(b)

$$\Delta v_y = \int_{t_i}^{t_f} a_y(t)dt = \int_0^{0.5} (-9.8)dt = -9.8t\Big|_0^{0.5} = -4.9m/s. \tag{4.52}$$

(c) U $t = 0s$ je $v_y = 15.5m/s$, a u $t = 0.5s$ $v_y = 10.6m/s$. Tada je $\Delta v_y = -4.9m/s$ što je u skladu s rješenjem pod (b).

4.4.2 Primitivne funkcije

Budući da je brzina derivacija položaja, položaj je primitivna funkcija brzine

$$x(t) = \int v_x dt + c, \tag{4.53}$$

gdje je c konstanta koja ovisi o vrijednosti funkcije $x(t)$ za neki posebni argument t. Za jednodimenzionalno gibanje u $y-$ ili $z-$ smjeru vrijede ekvivalentni izrazi

$$y(t) = \int v_y dt + c,\ z(t) = \int v_z dt + c. \tag{4.54}$$

Budući da je ubrzanje derivacija brzine, brzina je primitivna funkcija ubrzanja

$$v_x(t) = \int a_x dt + c,\ v_y(t) = \int a_y dt + c,\ v_z(t) = \int a_z dt + c. \tag{4.55}$$

Primjer 4.18. Čestica se giba duž $z-$ osi ubrzanjem $a_z = 2t[m/s^2]$. U trenutku $t = 1.0s$ brzina čestice je $v_z = 2.5m/s$, a u trenutku $t = 3.0s$ njen je položaj $z = 24.0m$. Nađite brzinu i položaj kao funkcije vremena. Provjerite rezultat računajući derivaciju dobivenog položaja po vremenu da dobijete brzinu i računajući derivaciju brzine po vremenu da dobijete ubrzanje.
Rješenje.

$$v_z(t) = \int a_z dt + c = \int 2t dt + c = t^2 + c. \tag{4.56}$$

Kako je $v_z(1.0s) = 2.5m/s$ vrijedi

$$v_z(1.0s) = 2.5m/s = 1.0 + c \tag{4.57}$$

pa je $c = 1.5$, te je

$$v_z(t) = t^2 + 1.5. \tag{4.58}$$

Položaj je

$$z(t) = \int v_z dt + c = \int (t^2 + 1.5)dt + c = \frac{t^3}{3} + 1.5t + c. \tag{4.59}$$

Da nađemo c koristimo $z(3.0s) = 24.0m$:

$$z(3.0s) = 24.0m = \frac{3.0^3}{3} + 1.5(3.0) + c \tag{4.60}$$

pa je $c = 10.5$, a položaj

$$z(t) = \frac{t^3}{3} + 1.5t + 10.5. \tag{4.61}$$

Za provjeru uzimamo $z'(t) = t^2 + 1.5 = v_z(t)$, kao što se i zahtjevalo, a i isto tako i $v_z'(t) = 2t = a_z(t)$ kao što se i zahtjevalo.

4.5 Primjena u kinematici - dvije i tri dimenzije

4.5.1 Određeni integrali

Naučili smo već da se derivacija vektorske funkcije može naći računajući derivacije svake njene komponente. Za vektor položaja $\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$ derivacija je

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\hat{\imath} + y'(t)\hat{\jmath} + z'(t)\hat{k}. \tag{4.62}$$

Određeni integrali se također mogu odrediti komponentu po komponentu. Za vektorsku funkciju brzine $\mathbf{v} = v_x(t)\hat{\imath} + v_y(t)\hat{\jmath} + v_z(t)\hat{k}$ određeni integral na intervalu $[t_i, t_f]$ je

$$\int_{t_i}^{t_f} \mathbf{v}(t)dt = \left[\int_{t_i}^{t_f} v_x(t)dt\right]\hat{\imath} + \left[\int_{t_i}^{t_f} v_y(t)dt\right]\hat{\jmath} + \left[\int_{t_i}^{t_f} v_z(t)dt\right]\hat{k}. \tag{4.63}$$

Izraze u uglatim zagradama prepoznajemo kao jednodimenzionalne pomake Δx, Δy iΔz:

$$\int_{t_i}^{t_f} \mathbf{v}(t)dt = \Delta x\hat{\imath} + \Delta y\hat{\jmath} + \Delta z\hat{k}. \tag{4.64}$$

Vektor s desne strane je upravo vektor pomaka $\Delta\mathbf{r}$. Stoga je vektor pomaka određeni integral vektora brzine u vremenu

$$\Delta\mathbf{r} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{v}(t)dt. \tag{4.65}$$

Analogno ovome dolazimo do zaključka da je promjena brzine određeni integral ubrzanja u vremenu

$$\Delta\mathbf{v} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{a}(t)dt. \tag{4.66}$$

Primjer 4.19. Dana je brzina $\mathbf{v} = (\cos t)\hat{\imath} - (\sin t)\hat{\jmath}$ (u m/s za vrijeme u s). Nađite pomak od $t = 0$ do $t = 2.0s$.
Rješenje.

$$\Delta\mathbf{r} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{v}(t)dt = \int_0^{2.0} (\cos t\hat{\imath} - \sin t\hat{\jmath})dt = \left[\int_0^{2.0} \cos t dt\right]\hat{\imath} - \left[\int_0^{2.0} \sin t dt\right]\hat{\jmath}. \tag{4.67}$$

Određeni integrali mogu se izračunati pomoću drugog osnovnog teorema integralnog računa

$$\Delta\mathbf{r} = \sin t\Big|_0^{2.0} - (-\cos t)\Big|_0^{2.0} = \sin 2.0\hat{\imath} + (\cos 2.0 - 1)\hat{\jmath}. \tag{4.68}$$

4.5.2 Primitivne funkcije

Primitivne funkcije se također mogu odrediti komponentu po komponentu. Primitivna funkcija vektora brzine $\mathbf{v} = v_x(t)\hat{\imath} + v_y(t)\hat{\jmath} + v_z(t)\hat{k}$ je

$$\int \mathbf{v}(t)dt = \left[\int v_x(t)dt\right]\hat{\imath} + \left[\int v_y(t)dt\right]\hat{\jmath} + \left[\int v_z(t)dt\right]\hat{k}. \tag{4.69}$$

Koristeći jednodimenzionalne rezultate

$$\int \mathbf{v}(t)dt = (x - c_1)\hat{\imath} + (y - c_2)\hat{\jmath} + (z - c_3)\hat{k}, \tag{4.70}$$

gdje su c_1, c_2 i c_3 konstante, odnosno

$$x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} = \int \mathbf{v}(t)dt + c_1\hat{\imath} + c_2\hat{\jmath} + c_3\hat{k}. \tag{4.71}$$

Lijeva strana izraza je vektor položaja $\mathbf{r}$. Označavajući $\mathbf{c} = c_1\hat{\imath} + c_2\hat{\jmath} + c_3\hat{k}$ dobivamo

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t)dt + \mathbf{c}. \tag{4.72}$$

Kao što smo i očekivali vektor položaja u tri dimenzije je primitivna funkcija vektora brzine. Analogno je vektor brzine primitivna funkcija vektora ubrzanja

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)dt + \mathbf{c}, \tag{4.73}$$

gdje je $\mathbf{c}$ neka druga konstanta.

Primjer 4.20. Dana je brzina $\mathbf{v} = (\cos t)\hat{\imath} - (\sin t)\hat{\jmath}$ (u m/s za vrijeme u s). Nađite položaj kao funkciju vremena ako je u $t = 0$ položaj $\mathbf{r} = 2.0\hat{\jmath}m$.
Rješenje.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \int \mathbf{v}(t)dt + \mathbf{c} = \int (\cos t\hat{\imath} - \sin t\hat{\jmath})dt + \mathbf{c} \\ &= (\int \cos t dt)\hat{\imath} - (\int \sin t dt)\hat{\jmath} + \mathbf{c} = \sin t\hat{\imath} + \cos t\hat{\jmath} + \mathbf{c}.\end{aligned} \tag{4.74}$$

Konstantu $\mathbf{c}$ računamo iz uvjeta da je u $t = 0$ položaj $\mathbf{r} = 2.0\hat{\jmath}m$:

$$\mathbf{r}(0) = 2.0\hat{\jmath} = \sin 0\hat{\imath} + \cos 0\hat{\jmath} + \mathbf{c} = 1.0\hat{\jmath} + \mathbf{c} \tag{4.75}$$

pa je $\mathbf{c} = 1.0\hat{\jmath}$, a konačno rješenje

$$\mathbf{r}(t) = \sin t\hat{\imath} + \cos t\hat{\jmath} + 1.0\hat{\jmath} \tag{4.76}$$

Poglavlje 5

Newtonovi zakoni

5.1 Newtonovi zakoni

5.1.1 Newtonovi zakoni

Prvi Newtonov zakon: Tijelo ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu ako na njega ne djeluje sila.

Drugi Newtonov zakon: Ukupna sila na tijelo proporcionalna je njegovom ubrzanju

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{5.1}$$

gdje je m masa tijela.

Treći Newtonov zakon: Kad dva tijela (A i B) međudjeluju, sila $\vec{F}_{AB}$ kojom tijelo B djeluje na tijelo A je jednaka po iznosu ali suprotnoga smjera od sile $\vec{F}_{BA}$ kojom tijelo A djeluje na tijelo B

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}. \tag{5.2}$$

5.1.2 Primjena Newtonovih zakona

Primjer 5.1. Knjiga mase 2.86kg miruje na horizontalnoj površini stola. Nađite kojom silom djeluje stol na knjigu.
Rješenje.
Budući da knjiga miruje na stolu ukupna sila na nju je nula (prvi Newtonov zakon). Ukupna sila je zbroj gravitacije i sile kojom stol djeluje na knjigu $\mathbf{F} = \mathbf{F_g} + \mathbf{F_N}$. Stoga je $\mathbf{F_N} = -\mathbf{F_g} = -m\mathbf{g}$. Uzimajući pozitivnu y-os po pravcu okomitom na stol i usmjerenu prema gore

$$\mathbf{F_N} = -m\mathbf{g} = -m(-g\hat{\jmath}) = mg\hat{\jmath} = (2.86kg)(9.80m/s^2)\hat{\jmath} = 28.0N\hat{\jmath}. \tag{5.3}$$

Primjer 5.2. Disk mase 0.155kg kliže se po horizontalnom ledu duž x-osi. Zbog trenja disk ima konstantno ubrzanje $\mathbf{a} = -1.23m/s^2\hat{\imath}$. Nađite silu trenja i silu kojom podloga djeluje na disk.
Rješenje.

Drugi Newtonov zakon kaže nam da je ukupna sila horizontalna. Stoga je suma vertikalnih komponenti sile nula, tj.

$$\mathbf{F_g} + \mathbf{F_N} = 0, \tag{5.4}$$

te je

$$\mathbf{F_N} = -m\mathbf{g} = -m(-g\hat{\jmath}) = mg\hat{\jmath} = (0.155kg)(9.80m/s^2)\hat{\jmath} = 1.52N\hat{\jmath}. \tag{5.5}$$

Rezultat $\mathbf{F_N} = -\mathbf{F_g}$ može se također dobiti primjenjujući treći Newtonov zakon na međudjelovanje diska i podloge.
Kako je $\mathbf{F_g} + \mathbf{F_N} = 0$, ostaje $\mathbf{F} = \mathbf{F_{tr}} = m\mathbf{a}$.

$$\mathbf{F_{tr}} = m\mathbf{a} = (0.155kg)(-1.23m/s^2\hat{\imath}) = -0.191N\hat{\imath}. \tag{5.6}$$

5.1.3 Drugi Newtonov zakon zapisan po komponentama

Prisjetimo se da je ubrzanje druga derivacija položaja po vremenu. Stoga je

$$\mathbf{F} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \tag{5.7}$$

gdje je $\mathbf{r}$ vektor pložaja. Silu možemo zapisati pomoću njenih komponenti

$$\mathbf{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}. \tag{5.8}$$

Druga derivacija vektora položaja $\mathbf{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ je

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}. \tag{5.9}$$

Da bi dva vektora bila jednaka moraju imati iste komponente. Stoga vrijedi

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2},\ F_y = m\frac{d^2y}{dt^2},\ F_z = m\frac{d^2z}{dt^2}. \tag{5.10}$$

Ove jednadžbe nazivaju se jednadžbama gibanja čestice mase m.

5.2 Primjena drugog Newtonovog zakona

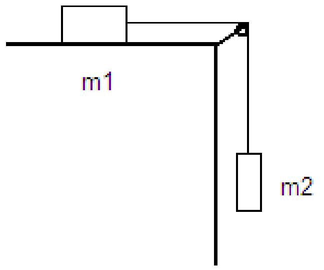
5.2.1 Primjene s konstantnom ukupnom silom

Primjer 5.3. Mase m_1 i m_2 su povezane preko koloture kao što je prikazano na slici (5.1). Masa m_1 je kliže po horizontalnoj površini bez trenja, masa m_2 visi vertikalno. Nađite ubrzanje ovih masa.
Rješenje.
Mase su povezane pa im ubrzanje mora biti isto. Kako masa m_2 visi, ubrzavat će se prema dolje, a masa m_1 ubrzavat će se udesno. Jednadžaba gibanja za masu m_2 je:

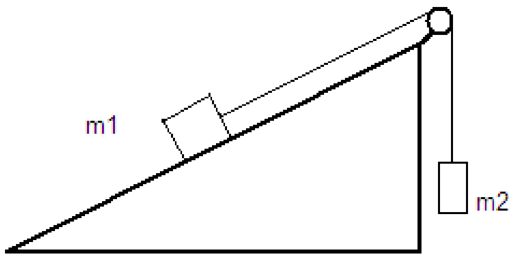
$$m_2g - T = m_2a. \tag{5.11}$$

Na masu m_1 djeliju tri sile, gravitacija $m_1\mathbf{g}$, napetost niti $\mathbf{T}$ i sila podloge $\mathbf{F_N}$. Komponenta ukupne sile u vertikalnom smjeru (y) je $F_y = F_N - m_1g = 0$ zato što se masa ne podiže od podloge (nema vertikalnog gibanja). Komponenta ukupne sile u horizontalnom smjeru (x) je T tako da je jednadžba gibanja

$$T = m_1a. \tag{5.12}$$



Slika 5.1: Skica za Primjer 5.3.



Slika 5.2: Skica za Primjer 5.4.

Želimo eliminirati T iz jednadžbi kako bi našli a

$$T = m_2 g - m_2 a = m_1 a. \tag{5.13}$$

Stoga je

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g \tag{5.14}$$

Primjer 5.4. Mase m_1 i m_2 su povezane preko koloture kao što je prikazano na slici (5.2). Masa m_1 je kliže bez trenja po kosini koja zatvara kut Θ s horizontalom, a masa m_2 visi vertikalno. Nađite ubrzanje ovih masa.

Rješenje.

Prošli primjer smo počeli s osjećajem koji smjer ima ubrzanje što u ovom primjeru nije slučaj jer ne znamo vrijednosti pojedinih masa niti kut Θ. U ovakvoj situaciji može se predpostaviti jedan od dva moguća smjera. Ako u konačnici akceleracija bude imala negativnu numeričku vrijednost, to će značiti da joj je smjer suprotan od predpostavljenog. U ovom primjeru predpostavit ćemo da masa m_2 ubrzava prema dolje, tako da masa m_1 ubrzava uz kosinu. Ostaje pitanje kako izabrati koordinatne osi. Za masu m_1 pozitivnu x-os ćemo izabrati paralelno kosini u smjeru uz kosinu, tako da je $+y$-os okomita na kosinu. Isto tako za masu m_2 ćemo $+y$-os izabrati prema dolje u smjeru ubrzanja. Jednadžbe gibanja su za masu m_1

$$F_x = T - m_1 g \sin\Theta = m_1 a \tag{5.15}$$

i

$$F_y = F_N - m_1 g \cos\Theta = 0. \tag{5.16}$$

Za m_2 jednadžba gibanja je

$$F_y = m_2 g - T = m_2 a. \tag{5.17}$$

Iz prve jednadžbe je $T = m_1 g \sin\Theta + m_1 a$, a iz zadnje $T = m_2 g - m_2 a$. Izjednačavanjem i rješavanjem dobivene jednadžbe po a dobivamo

$$a = \frac{m_2 - m_1 \sin\Theta}{m_1 + m_2} g. \tag{5.18}$$

5.3 Primjena drugog Newtonovog zakona za sile koje se mijenjaju s vremenom

Drugi Newtonov zakon je jako koristan jer nam omogućava da razumijemo gibanje čestice uvijek kad možemo naći ukupnu silu na tu česticu iako ta sila nije konstantna. U ovom poglavlju razmatrat ćemo relativno jednostavnu klasu problema: sile koje se mijenjaju s vremenom, ali ne i s položajem.

Za primjer uzmimo disk koji klizi bez trenja po površini horizontalnog zračnog stola. Pretpostavimo da disk krene iz mirovanja (u $t = 0$) i giba se pod djelovanjem ukupne sile koja se mijenja u vremenu po zakonu

$$\mathbf{F} = 6t^2\hat{\imath} - 2t\hat{\jmath} \tag{5.19}$$

u njutnima za vrijeme u sekundama. Jednadžbe gibanja su

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = 6t^2,\ F_y = m\frac{d^2y}{dt^2} = -2t. \tag{5.20}$$

Promotrimo prvo jednadžbu gibanja za x-komponentu

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 6t^2. \tag{5.21}$$

Kako je prva derivacija položaja brzina ovu jednađzbu možemo pisati

$$m\frac{dv_x}{dt} = 6t^2, \tag{5.22}$$

odnosno

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{6}{m}t^2. \tag{5.23}$$

Ovu jednadžbu je lako riješiti tako da nađemo neodređeni integral od dv_x/dt

$$v_x = \int \frac{dv_x}{dt}dt = \int \frac{6}{m}t^2 dt = \frac{6}{m}\int t^2 dt = \frac{6}{m}\frac{t^3}{3} + c = \frac{2t^3}{m} + c. \tag{5.24}$$

Početni uvjet $v_x = 0$ u $t = 0$ omogućava nam da odredimo konstantu c, a time i posebno rješenje za v_x. Iz početnog uvjeta imamo

$$v_x(0) = 0 \tag{5.25}$$

i iz općeg rješenja imamo

$$v_x(0) = c \tag{5.26}$$

pa je $c = 0$. Stoga je posebno rješenje

$$v_x = \frac{2t^3}{m}. \tag{5.27}$$

Sada položaj nalazimo određujući neodređeni integral brzine

$$x = \int v_x dt = \int \frac{2t^3}{m} dt = \frac{2}{m} \int t^3 dt = \frac{2}{m}\frac{t^4}{4} + c = \frac{t^4}{2m} + c. \tag{5.28}$$

Ovo je opće rješenje za položaj, a da znamo početni položaj mogli bismo odrediti c i naći posebno rješenje.

Primjer 5.5. Završite primjer iz teksta tako da nađete $v_y(t)$ i $y(t)$.
Rješenje.
Slijedeći istu proceduru vidimo da je ubrzanje $a_y = d^2y/dt^2 = dv_y/dt = F_y/m$ tako da je

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{F_y}{m} = -\frac{2}{m}t. \tag{5.29}$$

Rješavajući po v_y,

$$v_y = \int \frac{dv_y}{dt} dt = -\int \frac{2}{m} t dt = -\frac{2}{m}\frac{t^2}{2} + c = -\frac{t^2}{m} + c. \tag{5.30}$$

Konstanta c se može odrediti iz početnog uvjeta $vy(0) = 0 = c$, pa je

$$v_y = -\frac{t^2}{m}. \tag{5.31}$$

Druga diferencijalna jednadžba $v_y = dy/dt$ može se integrirati da nađemo $y(t)$:

$$y = \int v_y dt = \int (-\frac{t^2}{m}) dt = -\frac{1}{m}\frac{t^3}{3} + c = -\frac{t^3}{3m} + c. \tag{5.32}$$

Ovo je opće rješenje za $y(t)$. Kao i prije ne možemo odrediti posebno rješenje a da ne znamo početni uvjet za $y(t)$.

Poglavlje 6

Diferencijalne jednadžbe

U prethodnom poglavlju uveli smo Newtonove zakone. Mnoge primjene Newtonovih zakona uključuju razumijevanje sila koje djeluju na tijela i potom analiziranje gibanja tijela koristeći drugi Newtonov zakon. Upravo drugi Newtonov zakon motivira nas na proučavanje diferencijalnih jednadžbi koje su tema ovog poglavlja. Uvest ćemo diferencijalne jednadžbe i metode njihova rješavanja, te pokazati njihovu primjenu u fizici na primjerima.

6.1 Uvod u diferencijalne jednadžbe

Ubacimo li kuglicu u cilindričnu posudu s vodom, očito je da ona ne ubrzava prema dnu posude s g. Na kuglicu osim gravitacije djeluje i sila otpora vode koja ima smjer suprotan brzini kuglice $\mathbf{v}$ i iznos proporcionalan s v. Jednadžba gibanja za kuglicu je

$$mg - bv_y = ma_y, \tag{6.1}$$

gdje je b konstanta proporcionalnosti. Iskoristimo činjenicu $a_y = dv_y/dt$ da napišemo ovu jednadžbu u korisnijem obliku

$$mg - bv_y = m\frac{dv_y}{dt}, \tag{6.2}$$

ili

$$\frac{dv_y}{dt} = g - \frac{b}{m}v_y. \tag{6.3}$$

Ova jednadžba je primjer **diferencijalne jednadžbe**. **Diferencijalna jednadžba** je jednadžba koja sadrži nepoznatu funkciju i jednu ili više njenih derivacija.
Red diferencijalne jednadžbe je red najviše derivacije koja se pojavljuje u toj diferencijalnoj jednadžbi.

Primjer 6.1. Odredite red sljedećih diferencijalnih jednadžbi
(a) $f'''(t) - 6f'(t) + 7t^2 = 0$, (b) $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} = -x^2$, (c) $\sqrt{g'(z)} + 5z = -1$.
Rješenje.
(a) Trećeg reda,
(b) drugog reda,
(c) prvog reda.

U ovom poglavlju usredotočit ćemo se na diferencijalne jednadžbe prvog reda. Prvo ćemo se usredotočiti na vrlo poseban slučaj diferencijalne jednadžbe prvog reda. Koristeći t kao argument nepoznate funkcije $y(t)$ možemo izraziti opći oblik te diferencijalne jednadžbe

$$y'(t) = f(t), \tag{6.4}$$

gdje je f neka dana funkcija. Problem rješavanja ove diferencijalne jednadžbe je jednak problemu nalaženja primitivne funkcije. Pretpostavimo li da je F primitivna funkcija od f, onda je nepoznata funkcija dana s

$$y(t) = F(t) + C, \tag{6.5}$$

za proizvoljnu konstantu C. Točnije, $y(t)$ predstavlja familiju rješenja diferencijalne jednadžbe (6.4) s jednim članom familije za svaki C. Ova familija se naziva **opće rješenje** diferencijalne jednadžbe.

U mnogim situacijama uz diferencijalnu jednadžbu dani su i **početni uvjeti** koje mora zadovoljavati nepoznata funkcija y. Početni uvjet je vrijednost funkcije $y(t_0)$ za posebnu vrijenost argumenta t_0. Početni uvjet izdvaja jedan član familije koja je reprezentirana općim rješenjem. Ovo rješenje se naziva **posebno rješenje** za dani početni uvjet. Sljedeći primjer ilustrira ovu ideju.

Primjer 6.2. Nađite posebno rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'(t) = t^2 - t \tag{6.6}$$

za početni uvjet $y(1) = 3$.

Rješenje.

Opće rješenje je

$$y(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + C. \tag{6.7}$$

Da nađemo posebno rješenje koristimo početni uvjet $y(1) = 3$.

Uvrštavanjem $t = 1$ u opće rješenje dobivamo

$$y(1) = \frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{2}1^2 + C = -\frac{1}{6} + C, \tag{6.8}$$

te je stoga

$$3 = -\frac{1}{6} + C \tag{6.9}$$

što daje $C = 19/6$. Tako je traženo posebno rješenje

$$y(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{19}{6}. \tag{6.10}$$

Primjer 6.3. Čestica se giba duž y-osi s brzinom $v_y(t) = 6t^2$ (u m/s za t u s). U $t = 2s$ čestica je bila u $y = 10m$. Napišite diferencijalnu jednadžbu za $y(t)$ i riješite je da nađete položaj čestice kao funkciju vremena.

Rješenje.

Budući da je brzina derivacija položaja diferencijalna jednadžba za $y(t)$ je

$$y'(t) = 6t^2. \tag{6.11}$$

Opće rješenje je

$$y(t) = \int 6t^2 dt = \frac{6t^3}{3} + C = 2t^3 + C. \tag{6.12}$$

Sada ćemo iskoristiti početni uvjet $y(2) = 10$ s općim rješenjem za $t = 2$

$$y(2) = 2(2)^3 + C = 10 \tag{6.13}$$

pa je $C = -6$. Posebno rješenje je stoga

$$y(t) = 2t^3 - 6. \tag{6.14}$$

6.2 Metoda separacije varijabli

Sada ćemo uvesti općenitiju metodu rješavanja diferencijalnih jednadžbi prvog reda koja se zove **separacija varijabli**. Uvedimo ovu metodu na primjeru diferencijalne jednadžbe

$$p'(t) = 0.03p(t) \tag{6.15}$$

s početnim uvjetom $p(0) = 2$.
Podijelimo obje strane ove jednadžbe s $p(t)$ da bismo dobili

$$\frac{p'(t)}{p(t)} = 0.03 \tag{6.16}$$

Budući da su funkcije na obje strane jednadžbe jednake njihove primtivne funkcije su jednake do na aditivnu konstantu

$$\int \frac{p'(t)}{p(t)} dt = \int 0.03 dt + C. \tag{6.17}$$

Sada izračunajmo integral

$$\int \frac{p'(t)}{p(t)} dt = \Big[u = p(t), du = p'(t)dt\Big] = \int \frac{1}{u} du = \ln u = \ln p(t). \tag{6.18}$$

Uvrštavanjem ovog integrala u (6.17) i rješavanjem integrala s desne strane u (6.17) dobivamo

$$\ln |p(t)| = 0.03t + C. \tag{6.19}$$

Eksponenciranjem obje strane dobivamo

$$|p(t)| = e^C e^{0.03t}, \tag{6.20}$$

odnosno

$$p(t) = \pm e^C e^{0.03t}, \tag{6.21}$$

Kako je $\pm e^C$ isto konstanta, opće rješenje možemo zapisati

$$p(t) = Ce^{0.03t}. \tag{6.22}$$

Konstanta C se određuje iz početnog uvjeta $p(0) = 2$. Iz općeg rješenja imamo

$$p(0) = Ce^0 = C. \tag{6.23}$$

Izjednačavajući ova dva izraza imamo $C = 2$, pa je posebno rješenje

$$p(t) = 2e^{0.03t}. \tag{6.24}$$

U skraćenoj notaciji danu diferencijalnu jednadžbu možemo zapisati:

$$\frac{dp}{dt} = 0.03p. \tag{6.25}$$

Nastavljamo tretirajući dp i dt kao algebarske varijable. Množenjem obje strane s dt i dijeljenjem obje strane s p

$$\frac{1}{p}dp = 0.03dt \tag{6.26}$$

Uvrštavanjem znaka integrala

$$\int \frac{1}{p}dp = \int 0.03dt \tag{6.27}$$

i integriranjem dobivamo opće rješenje

$$\ln|p| = 0.03t + C, \tag{6.28}$$

koje na isti način kao i prije možemo zapisati

$$p(t) = Ce^{0.03t}. \tag{6.29}$$

Primjer 6.4. Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$x'(t) = 6\frac{t^2}{x^2} \tag{6.30}$$

i posebno rješenje s početnim uvjetom $x(-1) = 3$.
Rješenje.
U pojednostavljenom zapisu

$$\frac{dx}{dt} = 6\frac{t^2}{x^2}. \tag{6.31}$$

Separacijom varijabli i uvođenjem integrala

$$\int x^2 dx = \int 6t^2 dt. \tag{6.32}$$

Računanjem neodređenih integrala

$$\frac{x^3}{3} = 6\frac{t^3}{3} + C = 2t^3 + C \tag{6.33}$$

tako da je

$$x^3 = 6t^3 + 3C = 6t^3 + C \tag{6.34}$$

gdje smo redefinirali $3C$ u C radi jednostavnosti. Stoga je opće rješenje

$$x(t) = [6t^3 + C]^{1/3}. \tag{6.35}$$

Koristeći početni uvjet

$$3 = [6(-1)^3 + C]^{1/3} \tag{6.36}$$

nalazimo $C = 33$, pa je posebno rješenje

$$x(t) = [6t^3 + 33]^{1/3}. \tag{6.37}$$

Vratimo li se na primjer s početka poglavlja kuglice koja pada u cilindru ispunjenom vodom čija je jednadžba gibanja (6.1) vidimo da se ova jednadžba može riješiti metodom separacije varijabli. Pokažite da je njeno opće rješenje

$$v_y = \frac{mg}{b} - Ce^{-\frac{b}{m}t} \tag{6.38}$$

gdje je C konstanta koja se određuje iz početnog uvjeta.

Poglavlje 7

Rad i linijski integrali

7.1 Rad u slučaju jednodimenzionalnog gibanja

7.1.1 Rad konstantne sile

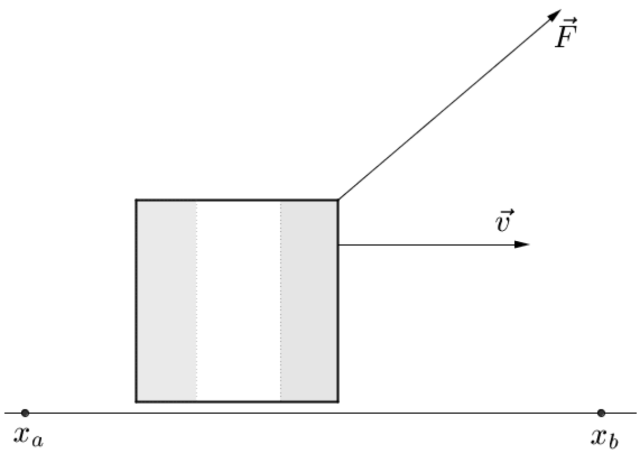
Promotrimo jednodimenzionalno gibanje bloka po horizontalnoj podlozi na kojeg djeluje konstantna sila **F** kao što je to prikazano na slici 7.1. Izabrat ćemo os $+x$ da bude u smjeru gibanja. Za vrijeme nekog vremenskog intervala blok se pomakne iz x_a u x_b tako da mu je pomak $\Delta x = x_b - x_a$. Imajte ovu fizikalnu situaciju na umu čitajući sljedeću definiciju rada konstantne sile u slučaju jednodimenzionalnog gibanja.

Definicija 7.1. Rad W konstantne sile **F** na tijelo koje se giba duž x-osi jednak je x-komponenti sile pomnožene s pomakom, tj.

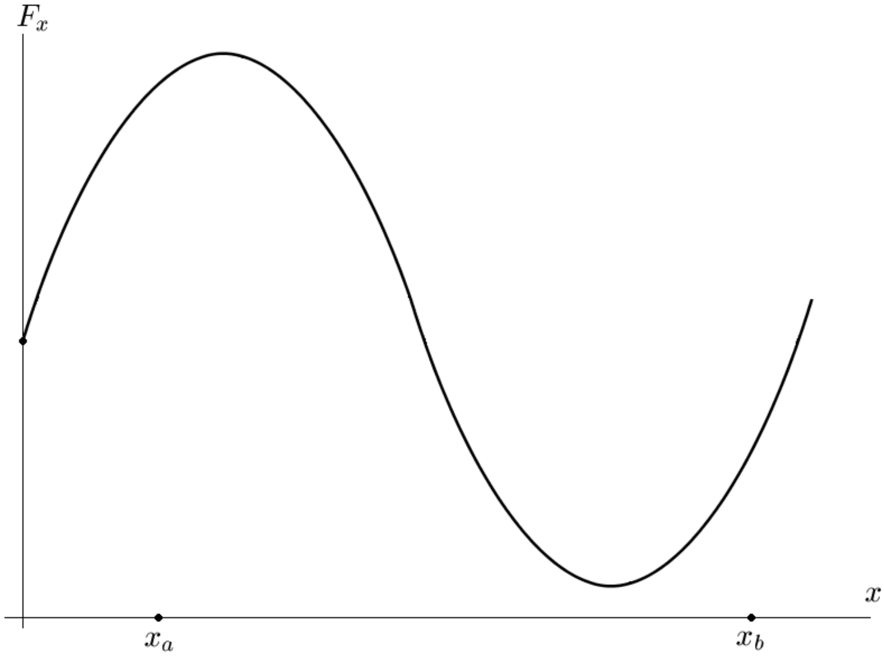
$$W = F_x \Delta x. \tag{7.1}$$

Kad više od jedne sile (npr. n sila) djeluje na tijelo **ukupan rad** W_u jednak je zbroju radova svih sila

$$W_u = W_1 + W_2 + ... + W_n. \tag{7.2}$$



Slika 7.1: Blok koji se kliže po horizontalnoj podlozi.



Slika 7.2: Graf sile ovisne o položaju.

Za poseban slučaj rada konstantne sile u slučaju jednodimenzionalnog gibanja (duž x-osi), ukupan rad je

$$W_u = F_{x1}\Delta x + F_{x2}\Delta x + ... + F_{xn}\Delta x = (F_{x1} + F_{x2} + ... + F_{xn})\Delta x \tag{7.3}$$

ili

$$W_u = \Big(\sum_{i=1}^{n} F_{ix})\Delta x = F_x \Delta x, \tag{7.4}$$

gdje je F_x x-komponenta ukupne sile.

7.1.2 Rad promjenjive sile

Sada promotrimo isti sustav, ali u ovom slučaju neka sila nije konstantna nego se mijenja kao funkcija od x s vrijednostima $\mathbf{F}(x)$. U ovom slučaju rad je jednak određenom integralu od F_x po varijabli x u granicama od x_a do x_b

$$W = \int_{x_a}^{x_b} F_x(x)dx. \tag{7.5}$$

Primjetimo da je rad jednak površini ispod grafa od F_x između x_a i x_b (sl. 7.2).

Primjer 7.1 Nađite rad sile $F_x = kx$ koji je potreban da se opruga konstante k rastegne iz ravnotežnog položaja u proizvoljni položaj x.
Rješenje.

$$W = \int_{x_a}^{x_b} F_x(x)dx = \int_{0}^{x} (kx)dx = \frac{1}{2}kx^2\Big|_0^x = \frac{1}{2}kx^2 \tag{7.6}$$

7.2 Rad i skalarni produkt

7.2.1 Rad konstantne sile u više dimenzija

U više od jedne dimenzije konstantna sila $\mathbf{F}$ može djelovati na tijelo tako da pomak $\Delta\mathbf{r}$ ne bude u njenom smjeru. U takvoj situaciji jedino komponenta sile $\mathbf{F}$ koja je u smjeru pomaka $\Delta\mathbf{r}$ doprinosi radu. Komponente sile $\mathbf{F}$ u smjeru okomitom na pomak ne doprinose radu.
Koristit ćemo skalarni produkt da definiramo rad sile koja djeluje na tijelo koje se giba u tri dimenzije.

Definicija 7.2. Rad W konstantne sile $\mathbf{F}$ koja djeluje na tijelo jednak je skalarom produktu sile i pomaka $\Delta\mathbf{r}$, tj.

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}. \tag{7.7}$$

Označimo li s Θ kut između sile $\mathbf{F}$ i pomaka $\Delta\mathbf{r}$, možemo izraziti rad kao

$$W = |\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|\cos\theta = (|\mathbf{F}|\cos\theta)|\Delta\mathbf{r}|. \tag{7.8}$$

U zadnjem izrazu prepoznajemo rad kao produkt komponente sile $\mathbf{F}$ u smjeru $\Delta\mathbf{r}$ i iznosa pomaka.
Kako bi izračunali rad, možemo napisati Definiciju 7.2. preko kartezijevih komponenti sile i pomaka

$$W = (F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}) \cdot (\Delta x\hat{\imath} + \Delta y\hat{\jmath} + \Delta z\hat{k}), \tag{7.9}$$

odnosno

$$W = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z. \tag{7.10}$$

Primjer 7.2. Zrakoplov koji se giba brznom $58m/s$ u horizontalnom letu na visini $1.35km$ ispusti paket mase $32kg$. Nađite rad gravitacijske sile na paket od trenutka ispuštanja dok paket ne udari u zemlju.
Rješenje.
Paket pada po paraboli (zanemarujući otpor zraka). Izaberemo li x-os u horizontalnom smjeru, $+y$-os vertikalno prema gore pomak paketa je $\Delta\mathbf{r} = \Delta x\hat{\imath} + \Delta y\hat{\jmath}$, gdje je $\Delta y = -1.35km$. Gravitacijska sila je $\mathbf{F}_g = -mg\hat{\jmath}$. Rad gravitacijske sile je

$$W_g = \mathbf{F}_g \cdot \Delta\mathbf{r} = (-mg\hat{\jmath}) \cdot (\Delta x\hat{\imath} + \Delta y\hat{\jmath}) = -mg\Delta y = 4.23 \times 10^5 J. \tag{7.11}$$

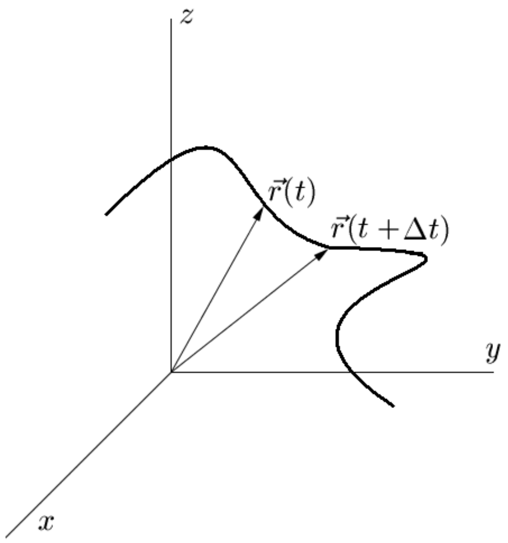
7.3 Linijski integrali i rad promjenljive sile u tri dimenzije

Predpostavimo da znamo položaj čestice u dvije ili tri dimenzije kao funkciju vremena, tj. da znamo funkciju $\mathbf{r}(t)$ (sl. 7.3). Neka je $[t_a, t_b]$ vremenski interval gibanja čestice duž puta $\mathbf{r}(t)$. Rad sile $\mathbf{F}$ koja pomiče česticu iz početnog položaja $\mathbf{r}_a$ u konačni položaj $\mathbf{r}_a$ duž izabranog puta jednak je linijskom integralu

$$W = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{v}(t)dt, \tag{7.12}$$

gdje smo iskoristili relaciju

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt \tag{7.13}$$



Slika 7.3: Proizvoljni put parametriziran s $\mathbf{r}(t)$.

tretirajući $d\mathbf{r}$ i dt kao nezavisne algebarske veličine.

Primjer 7.3. Dana je sila $\mathbf{F} = y\hat{\imath} - x\hat{\jmath}$ (u N za položaj u m). Nađite rad ove sile da pomakne česticu iz točke $(1m, 0)$ u točku $(0, 1m)$ duž puteva (sl. 7.4) (a) dio pravca definiranog s $\mathbf{r}(t) = (1-t)\hat{\imath} + t\hat{\jmath}$ i (b) dijela kružnice definirane s $\mathbf{r}(t) = \cos t\hat{\imath} + \sin t\hat{\jmath}$.
Rješenje.
(a) U početnoj točki $(1m, 0)$ je $t = 0$, a u krajnjoj točki $(0, 1m)$ je $t = 1s$. Stoga je vremenski interval $[0, 1]$ i rad je dan određenim integralom

$$W = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{v}(t) dt. \tag{7.14}$$

Derivacija položaja daje brzinu

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -\hat{\imath} + \hat{\jmath}. \tag{7.15}$$

Stoga je skalarni produkt

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{v}(t) = (y\hat{\imath} - x\hat{\jmath}) \cdot (-\hat{\imath} + \hat{\jmath}) = -y - x, \tag{7.16}$$

odnosno kao funkcija vremena uzimajući $x = 1 - t$ i $y = t$ iz danog $\mathbf{r}(t)$

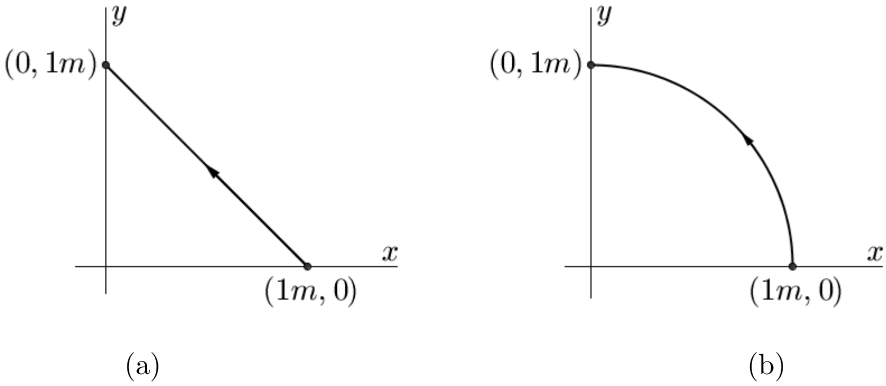
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{v}(t) = -t - (1-t) = -1. \tag{7.17}$$

Dakle, dobivamo

$$W = \int_0^1 (-1) dt = -t|_0^1 = -1J. \tag{7.18}$$

(b) U početnoj točki $(1m, 0)$ je $t = 0$, a u krajnjoj točki $(0, 1m)$ je $t = \pi/2s$. Stoga je vremenski interval $[0, \pi/2]$ i rad je dan određenim integralom

$$W = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{v}(t) dt. \tag{7.19}$$



Slika 7.4: Dva puta iz primjera 7.3.

Derivacija položaja daje brzinu

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -\sin t\hat{\imath} + \cos t\hat{\jmath}. \tag{7.20}$$

Stoga je skalarni produkt

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{v}(t) = (y\hat{\imath} - x\hat{\jmath}) \cdot (-\sin t\hat{\imath} + \cos t\hat{\jmath}) = -y\sin t - x\cos t, \tag{7.21}$$

odnosno kao funkcija vremena uzimajući $x = \cos t$ i $y = \sin t$ iz danog $\mathbf{r}(t)$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{v}(t) = -(\sin t)^2 - (\cos t)^2 = -1. \tag{7.22}$$

Dakle, dobivamo

$$W = \int_0^{\pi/2} (-1)dt = -t|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2}J. \tag{7.23}$$

Primjetimo da su rezultati pod (a) i (b) različiti iako su sila i pomak iz početne u krajnju točku isti. Dakle, rad očito ovisi o izabranom putu.

7.4 Energija

7.4.1 Konzervativne i nekonzervativne sile

Definicija 7.3. Sila je **konzervativna** ako rad koji ona izvrši ne ovisi o putu. Sila je **nekonzervativna** ako rad koji ona izvrši ovisi o putu.

7.4.2 Kinetička energija

Vidjeli smo da je rad promjenljive sile na česticu koja se giba u tri dimenzije za vrijeme intervala $[t_a, t_b]$

$$W = \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{v}(t)dt. \tag{7.24}$$

Ako je sila u ovom izrazu ukupna sila, možemo dobiti drugi koristan oblik tog izraza koristeći drugi Newtonov zakon

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}. \tag{7.25}$$

Uvrštavajući ovaj izraz u izraz (7.24) dobivamo

$$W_u = \int_{t_a}^{t_b} m\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \cdot \mathbf{v}(t)dt. \tag{7.26}$$

Za svaki vektor $\mathbf{v}$ koji je funkcija od t vrijedi

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v} = 2\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}. \tag{7.27}$$

Kako je $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = v^2,\ v = |\mathbf{v}|$ imamo

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v^2). \tag{7.28}$$

Uvrštavajući ovaj izraz u (7.26) dobivamo

$$W_u = \int_{t_a}^{t_b} m\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v^2)dt. \tag{7.29}$$

Računajući određeni integral koristeći drugi osnovni teorem integralnog računa imamo

$$W_u = \frac{1}{2}m(v(t))^2\Big|_{t_a}^{t_b} = \frac{1}{2}m(v(t_b))^2 - \frac{1}{2}m(v(t_a))^2. \tag{7.30}$$

Definicija 7.4. Kinetička enerija K čestice mase m je

$$K = \frac{1}{2}mv^2, \tag{7.31}$$

gdje je $v = |\mathbf{v}|$ iznos brzine čestice.

Stoga je koristeći definiciju kinetičke energije

$$W_u = K_b - K_a = \Delta K. \tag{7.32}$$

7.4.3 Potencijalna energija

Vidjeli smo da je rad ukupne sile $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ koja pomiče tijelo iz $\mathbf{r}_a$ u $\mathbf{r}_b$

$$W = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}. \tag{7.33}$$

Predpostavit ćemo da je sila konzervativna. Ako je sila konzervativna, njen rad ne ovisi o putu pa ne moramo specificirati put od $\mathbf{r}_a$ do $\mathbf{r}_b$. Predpostavimo da je $\mathbf{r}_a$ fiksno i napišimo W kao funkciju položaja tijela na kraju intervala. U tu svrhu pogodno je $\mathbf{r}_b$ zamijeniti s proizvoljnim $\mathbf{r}$. Tada možemo zamijeniti i varijablu integracije $\mathbf{r}$ sa $\mathbf{s}$ tako da je rad pri pomicanju tijela iz $\mathbf{r}_a$ u $\mathbf{r}$ kao funkcija od $\mathbf{r}$ jednak

$$W(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{s})\cdot d\mathbf{s}. \tag{7.34}$$

Definicija 7.5. Za opisnu situaciju **razlika potencijalne energije** u točki $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r}_a$ jednaka je

$$\Delta U = U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}_a) = -W(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s}. \tag{7.35}$$

Stoga, ako je sila konzervativna vrijedi

$$-\Delta U = \Delta K \tag{7.36}$$

ili

$$\Delta K + \Delta U = 0. \tag{7.37}$$

Definicija 7.6. Za tijelo koje je pod djelovanjem konzervativne sile **ukupna mehanička energija** E tijela je suma kinetičke energije i potencijalne

$$E = K + U. \tag{7.38}$$

Iz izraza (7.37) vidimo da je za konzervativan sistem ukupna mehanička energija E konstantna

$$E = K + U = konst. \tag{7.39}$$

7.5 Relacija između sile i energije

Relacija između (konzervativne) ukupne sile i potencijalne energije za tijelo koje se giba u jednoj dimenziji je

$$\Delta U = U(x) - U(x_a) = -\int_{x_a}^{x} F_x(s) \cdot ds. \tag{7.40}$$

Primjenjujući prvi osnovni teorem integralnog računa imamo

$$-F_x = \frac{d}{dx}[U(x) - U(x_a)], \tag{7.41}$$

odnosno kako je $U(x_a)$ konstantno

$$-F_x = \frac{dU(x)}{dx} \tag{7.42}$$

ili

$$F_x = -\frac{dU(x)}{dx}. \tag{7.43}$$

U tri dimenzije moramo koristiti parcijalne derivacije potencijalne energije koje će se učiti kasnije. Ovdje ćemo samo reći da se parcijalna derivacija skalarne funkcije $U(x, y, z)$ po jednoj od komponenti (recimo x) nalazi derivirajući U po x i držeći ostale varijable y i z konstantnim. Označavamo $\partial U/\partial x$ parcijalnu derivaciju od $U(x, y, z)$ po x, te $\partial U/\partial y$ i $\partial U/\partial z$ parcijalne derivacije po y i z.
Pokazat će se da se komponente sile mogu izraziti preko parcijalnih derivacija od $U(x, y, z)$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{7.44}$$

Poglavlje 8

Nizovi i redovi

8.1 Nizovi

Definicija 8.1. Nizom u skupu X nazivamo svako preslikavanje s N u X; $a : N \to X$ s $a : n \mapsto a(n) = a_n$. Element n se naziva indeks niza, a vrijednost preslikavanja na elementu n a_n se naziva n-ti član niza.

Nizovi se mogu zadavati pomoću zakona n-tog člana. Npr.

$$a_n = \frac{n-1}{n}, \ n \in N \tag{8.1}$$

$$b_n = \cos n\pi = (-1)^n, \ n \in N \tag{8.2}$$

$$c_n = n^2, \ n \in N \tag{8.3}$$

Niz zadajemo i rekurzivnim formulama. Npr. aritmetički niz

$$a_1 = a, \ a_{n+1} = a_n + d, \tag{8.4}$$

te geometrijski niz

$$a_1 = a, \ a_{n+1} = a_n q. \tag{8.5}$$

Primjer 8.1. Prikažite grafički prvih 100 članova niza

$$s_k = \frac{2k+10}{k+1}. \tag{8.6}$$

Rješenje.
Prvi elemeti niza su (sl. 8.1)

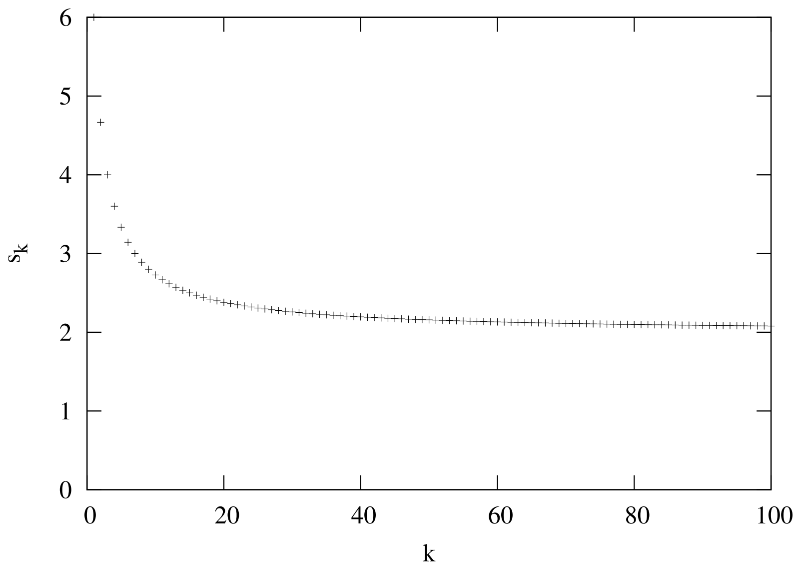
$$\frac{12}{2}, \frac{14}{3}, \frac{16}{4}, \frac{18}{5}, \ldots \tag{8.7}$$

Definicija 8.2. Niz a s članovima a_n konvergira graničnoj vrijednosti L ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da je

$$|a_n - L| < \varepsilon \tag{8.8}$$

za svaki prirodan broj $n > n_0$. Tada pišemo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L. \tag{8.9}$$



Slika 8.1: Prvih sto članova niza iz Primjera 8.1.

Primjer 8.2. Pokažite da niz dan s $s_n = 1/n$ konvergira koristeći prethodnu definiciju.
Rješenje.
Kako n raste $1/n$ postaje manje, te je razumno predpostaviti da je granična vrijednost ovog niza $L = 0$. Ako uzmemo $n_0 = 1/\varepsilon$, za svaki $n > n_0$ imamo

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} = \varepsilon, \tag{8.10}$$

Kako je n uvijek pozitivno, onda vrijedi i

$$-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon. \tag{8.11}$$

Niz sa članovima a_n je **rastući** ako je $a_{n+1} \geq a_n$ za svaki n. Niz je **padajući** ako je $a_{n+1} \leq a_n$ za svaki n.
Niz sa članovima a_n je **omeđen odozgo** ako postoji realan broj M takav da je $a_n \leq M$ za svaki n. Niz sa članovima a_n je **omeđen odozdo** ako postoji realan broj m takav da je $a_n \geq m$ za svaki n. Niz je **omeđen** ako je i omeđen odozdo i omeđen odozgo.

Teorem 8.1. Ako je niz rastući i omeđen odozgo, onda konvergira. Ako je niz padajući i omeđen odozdo, onda konvergira.

Npr. niz sa članovima $a_n = 1 - 1/n$ je rastući i njegovi elementi nikada nisu veći od 1 (omeđen odozgo), pa po Teoremu 8.1. on konvergira.

8.2 Redovi

Definicija 8.3. Neka je a niz u R s članovima a_n. Izraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ...$ nazivamo beskonačnim redom s općim članom a_n. Niz s članovima $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ nazivamo nizom parcijalnih suma reda.

Definicija 8.4. Kažemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira i da mu je zbroj $s \in R$ ako konvergira niz parcijalnih suma ka s. Tada pišemo $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Za red koji ne konvergira kaže se da divergira.

8.2.1 Geometrijski red

Geometrijski red je

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + ... + q^n + ... \tag{8.12}$$

Za $|q| \geq 1$ geometrijski red divergira. Za $|q| < 1$ geometrijski red konvergira. Naime,

$$s_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n, \tag{8.13}$$

te

$$qs_n = q + q^2 + q^3 + ... + q^{n+1}. \tag{8.14}$$

Napravimo li razliku

$$s_n - qs_n = 1 - q^{n+1} \tag{8.15}$$

dobivamo

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \tag{8.16}$$

Ova suma divergira za $|q| \geq 1$ jer divergira član q^{n+1}. S druge strane za $|q| < 1$ je

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}, \tag{8.17}$$

te je za $|q| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q} \tag{8.18}$$

8.2.2 p-redovi

p-red je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ... + \frac{1}{n^p} + \tag{8.19}$$

Posebni slučaj za $p = 1$ se naziva **harmonijski red**. Za $|p| \leq 1$ p-red divergira. Za $|p| > 1$ p-red konvergira.

8.3 Kriteriji za konvergenciju redova

8.3.1 Poredbeni kriteriji

Teorem 8.2. Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ redovi s nenegativnim članovima. Ako postoji prirodan broj n_0 takav da je za svaki prirodan broj $n > n_0$ $a_n \leq b_n$, tada iz konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ slijedi konvergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a iz divergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ slijedi divergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Primjer 8.3. Pokažite da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5 + 5n^2} \tag{8.20}$$

konvergira.
Rješenje.
Kako je $n^5 < n^5 + 5n^2$ imamo

$$\frac{1}{n^5 + 5n^2} < \frac{1}{n^5}. \tag{8.21}$$

Kako $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ konvergira, onda po Teoremu 8.2. i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5+5n^2}$ konvergira.

Primjer 8.4. Pokažite da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{8.22}$$

divergira.
Rješenje.
Kako je $\sqrt{n} < n$ imamo

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}. \tag{8.23}$$

Kako $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira, onda po Teoremu 8.2. i red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergira.

Teorem 8.3. Neka su $a_n > 0$ i $b_n > 0$ za svaki n. Ako je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0, \tag{8.24}$$

onda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira.

Primjer 8.5. Pokažite da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 - n} \tag{8.25}$$

konvergira.
Rješenje.
Uzmimo $a_n = 1/(3n^2 - n)$ i $b_n = 1/n^2$. Onda je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2 - n} = \frac{1}{3}. \tag{8.26}$$

Kako $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira, mora konvergirati i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2-n}$.

8.3.2 D'Alambertov kriterij

Teorem 8.4. Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s $a_n > 0$ i neka je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L. \tag{8.27}$$

Ako je $L < 1$, onda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. Ako je $L > 1$, onda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira. Ako je $L = 1$, red može biti konvergentan ili divergentan.

8.3.3 Apsolutna konvergencija

Teorem 8.5. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira, onda red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

8.4 Redovi potencija

Red potencija je red

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ..., \tag{8.28}$$

ili

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_n(x-a)^n + ..., \tag{8.29}$$

gdje su koeficijenti a_n konstante, a x je varijabla.

8.5 Taylorov red

Funkciju $y = f(x)$ koja je neprekinuta i ima sve derivacije za $x = a$ možemo u mnogim slučajevima izraziti u obliku sume reda potencija (Taylorov red)

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + ... \tag{8.30}$$

MacLaurinov red je specijalan slučaj Taylorovog reda za $a = 0$. Formula (8.30) je ispravna za one vrijednosti x za koje ostatak $f(x) - s_n(x) = R_n(x)$ teži k nuli za $n \to \infty$. Formula za ostatak je

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt. \tag{8.31}$$

Primjer 8.6. Razvijte u MacLaurinov red funkciju $f(x) = e^x$.
Rješenje.
$f'(x) = e^x$, $f'(0) = 1$,..., $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + ... + \frac{1}{n!}x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n. \tag{8.32}$$

Poglavlje 9

Oscilacije i diferencijalne jednadžbe drugog reda

9.1 Jednostavni harmonički oscilator

Ako jednodimenzionalno gibanje kao funkcija vremena može biti izraženo samo preko sinusne ili kosinusne funkcije, to gibanje nazivamo jednostavno harmoničko gibanje.
Pretpostavimo da se tijelo giba jednostavno harmonički duž x-osi. Tada je matematički izraz za njen položaj kao funkcija vremena

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta), \tag{9.1}$$

gdje su A, ω i δ parametri. Budući da kosinusna funkcija poprima vrijednosti u intarvalu $[-1, 1]$, $x(t)$ će poprimati vrijednosti u intervalu $[-A, A]$. Kažemo da je ovakvo gibanje omeđeno, jer nikad ne izlaži iz konačnog intervala. Konstanta A naziva se **amplituda** jednostavnog harmoničkog gibanja. Fizikalno, amplituda predstavlja maksimalnu udaljenost tijela od centralnog položaja $x = 0$. ω se naziva **kutna frekvencija** i jednaka je

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{9.2}$$

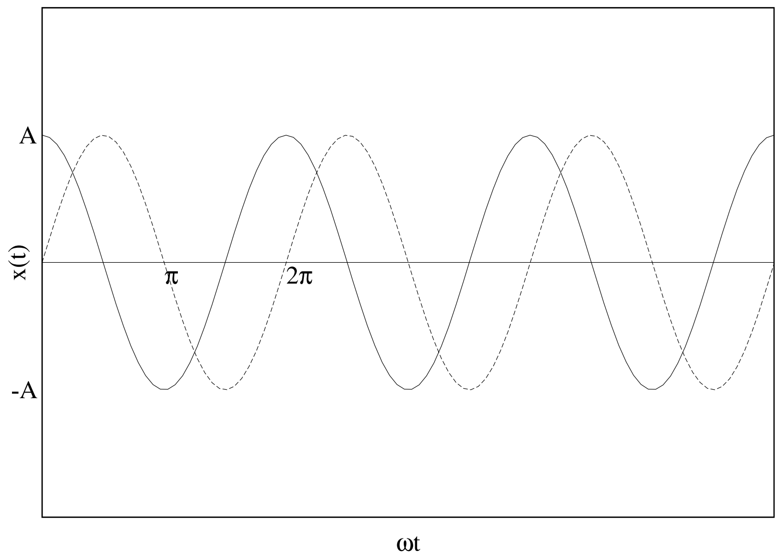
gdje je T period jednostavnog harmoničkog gibanja, jer ωT mora biti jednko periodu kosinusa 2π. Konstanta δ naziva se **pomak u fazi** jer kad recimo $\delta = 0$ zamijenimo s $\delta = -\pi/2$ kosinusna krivulja se pomakne za $\delta/2$ udesno.

Primjer 9.1 Za jednostavni harmonički oscilator period je 3.50 s, amplituda je 0.75 m, a pomak u fazi $\delta = \pi/4$. Nađite (a) kutnu frekvenciju, (b) položaj tijela u $t = 0$, te (c) prvi trenutak nakon $t = 0$ u kojem tijelo prođe kroz točku $x = 0$.
Rješenje
(a) $\omega = 2\pi/T = 2\pi/(3.50s) = 1.80s^{-1}$
(b) $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$
$x(0) = (0.75m)\cos(0 + \pi/4) = (0.75m)\cos(\pi/4) = 0.53m$
(c) Iz $x(t) = A\cos(\omega t + \delta) = 0$ slijedi da mora biti $\cos(\omega t + \delta) = 0$. Prvi put je to ispunjeno za

$$\omega t + \delta = \pi/2. \tag{9.3}$$

Rješavjući po t

$$t = \frac{\pi}{4\omega}, \tag{9.4}$$



Slika 9.1: Graf funkcije (9.1) za $\delta = 0$ (puna linija) i za $\delta = -\pi/2$ (isprekidana linija).

te je $t = 0.44s$.
Model jednostavnog harmoničkog oscilatora je blok mase m koji leži na horizontalnoj površini bez trenja i povezan je s horizontalnom oprugom konstante elastičnosti k čiji se drugi kraj drži fiksnim. Neka je položaj bloka određen varijablom x, gdje je $x = 0$ položaj u kojem opruga nije ni sabijena ni rastegnuta. Sila na blok je $F = -kx$, pa je koristeći drugi Newonov zakon jednadžba gibanja bloka

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{9.5}$$

Ova jednadžba je linearna diferencijalna jednadžba drugog reda za $x(t)$. Općeniti način rješavanja ovakve vrste diferencijalne jednadžbe ostavit ćemo za napredniji kolegij posvećen diferencijalnim jednadžbama. Ovdje ćemo pokušati riješiti ovu vrstu diferncijalne jednadžbe uzimajući probno rješenje i uvrštavajući ga u samu jednadžbu ćemo vidjeti koje uvjete mora zadovoljavati. Pretpostavimo rješenje

$$x(t) = A\cos(\omega t + \delta) \tag{9.6}$$

i nađimo njegovu prvu, pa drugu derivaciju koju ćemo uvrstiti u (9.5)

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \delta), \tag{9.7}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \delta). \tag{9.8}$$

Uvrštavajući (9.6) i (9.8) u (9.5) dobivamo

$$-Am\omega^2\cos(\omega t + \delta) = -kA\cos(\omega t + \delta). \tag{9.9}$$

Ovaj izraz je identitet za svaki trenutak t samo ako je $m\omega^2 = k$, odnosno

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{9.10}$$

Brzina i ubrzanje tijela koje se giba jednostavno harmonički su

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \delta), \tag{9.11}$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \delta). \tag{9.12}$$

Primjer 9.2. Jednostavni harmonički oscilator se sastoji od bloka mase 3.0 kg koji je spojen s oprugom konstante elastičnosti $k = 15.0N/m$. Amplituda oscilacija je 40.0 cm. (a) Nađite maksiamlne iznose brzine i ubrzanja blika. (b) Koliki je vremenski interval između vremena maksimalne brzine i vremena maksimalnog ubrzanja?
Rješenje.
(a) $v_{max} = A\omega = A\sqrt{\frac{k}{m}} = 0.89m/s$.
$a_{max} = A\omega^2 = A\frac{k}{m} = 2.0m/s^2$.
(b) Sinus i kosinus istog argumenta razlikuju se u fazi za $\pi/2$ ili $T/4$,
te je $\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} = 0.70s$.

Potencijalna energija jednostavnog harmoničkog oscilatora je

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2[\cos(\omega t + \delta)]^2, \tag{9.13}$$

a kinetička

$$K = \frac{1}{2}mv_x = \frac{1}{2}mA^2\omega^2[\sin(\omega t + \delta)]^2 = \frac{1}{2}kA^2[\sin(\omega t + \delta)]^2, \tag{9.14}$$

te je ukupna energija

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2 = konst. \tag{9.15}$$

Primjer 9.3. Promotrite harmonički oscilator iz prošlog primjera. (a) Ako je ukupna mehanička energija $E = 2.5J$, kolika je amplituda oscilacija? (b) Kolika je brzina bloka kada prolazi kroz točku $x = 0$?
Rješenje.
(a) $A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = 0.58m$
(b) U točki $x = 0$ potencijalna energija je nula, pa je $E = K = \frac{1}{2}mv_x$, te dobivamo

$$v_x = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 1.29m/s. \tag{9.16}$$

9.2 Jednostavno matematičko njihalo

Jednostavno matematičko njihalo sastoji se od točkaste čestice mase m koja je obješena o jedan kraj niti konstantne duljine l i mase zanemarive u odnosu na masu m, dok je drugi kraj niti učvršćen. Ako se čestica pomakne u jednu stranu tako da zatvara kut Θ_0 s vertikalom i zatim pusti, njihalo će se ljuljati naprijed-nazad u ravnini tako da nit u danom trenutku

zatvara kut $\Theta \leq \Theta_0$ s vertikalom.
Primjetite da se čestica mase m giba po kružnom luku. Duljina koju čestica prijeđe po tom luku je $s = l\Theta$. Da bismo došli do jednadžbe gibanja primjenit ćemo drugi Newtonov zakon. Prvo ćemo izračunati ubrzanje čestice duž d^2s/dt^2 luka. Derivirajući $s = l\Theta$ dobivamo brzinu

$$v = \frac{ds}{dt} = l\frac{d\Theta}{dt}. \tag{9.17}$$

Derivirajući drugi put,

$$a = \frac{dv}{dt} = l\frac{d^2\Theta}{dt^2}. \tag{9.18}$$

Zatim, uočavamo da je iznos ukupne sile na česticu jednak komponenti gravitacije duž pravca tangente na luk: $mg\sin\theta$. Ova komponenta je stoga odgovorna za ubrzanje čestice. U drugom Newtonovom zakonu moramo staviti znak minus i reći da je ukupna sila $-mg\sin\theta$ jer on uvijek nastoji vratiti česticu u položaj $s = 0$. Iz drugog Newtonovog zakona imamo

$$F = -mg\sin\theta = ma = ml\frac{d^2\Theta}{dt^2}, \tag{9.19}$$

te dobivamo

$$l\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -g\sin\Theta. \tag{9.20}$$

Jednadžba (9.20) je diferencijalna jednadžba koja određuje položaj čestice Θ kao funkciju vremena. Korisno je usporediti ovu jednadžbu s diferencijalnom jednadžbom za jednostavni harmonički oscilator (9.5). Obje jednad"be slične po položaju druge derivacije, konstanti i znaka minus. Međutim, jednadžba (9.20) je *nelinearna* pa njeno riješenje $\Theta(t)$ nije lako napisati kao funkciju vremena. U naprednijem kolegiju ćete naučiti da je diferencijalna jednadžba (9.20) član familije diferencijalnih jednadžbi čija su rješenja poznata kao *eliptičke funkcije*. Međutim, mi ćemo u ovom kolegiju pokušati naći samo aproksimativno rješenje. Stoga razvijmo u Taylorov red $\sin\Theta$ oko $\Theta = 0$

$$\sin\Theta = \Theta - \frac{\Theta^3}{3!} + \frac{\Theta^5}{5!} - ... \tag{9.21}$$

gdje je Θ izražen u radijanima. Stoga ćemo aproksimirati $\sin\Theta \approx \Theta$, što je dobro za $\Theta \ll 1$. Fizičari često uzimaju 10 stupnjeva za gornju granicu. Koristeći $\sin\Theta \approx \Theta$ jednadžba (9.20) se može aproksimirati s

$$l\frac{d^2\Theta}{dt^2} = -g\Theta. \tag{9.22}$$

Ova diferencijalna jednadžba ima isti matemati"ki oblik kao jednadžba jednostavnog harmoničkog oscilatora (9.5) s koordinato Θ umjesto x, te konstantama l i g umjesto m i k. Stoga je po analogiji njeno rješenje

$$\Theta(t) = \Theta_0\cos(\omega t), \tag{9.23}$$

gdje je

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{9.24}$$

U ovom rješenju smo izabrali da je u trenutku $t = 0$, njihalo pušteno iz položaja $\Theta = \Theta_0$, tako da je pomak u fazi $\delta = 0$.

Period matematičkog njihala za male oscilacije je

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{9.25}$$

Primjer 9.4. (a) Nađite duljinu matematičkog njihala s malim oscilacijama čiji je period 1s. (b) Koliki bi bio period ovog njihala kad bi ga odnijeli na površinu Mjeseca gdje je gravitacija $g/6$?
Rješenje.
(a) $l = \frac{gT^2}{4\pi^2} = 0.25m$.
(b) $gT^2 = g_M T_M^2$ te je

$$T_M = T\sqrt{\frac{g}{g_M}} = T\sqrt{6} = 2.45s. \tag{9.26}$$