Svojstva:

Neka je λ skalar i A, B matrice. Ako su sve operacije dobro definirane, tada je:

1. $\left(A^T\right)^T = A$,
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$,
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$,
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Kvadratnu matricu za koju je $A = A^T$ nazivamo *simetrična matrica*.

Za kvadratnu matricu A (samo tada!) definiramo *potencije*

$$A^2 \stackrel{def}{=} A \cdot A,$$

$$A^p \stackrel{def}{=} \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{p \text{ faktora}},$$

$$A^0 \stackrel{def}{=} I.$$

Ako je $f(x) = \alpha_p x^p + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$ proizvoljan polinom stupnja p, tada definiramo *matrični polinom* kao

$$f(A) \stackrel{def}{=} \alpha_p A^p + ... + \alpha_1 A + \alpha_0 I.$$

Primjer Zadan je polinom $f(x) = 2x^2 - x + 3$ i matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Treba odrediti $f(A)$.

Budući je

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

onda je

$$f(A) = 2A^2 - A + 3I =$$

$$= 2 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

<u>**Važan primjer**</u> - matrični zapis sustava od m linearnih jednadžbi sa n nepoznanica.

Sustavu

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{S1}$$

možemo pridružiti tri matrice

$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ <u>*matrica (koeficijenata) sustava*</u>

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ <u>*vektor (matrica) nepoznanica*</u>

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ <u>*vektor (matrica) slobodnih koeficijenata*</u>

Sada je

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{bmatrix},$$

pa iz (S1) slijedi jednakost matrica

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Sustavu pridružujemo i <u>*proširenu matricu sustava*</u>

$$A_p = [A \,|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right].$$

Općenito, matrični zapis sustava od m linearnih jednadžbi sa n nepoznanica

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1m}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2m}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_{21} & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad \text{(S)}$$

je

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m2} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ *matrica sustava*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ *vektor nepoznanica*

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$ *vektor slobodnih koeficijenata*

Sustavu (S) pridružujemo i *proširenu matricu sustava*

$$A_p = [A \,|\mathbf{b}]\,.$$

Rješenje sustava (S) je svaka uređena $n-$torka $(x_1, x_2, ..., x_n)$ koja sve jednadžbe sustava sustav zadovoljava identički.

Za dva sustava kažemo da su *ekvivalentna* ukoliko imaju isti skup rješenja.

Vrijedi: rješenje sustava se ne mijenja, tj. dobivamo ekvivalentan sustav, ako izvršimo bilo koju od sljedećih radnji:

i) neku jednadžbu pomnožimo brojem različitim od 0,
ii) zamijenimo dvije jednadžbe,
iii) jednu jednadžbu (pomnoženu s nekim brojem) pribrojimo drugoj.

Ove radnje odgovaraju sljedećim radnjama na proširenoj matrici sustava A_p:

i') neki redak pomnožimo brojem različitim od 0,
ii') zamijenimo dva retka,
iii') jedan redak (pomnožen s nekim brojem) pribrojimo drugome.

Radnje i'), ii'), iii') nazivamo *elementarne transformacije* nad retcima matrice.

Napomena: elementarne transformacije nad retcima matrice mogu se dobiti množenjem s tri tipa matrica koje se neznatno razlikuju od jedinične, a nazivaju se *elementarne matrice transformacija*.

Primjer Želimo li zamijeniti prvi i treći redak (el.tr. ii')), matricu A moramo pomnožiti s matricom P_{13}

$$P_{13}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & -6 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Želimo li prvi redak pomnožiti s $\frac{1}{2}$ (el.tr. i')), matricu moramo pomnožiti s matricom $D_1\left(\frac{1}{2}\right) = D_1$

$$D_1 A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & -6 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Želimo li prvi redak pomnožen s 3 dodati drugom retku (el.tr. iii')), matricu moramo pomnožiti s matriciom $P_{12}\left(3\right)$

$$P_{12}\left(3\right)\cdot A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Primjer Zadani su sustavi:

1.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Ekvivalentni sustavi:

$$\begin{array}{c} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = -2 \end{array} \overset{2\cdot I + II}{\sim} \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 = 1 \\ -x_2 = -4 \end{array} \overset{-1\cdot II}{\sim}$$

$$\begin{array}{c} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_2 = 4 \end{array} \overset{-2\cdot II + I}{\sim} \begin{array}{c} x_1 = -7 \\ x_2 = 4 \end{array}$$

Rješenje: $(x_1, x_2) = (-7, 4)$.

Odgovarajuće proširene matrice sustava

$$A_p = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{array}\right] \overset{2\cdot I + II}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{array}\right] \overset{-1\cdot II}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \overset{-2\cdot II + I}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Gornji sustav (zamjenom: $x_1 \mapsto x$ i $x_2 \mapsto y$) možemo geometrijski interpretirati kao dva pravca u ravnini

$$\begin{aligned} p_1 \ldots x + 2y &= 1 \\ p_2 \ldots 2x + 3y &= -2 \end{aligned}$$

koji se sijeku u točki $(x, y) = (-7, 4)$.

2.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2 \\ -2x_1 - 4x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Ekvivalentni sustavi:

$$\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 = 1 \\ -2x_1 - 4x_2 = 1 \end{array} \overset{2\cdot I + II}{\sim} \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 0 = -3 \end{array},$$

pa nema rješenja.

Odgovarajuće proširene matrice sustava

$$A_p = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{array}\right] \overset{2\cdot I + II}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Gornji sustav (zamjenom: $x_1 \mapsto x$ i $x_2 \mapsto y$) možemo geometrijski interpretirati kao dva paralelna pravca u ravnini

$$\begin{aligned} p_1 \; \ldots \; x + 2y &= 1 \implies y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ p_2 \; \ldots \; -2x - 4y &= 1 \implies y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(ne sijeku se).

3.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 5 \\ -2x_1 - 6x_2 &= -10 \end{aligned}$$

Ekvivalentni sustavi:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 = 5 \\ -2x_1 - 6x_2 = -10 \end{aligned} \quad \overset{2\cdot I + II}{\sim} \quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 = 5 \\ 0 = 0 \end{aligned},$$

pa imamo beskonačno rješenja danih sa $x_2 = t$, $x_1 = -3x_2 + 5 = -3t + 5$, $t \in \mathbb{R}$, tj.

$$(x_1, x_2) = (-3t + 5, t)\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Odgovarajuće proširene matrice sustava

$$A_p = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ -2 & -6 & -10 \end{array}\right] \overset{2\cdot I + II}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Gornji sustav (zamjenom: $x_1 \mapsto x$ i $x_2 \mapsto y$) možemo geometrijski interpretirati kao dva pravca u ravnini koji se podudaraju

$$p_1 \ldots\ x + 3y = 5 \implies y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$p_2 \ldots\ -2x - 6y = -10 \implies y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

(pravci se sijeku u svim točkama - jednadžbe predstavljaju isti pravac).

Linearna nezavisnost

Neka su $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,...,$\mathbf{a}_k$ vektori istog tipa i $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$. Vektor

$$\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + ... + \lambda_k\mathbf{a}_k$$

nazivamo *linearna kombinacija* vektora $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,...,$\mathbf{a}_k$.

Definicija 5.7 Za vektore $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,...,$\mathbf{a}_k$ kažemo da su *linearno nezavisni* ako za sve $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + ... + \lambda_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0.$$

U protivnom kažemo da su vektori $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,...,$\mathbf{a}_k$ *linearno zavisni*.

Odnosno, za vektore $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,...,$\mathbf{a}_k$ kažemo da su linearno zavisni ako postoje skalari $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$, od kojih je barem jedan različit od nule, takvi da je

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + ... + \lambda_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Ako su vektori $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,...,$\mathbf{a}_k$ linearno zavisni, onda barem jedan od njih možemo izraziti kao linearnu kombinaciju ostalih, i obratno, ako se barem jedan od vektora $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,...,$\mathbf{a}_k$ može izraziti kao linearna kombinacija ostalih, onda su vektori $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,...,$\mathbf{a}_k$ linearno zavisni.

Primjer 1 Ispitajte linearnu nezavisnost vektora

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 0 \\ \lambda_1 + 0 + \lambda_3 \\ 0 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \Longrightarrow \lambda_2 = -\lambda_3 \end{array}$$

$$-2\lambda_3 = 0 \Longrightarrow \lambda_3 = 0 = \lambda_1 = \lambda_2,$$

pa su vektori linearno nezavisni.

Primjer 2 Ispitajte linearnu nezavisnost vektora

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3 \\ \lambda_1+0+2\lambda_3 \\ 0+\lambda_2+\lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} \lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3 = 0 & & \\ \lambda_1+2\lambda_3 = 0 & \Longrightarrow & \lambda_1 = -2\lambda_3 \\ \lambda_2+\lambda_3 = 0 & \Longrightarrow & \lambda_2 = -\lambda_3 \end{array}$$

$$-2\lambda_3 - \lambda_3 + 3\lambda_3 = 0 \Longrightarrow \lambda_3 = t \Longrightarrow \lambda_1 = -2t, \ \lambda_2 = -t$$

Za $t = 1$ imamo $\lambda_3 = 1$, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, pa su vektori linearno zavisni. Sada je npr.

$$-2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0} \ \Longrightarrow \ \mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$$

Rang matrice

Rang matrice A jednak je maksimalnom broju linearno nezavisnih stupaca.

Maksimalan broj linearno nezavisnih stupaca jednak je maksimalnom broju linearno nezavisnih redaka matrice A.

Ako je matrica tipa $m \times n$, tada je očito

$$rang\,(A) \leq \min\{m, n\}\,.$$

Matrice A i B istog tipa su *ekvivalentne* ako imaju isti rang. Pišemo

$$A \sim B.$$

Ako su matrice A i B ekvivalentne onda se matrica B iz matrice A može dobiti nizom elementarnih transformacija nad retcima matrice A, te istih operacija nad stupcim i obratno.

Primjer: Matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & -6 \end{bmatrix},$$

je ekvivalentna matrici

$$B = P_{12}(3) \cdot D_1\left(\frac{1}{2}\right) \cdot P_{13} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix},$$

odnosno

$$A \sim A_1 \sim A_2 \sim B.$$

Reducirani oblik matrice

Cilj: Matricu svesti na njoj ekvivalentnu koja će imati što jednostavniji oblik.

Način: Elementarnim transformacijama nad retcima matrice A matricu svodimo na tzv. reducirani oblik A_R koji je opisan sljedećim uvjetima:

- Prvi ne-nul element (stožer) svakog retka iznosi 1. Svi preostali elementi u stupcu tog stožernog elementa jednaki su 0.
- Svi retci koji koji sadrže samo nule (ako takvih ima), nalaze se iza onih redaka koji sadrže barem jedan ne-nul element.
- Svaki naredni stožer (gledajući po retcima) nalazi se desno (u retku s većim indeksom) od prethodnog stožera.

Vrijedi:

- $rang\,(A) = rang\,(A_R)$
- $rang\,(A)$ jednak je broju ne-nul redaka u reduciranom obliku matrice A_R, tj. broju stupaca koji sadrže stožer.

Primjer: Reducirani oblici matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rang\,(A) = 3$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rang\,(B) = 2$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow rang\,(C) = 3$$

Matrice koje nisu svedene na reducirani oblik:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{-2\cdot III+I}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = D_R$$

$$\Rightarrow rang\,(D) = 3.$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{I \leftrightarrows II}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_R$$

$$\Rightarrow rang\,(E) = 3.$$

$$F=\begin{bmatrix}1&0&0\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ 0&0&1\end{bmatrix}\overset{II\leftrightarrows III}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0\\ 0&0&1\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix}=F_R\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ rang\,(F)=2.$$

Ako je zadan sustav (S) pitanja su:

- Kad sustav ima rješenje?
- Ako rješenje postoji, je li jedinstveno ili ne?
- Ako rješenje postoji kako ga naći?

Na prva dva pitanja daje odgovor sljedeći teorem:

Teorem 5.8 (Kronecker-Capellijev)

i) Sustav (S) ima rješenje ako i samo ako je $rang\,([A\,|\mathbf{b}]) = rang\,(A) = r$.

ii) Ako je $rang\,([A\,|\mathbf{b}]) = rang\,(A) = r$ onda je sustav ekvivalentan sustavu koji se dobije uzimanjem r linearno nezavisnih jednadžbi, tj. redaka matrice $[A\,|\mathbf{b}]$.

iii) Neka je $rang\,([A\,|\mathbf{b}]) = rang\,(A) = r$ i n broj nepoznanica. Sustav ima jedinstveno rješenje ako je $r = n$. Ako je $r < n$ sustav ima beskonačno rješenja izraženih pomoću $n - r$ parametara.

<u>Dokaz:</u> i)

Gaussova-Jordanova metoda eliminacije

Osnovni cilj: Riješiti sustav (S) tako da ga svedemo na njemu ekvivalentan sustav iz kojeg lako određujemo rješenje.

Način: Sustavu (S) pridružujemo pripadnu proširenu matricu sustava

$$A_p = [A\,|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m2} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Nizom elementarnih transformacija nad retcima matrice A_p, cilj je doći do ekvivalentne matrice oblika

$$A_p' = [A_R\,|b']$$

koja će biti proširena matrica sustava iz kojeg se lako odredi rješenje.

Vrijedi:

- Ako matrica A_R ima manje ne-nul redaka nego $[A_R\,|b']$, onda je $rang\,(A) < rang\,([A\,|\mathbf{b}])$, pa sustav nema rješenje.

- Ako matrice A_R i $[A_R\,|b']$ imaju isti broj ne-nul redaka r, onda je $rang\,(A) = rang\,([A\,|\mathbf{b}]) = r$, pa sustav ima rješenje i to:

  – ako je $r = n$, imamo jedinstveno rješenje ($A_R = I$).

  – ako je $r < n$, imamo $(n-r)-$parametarsko rješenje (nepoznanice čiji pripadni stupci ne sadrže stožere su parametri),

gdje je n broj nepoznanica.

Primjer: Zadani su sustavi:

1.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Odgovarajuća proširena matrica sustava je

$$A_p = [A|\,\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{array}\right] \overset{-2\cdot I+II}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{array}\right] \overset{-1\cdot II}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \overset{-2\cdot II+I}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right] = [A_R|\,\mathbf{b}']$$

Dakle, ovdje je $m = n = 2$, te $r = 2$, pa imamo jedinstveno rješenje: $(x_1, x_2) = (-7, 4)$.

2.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2 \\ -2x_1 - 4x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Odgovarajuća proširena matrica sustava je

$$A_p = [A|\,\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{array}\right] \overset{2\cdot I+II}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right] = [A_R|\,\mathbf{b}']$$

Dakle, ovdje je $m = n = 2$, te $rang\,(A) = 1 < 2 = rang\,([A\,|\mathbf{b}])$, pa nemamo rješenje.

3.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 5 \\ -2x_1 - 6x_2 &= -10 \end{aligned}$$

Odgovarajuća proširena matrica sustava je

$$A_p = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ -2 & -6 & -10 \end{array}\right] \overset{2\cdot I+II}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [A_R|\,\mathbf{b}']$$

Dakle, ovdje je $m = n = 2$, te $rang\,(A) = rang\,([A\,|\mathbf{b}]) = r = 1 < 2 = n$ i $n - r = 1$, pa imamo jednoparametarsko rješenje dano sa

$$(x_1, x_2) = (-3t + 5, t)\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$