LINEARNA ALGEBRA

Borka Jadrijević

1. LINEARNI OPERATORI

- Kada izučavamo neku matematičku strukturu posebno nas zanimaju preslikavanja koja poštuju tu strukturu.
- Specijalno, linearni operatori poštuju strukturu linearnog prostora.

1.1 Definicija i osnovna svojstva

Definicija 1.1 Neka su U i V linearni prostori nad istim poljem F i

$$f : U \to V$$

neko preslikavanje. Kažemo da je to preslikavanje **linearni operator** ako ima ova svojstva:

i) *aditivnost,* tj.

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \quad \forall a, b \in U;$$

ii) *homogenost*, tj.

$$f(\alpha a) = \alpha f(a), \quad \forall \alpha \in F \text{ i } \forall a \in U.$$

Napomena: Koristimo još nazive: **homomorfizam linearnih prostora**, **linearno preslikavanje**, **linearna transformacija.**

Uočimo: Zbog i) (aditivnosti), za svaki linearni operator $f : U \to V$ vrijedi (dokazati!);

$$1. \quad f(\Theta_U) = \Theta_V;$$

$$2. \quad f(-a) = -f(a), \quad \forall a \in U.$$

Kriterij za prepoznavanje linearnog operatora:

Propozicija 1.1 Preslikavanje $f : U \to V$ je linearni operator onda i samo onda, ako za svaki $\alpha, \beta \in F$ i svaki $a, b \in U$ vrijedi[1]

$$f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b). \qquad (*)$$

Dokaz:

Poopćenje Propozicije 1.1:

Propozicija 1.2 Neka su $a_i \in U$ bilo koji vektori, $\alpha_i \in F$ bilo koji skalari, $i = 1, ..., k$. Onda za linearni operator $f : U \to V$ vrijedi

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(a_i).$$

Dokaz:

[1] svojstvo $(*)$ se naziva *svojstvo linearnosti*

Uočimo: Propozicija 1.2 nam govori da je linearni operator preslikava linearnu kombinaciju vektora u linearnu kombinaciju njihovih slika s *istim koeficijentima*.

Propozicija 1.3 Kompozicija linearnih operatora je linearni operator.

Dokaz:

1.2 Primjeri linearnih operatora

Primjer 1 Neka je V linearan prostor nad poljem F i $\lambda \in F$. Definiramo:

$$h : V \to V, \;\; h(x) = \lambda x, \; \forall x \in V.$$

Operator (preslikavanje) h je linearni operator (dokazati!) kojeg nazivamo **homotetija u prostoru V s koeficijentom** λ.

Specijalno linearni operatori su:

- za $\lambda = 0$ je $h(x) := n(x) = \Theta_V, \forall x \in V$ - **nul-operator**;
- za $\lambda = 1$ je $h(x) := e(x) = x, \forall x \in V$ - **jedinični operator (identiteta)**;

Primjer 2 Neka je L potprostor linearanog prostora V, tj. $L < V$.

2.1 Operator (preslikavanje)

$$i : L \to V, \;\; i\,(x) = x, \; \forall x \in L.$$

je linearni operator (dokazati!) kojeg nazivamo **inkluzija**.

2.2 Neka je M direktni komplement od L, tj. $V = L \oplus M$. Tada svaki $x \in V$ ima jednoznačan prikaz

$$x = a + b, \;\; a \in L, \; b \in M.$$

Definiramo:

$$p_M : V \to L,$$

$$p_M\,(x) = p_M\,(a + b) = a, \; \forall x \in V.$$

Operator (preslikavanje) p_M je linearni operator (dokazati!) kojeg nazivamo **projekcija** ili **projektor** prostora V **na potprostor** L **u smjeru** M.

2.3 Definiramo:

$$q : V \to V/L,$$
$$q\,(x) = x + L,\ \forall x \in V.$$

Operator (preslikavanje) q je linearni operator (dokazati!) kojeg nazivamo **prirodna projekcija** ili **kvocjentni operator** prostora V na kvocijentni prostor V/L.[2]

---

[2] Ako je L potprostor linearanog prostora V nad poljem F, tj. $L < V$, onda za svaki $x \in V$ definiramo skupove

$$x + L = \{x + a : a \in L\},$$

Može se pokazati da je:

· $x + L = L + x$, gdje je $L + x = \{a + x : a \in L\}$ (dokazati!).

· za $x, y \in V$, su skupovi $x + L$ i $y + L$ ili jednaki ili disjunktni (dokazati!).

Zbog toga je dobro definiran skup

$$V/L = \{x + L : x \in V\},$$

koji uz operacije definirane sa

1. $(x + L) + (y + L) = (x + y) + L,\ \forall\ (y + L),\ (x + L) \in V/L$
2. $\alpha\,(x + L) = \alpha x + L,\ \forall \alpha \in F,\ \forall\,(x + L) \in V/L$

ima strukturu vektorskog prostora nad poljem F (dokazati!)

1.3 Egzistencija i načini zadavanja linearnih operatora

- Ako su U i V linearni prostori nad istim poljem F, onda postoji barem jedan linearan operator $U \to V$, to je npr. nul-operator $n(x) = \Theta_V, \forall x \in U$.

- Pokazat ćemo da u slučaju $U, V \neq \{\Theta\}$ uvijek postoje i netrivijalni linearani operatori ($\neq$ nul-operatora).

Teorem 1.1 Ako je $\{a_1, ..., a_n\} \subset U$ baza za U, a skup $\{b_1, ..., b_n\} \subset V$ bilo koji $n-$člani skup vektora iz V, onda postoji točno jedan linearni operator $f : U \to V$ za koji vrijedi

$$f(a_i) = b_i, \quad \forall i = 1, ..., n.$$

Dokaz:

Uočimo: Teorem 1.1 nam govori da je linearni operator $f : U \to V$ jedinstveno zadan djelovanjem na bilo kojoj bazi od U.

Napomena: Tvrdnja Teorema 1.1 je istinita i u slučaju beskonačnodimenzionalnih prostora.

1.4 Izomorfizam linearnih prostora

Definicija 1.2 Neka su U i V linearni prostori nad istim poljem F i

$$f : U \to V$$

neki operator (preslikavanje). Kažemo da je to preslikavanje **izomorfizam linearnih prostora** ako je f:

i) linearni operator;

ii) bijekcija.

Izomorfizam prostora na sebe samog naziva se **automorfizam** od U ili **regularan operator**. Za operator koji nije regularan kažemo da je **singularan**.

<u>**Uočimo:**</u> Budući je izomorfizam $f : U \to V$ bijekcija, to je dobro definiran inverzni operator (preslikavanje)

$$f^{-1} : V \to U$$

(koji je također bijekcija). Vrijedi:

Propozicija 1.4

i) Jedinični operator (preslikavanje) je izomorfizam (automorfizam);

ii) Inverzni operator (preslikavanje) izomorfizma linearnih prostora je opet izomorfizam;

iii) Kompozicija izomorfizama operatora je izomorfizam.

Dokaz:

Definicija 1.3 Kažemo da je linearan prostor U **izomorfan** linearnom prostoru V i pišemo

$$U \cong V,$$

ako postoji barem jedan izomorfizam linearnih prostora $f : U \to V$.

Teorem 1.2 Realacija $\cong$, tj. relacija "biti izomorfan" je relacija ekvivalencije na klasi svih linearnih prostora nad istim poljem.

Dokaz:

<u>Uočimo:</u>

- Realacija "biti izomorfan" među linearnim prostorima nad istim poljem provodi rastav na disjunktne klase;
- Linearni prostori u istoj klasi su "jednaki" (apstraktno gledajući).

Propozicija 1.5 Neka je $f : U \to V$ izomorfizam linearnih prostora. Neka je $S \subset U$ bilo koji skup vektora iz U, a $T \subset V$ njihova slika po f, tj. $f(S) = T$.

i) Skup S je linearno nezavisan ako i samo ako je T linearno nezavisan.

ii) Skup S razapinje U ako i samo ako je T razapinje V.

<u>Dokaz:</u>

Korolar 1.3 Neka je $f : U \to V$ izomorfizam linearnih prostora. Onda svaka baza od U prelazi (po f), u neku bazu od V i obratno, svaka baza od V je slika (po f) neke baze prostora U.

<u>Dokaz:</u>

Iz Korolara 1.3 slijedi:

Korolar 1.4 Ako su U i V izomorfni prostori, onda je

$$\dim U = \dim V.$$

Dokaz:

Obrat Korolara 1.3:

Propozicija 1.6 Neka su U i V linearni prostori nad istim poljem F iste dimenzije. Onda su ti prostori izomorfni, tj. $U \cong V$.

Dokaz:

Karakterizacija izomorfnih prostora:

Teorem 1.3 Dva linearna prostora nad istim poljem F su izomorfna ako i samo ako imaju istu dimenziju.

Dokaz:

Uočimo:

- Linearni prostori iste dimenzije su "jednaki" (apstraktno gledajući).

Korolar 1.5 Svaki $n-$dimenzionalni linearni prostor V nad poljem F je izomorfan s koordinatnim prostorom F^n.

Dokaz:

Napomena: Sve što vrijedi za linearni prostor F^n vrijedi i za svaki drugi $n-$dimenzionalni linearni prostor V. Kažemo da F^n **reprezentira** ili da je **standardni model** za linearne prostore dimenzije n.

1.5 Rang i defekt

- Linearni operatori poštuju i svojstvo "biti potprostor".

Propozicija 1.7 Neka je $f : U \to V$ linearni operator, $L < U$ i $M < V$ potprostori danih prostora. Tada je $f(L) \subset V$ potprostor prostora V, tj. $f(L) < V$ i $f^{-1}(M) \subset U$ potprostor prostora U, tj. $f^{-1}(M) < U$.

Dokaz:

Iz Propozicije 1.7 vidimo da su svakom linearnom operatoru $f : U \to V$ pridružena dva potprostora:

- $f(U) < V$ kojeg nazivamo **slikom** linearnog operatora f i označijemo $\operatorname{Im} f$ ili $S(f)$.

- $f^{-1}(\Theta_V) < U$ kojeg nazivamo **jezgrom** linearnog operatora f i označijemo $Ker\, f$ ili $J(f)$.

Definiramo:

- **Rang** linearnog operatora f kao dimenzija njegove slike, tj.
$$r = r(f) = \dim S(f);$$

- **Defekt** linearnog operatora f kao dimenzija njegove jezgre, tj.
$$d = d(f) = \dim J(f);$$

Teorem 1.4 Neka je $f : U \to V$ linearni operator. Onda je suma ranga i defekta od f jednaka dimenziji prostora U, tj.

$$r(f) + d(f) = \dim U;$$

Dokaz:

Uočimo:

- Za sve linearne operatore koji djeluju na istom prostoru U suma ranga i defekta je konstantna i jednaka $\dim U$.

1.6 Prostor $Hom(U,V)$

Neka su U i V linearni prostori nad istim poljem F i neka je s

$$Hom(U,V) = \{f : U \to V : f \text{ linearn operator}\}$$

označen skup svih linearnih operatora iz U u V.

Napomena: Za $Hom(U,V)$ koristimo još oznake: $\{U \to V\}$, $Lin(U,V)$.

Skup $Hom(U,V)$ se na prirodan način može snabdjeti strukturom vektorskog prostora:

Propozicija 1.8 Neka su $f : U \to V$, $g : U \to V$ linearni operatori, tada je preslikavanje $f+g : U \to V$, gdje je

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad \forall x \in U$$

linearni operator.

Dokaz:

Propozicija 1.9 Skup $Hom(U,V)$ je u odnosu na zbrajanje linearnih operatora Abelova grupa.

Dokaz:

Propozicija 1.10 Neka je $f : U \to V$ linearni operator i $\lambda \in F$ bilo koji skalar, tada je preslikavanje $\lambda f : U \to V$, gdje je

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x), \quad \forall x \in U$$

linearni operator.

Dokaz:

Teorem 1.5 Skup $Hom(U,V)$ je, u odnosu na operacije zbrajanja linearnih operatora i množenja sa skalarom linearni prostor nad poljem F.

Dokaz:

Prirodno pitanje je: Kolika je dimenzija prostora $Hom(U,V)$?

Teorem 1.6 Neka su U i V (konačnodimenzionalni) linearni prostori nad istim poljem F. Onda je

$$\dim Hom(U,V) = \dim U \cdot \dim V.$$

Dokaz:

Ako je $U = V$ onda uvodimo oznaku

$$Hom(V, V) := HomV,$$

pa, po Teoremu 1.6, odmah slijedi

$$\dim HomV = (\dim V)^2 .$$

Budući je u $HomV$ dobro definirana kompozicija linearnih operatora, onda definiramo **produkt** linearnih operatora na sljedeći način**:**

Neka su $f : V \to V$, $g : V \to V$ linearni operatori. Definiramo preslikavanje

$$fg : V \to V,$$

gdje je

$$(fg)(x) := (f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad \forall x \in V,$$

koje je opet linearan operator iz $HomV$ (po Propoziciji 1.3).

Na taj način smo definirali novu binarnu operaciju u $HomV$ sa svojstvima danim sljedećom propozicijom.

Propozicija 1.11 Množenje linearnih operatora u linearnom prostoru $HomV$ ima sljedeća svojstva:

i) *kvaziasocijativnost,* tj.

$$(\lambda f)\, g = \lambda\, (fg) = f\, (\lambda g)\,,$$

za svaki $\lambda \in F$ i za svaki $f, g \in HomV$;

ii) *distributivnost u odnosu na zbrajanje u* $HomV$, tj.

$$\begin{aligned} f\,(g+h) &= fg + fh, \\ (f+g)\,h &= fh + gh \end{aligned}$$

za svaki $f, g, h \in HomV$.

Dokaz:

Budući je:

- $HomV$ linearni prostor nad F (Teorem 1.5);

- binarna operacija množenja (def. kao komponiranje) u $HomV$ ima svojstva *i)* i *ii)* iz Propozicije 1.11,

  onda $HomV$ ima strukturu **algebre nad poljem** F. Algebru $HomV$ još nazivamo **linearna algebra.**

Uočimo: Množenje u algebri $HomV$:

- je asocijativno (jer je komponiranje asocijativno);
- ima neutralni element $e : V \to V$ ($e-$ jedinični operator);
- nije komutativno (jer je komponiranje nije komutativno, osim za $V = \{\Theta\}$).

Zaključak: *Neka je $V \neq \{\Theta\}$ linearni prostor nad poljem F. Onda je $HomV$, uz komponiranje linearnih operatora kao množenje, asocijativna, nekomutativna algebra s jedinicom nad poljem F.*

Za linearni operator $f \in HomV$ definiramo induktivno *potencije*:

$$f^2 \stackrel{def}{=} ff,$$

$$f^m \stackrel{def}{=} f^{m-1}f,$$

$$f^0 \stackrel{def}{=} e.$$

Ako je $p(x) = \alpha_m x^m + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$, $\alpha_i \in F$ proizvoljan polinom stupnja m, tada u algebri $HomV$ možemo promatrati *polinome* oblika

$$p(f) = \alpha_m f^m + ... + \alpha_1 f + \alpha_0 e, \quad \alpha_i \in F.$$

Svaki takav polinom je opet linearni operator iz $HomV$ i za njega vrijede standardna pravila računanja s polinomima. Npr.

$$f^2 - e = (f + e)(f - e)$$

Oprez: Potećkoće nastupaju ako se promatraju polinomi u više varijabla. Npr.

$$f^2 - g^2 \neq (f + g)(f - g)$$

1.7 Linearni funkcionali. Dualni prostor.

Neka je V linearni prostor nad poljem F. Budući je polje F vektorski prostor nad samim sobom dimenzije $\dim F = 1$, možemo promatrati linearne operatore

$$l : V \to F.$$

Takve, specijalne linearne operatore nazivamo **linearni funkcionali.**
Sva preslikavanja iz linearni prostora V u odgovarajuće polje nazivamo **funkcionali.**

Budući su linearni funkcionali linearni operatori, za njih vrijedi sve do sada rečeno o linearnim operatorima. Posebno je za linearni funkcional $l : V \to F$

$$r + d = \dim V,$$

gdje je r rang, a d defekt od l. Kako je

$$r \leq \dim F = 1,$$

onda vrijedi

$$d \geq \dim V - 1.$$

Primjeri linearnih funkcionala

Neka je F^n koordinatni prostor nad poljem F.

- Za svaki $i = 1, ..., n$, preslikavanje

$$p_i : F^n \to F,$$

$$p_i \left(\alpha_1, ..., \alpha_i, ...\alpha_n\right) := \alpha_i,$$

  kojeg nazivamo $i-$**ta koordinatna funkcija** je linearni funkcional (dokazati!).

- Općenitije, neka je $\lambda_1, ...\lambda_n \in F$ bilo koji fiksni izbor skalara iz F. Definiramo

$$l : F^n \to F,$$

$$l(\alpha_1, ..., \alpha_i, ...\alpha_n) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i,$$

je linearni funkcional (dokazati!). Može se pokazati da se na taj način mogu dobiti svi linearni funkcionali na F^n (dokazati!).

Neka je

$$Hom(V, F) := V^*$$

skup svih linearnih funkcionala koji djeluju na linearnom prostoru V. To je linearni prostor (Teorem 1.5), i to, po Teorem 1.6, dimenzije

$$\dim V^* = \dim V \cdot \dim F = \dim V,$$

kojeg nazivamo **dualni prostor** ili **dual** od V.

Napomena: Za beskonačnodimenzionalne linearne prostore V, V i V^* nisu iste dimenzije. Pokazuje se: $\dim V^* = 2^{\dim V}$.

Propozicija 1.12 Neka je V konačnodimenzionalni linearni prostor. Onda je dualni prostor V^* prostora V izomorfan s V.

Dokaz: Direktno iz Teorema 1.3. ($\dim V^* = \dim V$).$\square$

Pitanje: Kako izomorfizam konstruirati?

- Odaberemo bazu $B = \{a_1, ..., a_n\}$ u V i bazu $\{1\}$ u F;

- Po konstrukciji u dokazu Teorema 1.6, baza u V^* je dana funkcionalima definiranima sa:

$$l_j(a_k) := f_{1j}(a_k) = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

  za $j, k = 1, ..., n$. Kraći zapis

$$l_j(a_k) := \delta_{jk}$$

  gdje je δ_{jk} oznaka za **Kroneckerov simbol**, definirana sa

$$\delta_{jk} := \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}.$$

Dakle,

$$B^* = \{l_1, ..., l_n\}$$

je baza prostora V^* i ona je, očito, jednoznačno određena izborom baze B u V (Teorem 1.1). Bazu B^* nazivamo **dualna baza** za bazu B.

- Dakle svaka baza $B \subset V$ definira jedan standardni izomorfizam

  $$\Phi_B : V \to V^*$$

  dan sa

  $$\Phi_B(a_i) := l_i, \quad i = 1, ..., n.$$

Budući je V^* također linearni prostor, i on ima svoj dual $(V^*)^* := V^{**}$ kojeg nazivamo **bidual** od V. Elementi (vektori) u vektorskom prostoru V^{**} su linearni funkcionali definirani na prostoru V^* svih linearnih funkcionala koji djeluju na linearnom prostoru V. Imamo

$$\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V.$$

Konstrukciju možemo nastaviti, pa dolazimo do niza

$$V,\ V^*,\ V^{**},\ V^{***}, ...$$

linearnih prostora nad F, pri čemu je svaki prostor dual svog prethodnika. Svi ti prostori su iste dimenzije, tj. **izomorfni**. Izomorfizmi općeniti **ovise o izboru baze.**

Međutim, izomorfizam $V \to V^{**}$ može se konstruirati bez posredovanja baze na sljedeći način:

Neka je $a \in V$ dani vektor. Definiramo funkcional (preslikavanje) na V^* sa

$$u_a : V^* \to F,$$

$$u_a(l) = l(a), \quad \forall l \in V^*.$$

Sada ćemo pokazati da je $u_a \in V^{**}$, tj. da je u_a linearan funkcional na V^* (linearan operator iz V^* u F).

Propozicija 1.13 Funkcional u_a je linearan na V^*, tj. $u_a \in V^{**}$.

<u>Dokaz:</u>

Pitanje: Je li se svaki element iz V^{**} može prikazati na gore opisan način?

Odgovor: Može, ako je V konačnodimenzionalni linearni prostor. Dakle, u tom slučaju, za svaki $w \in V^{**}$ postoji $a \in V$ takav da je $w(l) = u_a(l) = l(a)$ (dokaz kasnije).

Sada, na prirodan način, definiramo operator (preslikavanje)

$$\Phi : V \to V^{**},$$

$$\Phi(a) = u_a, \ \ \forall a \in V.$$

Sada ćemo pokazati da je Φ izomorfizam vektorskih prostora V i V^{**}. Dakle, treba pokazati:

- Φ je bijekcija (injekcija i surjekcija);
- Φ je linearan.

Injektivnost:

Lema 1.1 Neka je $a \in V$ vektor sa svojstvom da je $l(a) = 0$ za svaki funkcional $l \in V^*$, onda je $a = \Theta$.

Dokaz:

Propozicija 1.14 Operator (preslikavanje) Φ je injekcija.

<u>Dokaz:</u>

<u>Linearnost i surjektivnost :</u>

Teorem 1.7 Neka je V konačnodimenzionalni linearni prostor. Onda je operator (preslikavanje) Φ je izomorfizam linearnih prostora.

<u>Dokaz:</u>

<u>Uočimo:</u> Dokazujući surjektivnost od Φ smo dokazali i da je svaki linearan funkcional w na V^* ($w \in V^{**}$) oblika

$$w = u_a.$$

Naime, budući je Φ surjektivan za svaki $w \in V^{**}$ postoji $a \in V$ takav da je $\Phi(a) = w$, tj. $w = u_a$.

Operator Φ nazivamo **prirodni** ili **kanonski izomorfizam** prostora V i njegovog biduala V^{**}.

Budući su prostori izomorfni identificiramo $u_a \in V^{**}$ i $a \in V$, i zapisujemo $u_a = a$. Uz ovu identifikaciju je i

$$V^{**} = V,$$

tj. za V konačnodimenzionalni linearni prostor dual duala je jednak polaznom prostoru, što nazivamo svojstvom **refleksivnosti**.

Općenito: Linearan prostor V je **refleksivan** ako je prirodno izomorfan (bez posredovanja baze) sa svojim bidualom, tj. ako vrijedi $V^{**} = V$.

Uočimo: Iz Teorema 1.7 slijedi:

$$V \text{ kon. dim. lin. prostor} \Longrightarrow V \text{ je refleksivan.}$$

Može se pokazati da vrijedi i obrat, tj. da vrijedi:

Teorem 1.8 Linearni prostor V je konačnodimenzionalan ako i samo ako je refleksivan.

Napomena: Za beskonačnodimenzionalne linearne prostore ovo ne vrijedi. Dakle, refleksivnost karakterizira konačnodimenzionalne linearne prostore.