Gaussova metoda eliminacije

Sustavu (S) pridružimo matricu $A_p = [A\,|b]$. Nizom elementarnih transformacija nad retcima matrice $A_p = [A\,|b]$ i zamjenom stupaca matrice A, cilj je doći do ekvivalentne matrice oblika

$$[A\,|b] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{cccccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & \cdots & a'_{1r} & a'_{1r+1} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & \cdots & a'_{2r} & a'_{2r+1} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a'_{rr} & a'_{rr+1} & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_m \end{array}\right]$$

gdje su elementi $a'_{11}, a'_{22}, ..., a'_{rr}$ svi različiti od 0.

Sada je $rang\,(A) = r$. Ako je:

- barem jedan od $b'_{r+1}, ..., b'_m$ različit od 0, tada je $rang\,(A) = r < rang\,(A_p) = r+1$, pa sustav nema rješenje.
- $b'_{r+1} = ... = b'_m = 0$, tada je $rang\,(A) = rang\,(A_p) = r$, pa sustav ima rješenje i to:
  - ako je $r = n$, imamo jedinstveno rješenje,
  - ako je $r < n$, imamo $(n-r)-$parametarsko rješenje, a nepoznanice kojima pripadaju stupci $r+1, ..., n$ su parametri.

Primjer: Zadani su sustavi:

1.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Gaussova metoda eliminacije:

Odgovarajuća proširena matrica sustava je

$$A_p = [A|\,\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \underset{-1\cdot I\ r.+III\ r.}{\overset{-2\cdot I\ r.+II\ r.}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

$$\overset{II\ st. \leftrightarrows III\ st.}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

Dakle, ovdje je $m = n = 3$, te $rang\,(A) = rang\,(A_p) = r = 3$, pa imamo jedinstveno rješenje:

$$\left.\begin{array}{c} x_1 + x_3 + 2x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \\ -x_2 = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x_3 = 1 \\ x_2 = -6 \\ x_1 = -2 - x_3 - 2x_2 = 9 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (9, 1, -6)$$

Gauss-Jordanova metoda eliminacije:

Odgovarajuća proširena matrica sustava je

$$A_p = [A|\,\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \underset{-1\cdot I\ r.+III\ r.}{\overset{-2\cdot I\ r.+II\ r.}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

$$\overset{II\ r. \leftrightarrows III\ r.}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{-1\cdot II\ r}{\overset{2\cdot II\ r+Ir.}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{-1\cdot III\ r.+I\ r}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] = [A_R|\,\mathbf{b}']$$

Dakle, ovdje je $m = n = 3$, te $rang\,(A) = rang\,(A_p) = r = 3$, pa imamo jedinstveno rješenje $(x_1, x_2, x_3) = (9, 1, -6)$.

2.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Gaussova metoda eliminacije:

Odgovarajuća proširena matrica sustava je

$$A_p = [A|\,\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{-2\cdot I\ r.+III\ r.}{\overset{-2\cdot I\ r.+II\ r.}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\overset{II\ r.+III\ r.}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right] \left(\overset{II\ st. \leftrightarrows III\ st.}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right] \right)$$

Dakle, ovdje je $m = n = 3$, te $rang\,(A) = 2$, $rang\,(A_p) = 3$, pa nema rješenja.

Gauss-Jordanova metoda eliminacije:

Odgovarajuća proširena matrica sustava je

$$A_p = [A|\,\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{-2\cdot I\ r.+III\ r.}{\overset{-2\cdot I\ r.+II\ r.}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\overset{II\ r.+III\ r.}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right] \overset{-1\cdot II\ r.+I\ r}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right] = [A_R|\,\mathbf{b}']$$

Dakle, ovdje je $m = n = 3$, te $rang\,(A) = 2$, $rang\,(A_p) = 3$, pa nema rješenja.

3.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= -5 \end{aligned}$$

<u>Gaussova metoda eliminacije</u>:

Odgovarajuća proširena matrica sustava je

$$A_p = [A|\,\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -5 \end{array}\right] \underset{-2\cdot I\ r.+III\ r.}{\overset{-2\cdot I\ r.+II\ r.}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\overset{II\ r.+III\ r.}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{II\ st. \leftrightarrows III\ st.}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dakle, ovdje je $m = n = 3$, te $rang\,(A) = rang\,(A_p) = 2$, pa imamo jednoparametarsko rješenje:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_3 + 2x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x_3 = 1 \\ x_2 = t \\ x_1 = -2 - x_3 - 2x_2 = -3 - 2t \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (-3 - 2t,\ t,\ 1)\,,\ t \in \mathbb{R}.$$

Gauss-Jordanova metoda eliminacije:

Odgovarajuća proširena matrica sustava je

$$A_p = [A|\,\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -5 \end{array}\right] \underset{-2\cdot I\ r.+III\ r.}{\overset{-2\cdot I\ r.+II\ r.}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\overset{II\ r.+III\ r.}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{-1\cdot II\ r.+I\ r}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [A_R|\,\mathbf{b}']$$

Dakle, ovdje je $m = n = 3$, te $rang\,(A) = rang\,(A_p) = 2$, pa imamo jednoparametarsko rješenje:

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 = -3 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x_3 = 1 \\ x_2 = t \\ x_1 = -3 - 2x_2 = -3 - 2t \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (-3 - 2t,\ t,\ 1)\,,\ t \in \mathbb{R}.$$

Ako je u sustavu (S) $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$, tj. ako je (S) oblika

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1m}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2m}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_{21} & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \qquad \text{(S-h)}$$

ili u matričnom zapisu

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

onda taj sustav nazivamo <u>*homogeni*</u> sustav od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica.

Homogeni sustav uvijek ima <u>*trivijalno*</u> rješenje $(x_1, x_2, ..., x_n) = (0, 0, ..., 0)$ ili matrično $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Iz Teorema 5.7 (K-C) slijedi:

- sustav (S-h) ima trivijalno rješenje ako i samo ako je $rang\,(A) = n$,
- sustav (S-h) ima parametarsko rješenje (netrivijalna) ako i samo ako je $rang\,(A) < n$.

Primjer:

1.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ -2x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Odgovarajuća proširena matrica sustava je

$$A_p = [A|\,\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right] \overset{2\cdot I + II}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [A_R|\,\mathbf{b}']$$

Dakle, ovdje je $m = n = 2$, te $rang\,(A) = r = 1$, pa imamo parametarsko rješenje: $(x_1, x_2) = (-2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

2.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Odgovarajuća proširena matrica sustava je

$$A_p = [A|\,\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \overset{2\cdot I + II}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{2\cdot II + I}{\overset{-1\cdot II}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = [A_R|\,\mathbf{b}']$$

Dakle, ovdje je $m = n = 2$, te $rang\,(A) = r = 2$, pa imamo jedinstveno rješenje: $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

Determinante

Svakoj kvadratnoj matrici A pridružen je skalar - njena *determinanta.*
Taj broj označavamo s $\det A$ ili $|A|$, odnosno

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Budući je zapis sličan kao kod matrica i ovdje govorimo o: elementima, retcima, stupcima, dijagonali, redu determinante.
Važno: Matrica je pravokutna tablica, a determinanta broj. *Koji?*

Postoje dva načina definiranja determinante. Mi ćemo determinante definirati induktivno (od matrica malog reda n).

Za $n = 1$, tj. za matricu $A = [a_{11}]$ definiramo

$$\det A = \det [a_{11}] = a_{11}.$$

Za $n = 2$, tj. za marticu drugog reda definiramo

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Za $n = 3$, tj. za marticu trećeg reda definiramo

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11} \left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} \right) - a_{12} \left(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23} \right) + \\ &\quad + a_{13} \left(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} \right) \end{aligned}$$

Označimo s M_{11} determinantu matrice koju dobijemo brisanjem prvog retka i prvog stupca matrice A :

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Tu determinantu nazivamo ***minora*** elementa a_{11}. Slično, neka su

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

minore elemenata a_{12}, odnosno a_{13}.

Pomoću minora definiramo algebarske komplemente matričnih elemenata:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}, \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}, \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13}. \end{aligned}$$

Sada je determinanta trećeg reda:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

i kažemo da smo determinantu razvili po elementima prvog retka.

Poopćenje: Neka je A matrica $n-$tog reda. Determinantu M_{ij} koju dobijemo brisanjem $i-$tog retka i $j-$tog stupca matrice A nazivamo minora elementa a_{ij} matrice A, a algebarski komplement elementa a_{ij} je:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Za matricu A trećeg reda vrijedi:

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+j} a_{ij}M_{ij}, \quad \text{za } i = 1, 2, 3$$

što je razvoj determinante po $i-$tom retku, te

$$\det A = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+j} a_{ij}M_{ij}, \quad \text{za } j = 1, 2, 3$$

što je razvoj determinante po $j-$tom stupcu.

Determinanta matrice $n-$tog reda - Laplaceov razvoj

Neka je $A = [a_{ij}]$ matrica $n-$tog reda i neka je $n \geq 3$, M_{ij} minora, a A_{ij} algebarski komplement elementa a_{ij}. Definiramo *determinantu matrice $n-$tog reda* na način:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}M_{ij}, \quad \text{za } i = 1, 2, ..., n$$

što je Laplaceov razvoj determinante po $i-$tom retku, te

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}M_{ij}, \quad \text{za } j = 1, 2, ..., n$$

što je Laplaceov razvoj determinante po $j-$tom stupcu.

Napomena: vrijednost determinante ne ovisi o izboru retka ili stupca po kojem je razvijamo, a odabiremo redak ili stupac koji ima najviše nula.

Svojstva determinanti

Sljedeća svojstva olakšavaju računanje determinanti.

1. Determinanta trokutaste matrice jednaka je produktu elemenata na dijagonali.

2. $\det(A) = \det\left(A^T\right)$

Zbog svojstva 2. sve sljedeće tvrdnje koje vrijede za retke, vrijede i za stupce.

3. Determinanta koja ima u nekom retku samo nule jednaka je 0.

4. Zamjenom dvaju redaka determinanta mijenja predznak.

5. Vrijednost determinante se ne mijenja ako nekom retku pribrojimo neki drugi redak pomnožen s nekim brojem.

6. Determinanta s dva jednaka ili proporcionalna retka jednaka je 0.

7. Determinanta se množi nekim brojem tako da se tim brojem pomnože elementi jednog (proizvoljnog) retka.

8. (Binet-Cauchyev teorem) Za matrice $A, B \in \mathcal{M}_n$ vrijedi:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Inverzna matrica

Definicija 5.9 Neka je $A \in \mathcal{M}_n$. Za matricu A kažemo da je *regularna* (invertibilna) ukoliko postoji matrica B za koju vrijedi

$$AB = BA = I.$$

Za matricu A kažemo da je singularna ukoliko nije regularna.

Matrica B je, ukoliko postoji, jedinstvena.

Dokaz: Pretpostavimo da postoji druga matrica C za koju vrijedi

$$AC = CA = I.$$

Tada je

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B. \qquad \blacksquare$$

Zbog jedinstvenosti uvodimo oznaku $B = A^{-1}$ i matricu A^{-1} nazivamo inverzna martica matrice A.

Ako je $\mathcal{G}_n$ skup svih regularnih matrica reda n, tada vrijedi:

i) $\mathcal{G}_n \neq \mathcal{M}_n$,

ii) $I \in \mathcal{G}_n$,

iii) za sve matrice $A, B \in \mathcal{G}_n$ je $AB \in \mathcal{G}_n$ i vrijedi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

iv) za svaku matricu $A \in \mathcal{G}_n$ vrijedi $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Ako je $A \in \mathcal{G}_n$ (kvadratna i regularna) (samo tada!) definiramo <u>*potencije*</u>

$$A^{-2} \stackrel{def}{=} A^{-1} \cdot A^{-1},$$

$$A^{-p} \stackrel{def}{=} \left(A^{-1}\right)^p, \quad p \in \mathbb{N}$$

Vrijedi: $A^{-p} = \left(A^{-1}\right)^p = (A^p)^{-1}$.

Dva pitanja:

1. Kada je matrica $A \in \mathcal{M}_n$ regularna?

2. Ako je matrica $A \in \mathcal{M}_n$ regularna, kako naći A^{-1}?

Jedan od mogućih odgovora na ova pitanja daju determinante. Pokazat ćemo:

$$A \in \mathcal{M}_n \text{ je regularna } \iff \det A \neq 0.$$

Dokaz: $\boxed{\Longrightarrow}$ Neka je $A \in \mathcal{M}_n$ je regularna. Tada vrijedi:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Po svojstvu 8. (Binet-Cauchyev teorem) slijedi

$$\det\left(A^{-1}A\right) = \det\left(A^{-1}\right)\det(A) = \det I = 1.$$

Ovo povlači

$$\det(A) \neq 0$$

i dodatno

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka je $A \in \mathcal{M}_n$ i $\det(A) \neq 0$. Definirajmo matricu $B \in \mathcal{M}_n$ na sljedeći način

$$B = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}^T$$

gdje je $\tilde{A} = [A_{ij}]$ i A_{ij} su algebarski komplementi elemenata matrice A.
Budući je $\det(A) \neq 0$ matrica B je dobro definirana i može se pokazati da je

$$AB = BA = I.$$

Ovo povlači da je A regularna i dodatno

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}^T.$$

Posljedica:

$$A \in \mathcal{M}_n \text{ je singularna } \iff \det A = 0.$$

Zaključak: Neka je $A \in \mathcal{M}_n$.

- ako je $\det A = 0$ onda je A singularna, tj. nema inverz,
- ako je $\det A \neq 0$ onda je A regularna i

  $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}^T$$

  (i $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$).

Matricu $\tilde{A}^T$ nazivamo *adjunkta* matrice A.

Drugi način: (pomoću ranga)

Odgovor na pitanje kada je matrica A regularna daje nam:

Teorem 5.10 Matrica $A \in \mathcal{M}_n$ je regularna ako i samo ako je $rang\,(A) = n$.

Dokaz: Korištenjem Teorem 2.2 (C-K) (skripta).

Dokaz ovog teorema daje nam drugi postupak za računanje inverzne matrice:

- Formiramo matricu tipa $n \times 2n$ oblika

$$[A\,|I]$$

gdje je I jedinična matrica.

- Elementarnim transformacijama nad retcima gornje matrice svodimo je na ekvivalentnu matricu oblika

$$[A\,|I] \sim \;...\; \sim [A_R\,|B]\,,$$

gdje je A_R reducirani oblik matrice A,

- Ako je:

- $A_R \neq I$ onda je A singularna,

- $A_R = I$ onda je A regularna i $B = A^{-1}$ tj.

$$[A\,|I] \sim \;...\; \sim \left[I\,\middle|A^{-1}\right].$$

Neka je matrica $A \in \mathcal{M}_n$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

i) A je regularna,

ii) $\det A \neq 0$,

iii) $rang\,(A) = n$.

Cramerov sustav

Sustav od n linearnih jednadžbi sa n nepoznanica

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_{21} & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \qquad \text{(S)}$$

ili matrično

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

gdje je matrica A kvadratna matrica reda n, nazivamo Cramerov sustav.

Razlikujemo dva osnovna slučaja:

1) Matrica A je regularna, tj. $\det A \neq 0$. U ovom sulčaju sustav ima jedinstveno rješenje $\mathbf{x}$ (jer je $r = n$).

Množenjem matrične jednadžbe s A^{-1} (slijeva) dobivamo

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

ili

Teorem 5.11 (Camer) Neka je matrica A regularna i neka je D_i determinanta matrice koja se dobije zamjenom $i-$tog stupca matrice A s vektorom $\mathbf{b}$. Tada su komponente rješenja $\mathbf{x}$ sustava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dane sa

$$x_i = \frac{D_i}{\det A}.$$

2) Matrica A je sigularna, tj. $\det A = 0$.

- Ako je barem jedna od determinanti D_i različita od 0, sustav nema rješenje.

- Ako je $D_1 = D_2 = ... = D_n = 0$, sustav ima parametarsko rješenje (koje se mora tražiti Gaussovom eliminacijom).

Primjer: Zadani su Cramerovi sustavi:

1.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Determinanta matrice sustava je

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \;\Rightarrow\; A \text{ - regularna } \Rightarrow \text{ jedin. rješ.}$$

I. način

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

II. način

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$x_1 = \frac{D_1}{\det A} = \frac{7}{-1} = -7$$

$$x_2 = \frac{D_2}{\det A} = \frac{-4}{-1} = 4$$

2.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2 \\ -2x_1 - 4x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Determinanta matrice sustava je

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow A \text{ - singularna}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \Rightarrow \text{ nema rješenja.}$$

3.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 5 \\ -2x_1 - 6x_2 &= -10 \end{aligned}$$

Determinanta matrice sustava je

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow A \text{ - singularna}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -10 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{ par. rješ.}$$

Odgovarajuća proširena matrica sustava je

$$A_p = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ -2 & -6 & -10 \end{array}\right] \overset{2\cdot I + II}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [A_R|\,\mathbf{b}']$$

pa imamo jednoparametarsko rješenje dano sa
$(x_1, x_2) = (-3t + 5, t)\,, \quad t \in \mathbb{R}.$