6. Vektori

- Realni fizikalni svijet:
  - neke veličine opisuju se jednim (realnim) brojem - skalarom (težina, duljina,...);
  - neke veličine se ne mogu opisati samo jednim (realnim) brojem - opisujemo ih vektorima (sila, brzina,...).

- Pretpostavka: intuitivno jasan pojam trodimenzionalnog (Euklidskog) prostora E^3.

- Oznake:
  - točke: A, B, M, N, P,...T;
  - dužine: $\overline{AB}$, $\overline{MN}$, ...;
  - udaljenosti - duljine dužina: $d\left(A, B\right)$ ili $|AB|$, ...

Usmjerene dužine i vektori

Definicija 6.1

- Usmjerena dužina $\overrightarrow{AB}$ je dužina kojoj se zna početna točka (hvatište) A i završna točka B, tj. $(A, B) := \overrightarrow{AB}$;

- Za dvije usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{A_1B_1}$ kažemo da su ekvivalentne ako postoji translacija koja prevodi jednu u drugu, tj. ako je četverokut ABA_1B_1 paralelogram (dužine AB_1 i A_1B imaju zajedničko polovište). Pišemo $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{A_1B_1}$;

- Sve međusobno ekvivalentne usmjerene dužine tvore klasu koju nazivamo vektor;

- Pojedinu usmjerenu dužinu iz svake klase nazivamo predstavnikom te klase;

Vektore označavamo:

$$\vec{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right],$$

gdje je $\overrightarrow{AB}$ neki predstavnik dane klase - vektora (kažemo da je vektor "sveden" na početak A).

Geometrijski, vektor $\vec{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$, u ravnini ili prostoru, određen je s tri podatka:

- **nosačem** - pravac (određen točkama A i B);
- **orijentacijom** na tom pravcu **(**od A prema B);
- **duljinom ili normom** $|\vec{a}| = d\left(A, B\right);$

Nosač + orijentacija = smjer.

Usmjerene dužine koje leže na paralelnim pravcima i imaju istu orijentaciju i jednaku duljinu definiraju isti vektor.

Neprecizna oznaka za vektor: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

Skup svih vektora označavamo sa V (vektore u ravnini sa V^2, a vektore u prostoru sa V^3).

Neka je O istaknuta (čvrsta točka) u prostoru. Za svaki vektor $\vec{a}$ moguće je odabrati njegovog predstavnika, tako da mu početna točka bude O.

Vektor (usmjerenu dužinu) $\overrightarrow{OT}$ nazivamo radijus-vektor ili vektor položaja točke T. Označimo sa V_0 skup svih radijus-vektora s početkom u O.

Definicija 6.2

- Za dva vektora $\vec{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ i $\vec{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$ kažemo da su <u>kolinearna</u> ako točke O, A, B pripadaju istom pravcu.

- Vektori $\vec{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ i $\vec{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$ imaju <u>istu orjentaciju</u> ako se točke A i B nalaze s iste strane točke O, a imaju <u>različitu orjentaciju</u> ako se točke A i B nalaze s različitih strana točke O.

<u>Nul-vektor</u> $\vec{0}$ je vektor duline 0. Dakle, $\left|\vec{0}\right| = 0$.

(Nema smisla govoriti o smjeru. Vrijedi: $\vec{0} = \left[\overrightarrow{AA}\right]$, $\forall A \in E^3$)

<u>Jedinični vektor</u> $\vec{e}$ je vektor duline 1. Dakle, $|\vec{e}| = 1$.

<u>Suprotni vektor</u> vektora $\vec{a}$ je vektor $-\vec{a}$ koji ima isti pravac i duljinu kao vektor $\vec{a}$, ali suprotnu orijentaciju od $\vec{a}$. Dakle, ako je $\vec{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$, onda je $-\vec{a} = \left[\overrightarrow{BA}\right]$.

Operacije s vektorima

Definicija 6.3

Neka su $\vec{a} = \left[\overrightarrow{AB}\right]$ i $\vec{b} = \left[\overrightarrow{BC}\right]$ vektori. Zbroj vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \left[\overrightarrow{AB}\right] + \left[\overrightarrow{BC}\right] = \left[\overrightarrow{AC}\right]$$

(pravilo trokuta) ili ako je $\vec{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ i $\vec{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$ onda je

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \left[\overrightarrow{OC}\right],$$

gdje je C četvrti vrh paralelograma definiranog točkama O, A, B (pravilo paralelograma).

Poopćenje:

$$\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n = \left[\overrightarrow{A_0A_1}\right]+\left[\overrightarrow{A_1A_2}\right]+\ldots+\left[\overrightarrow{A_{n-1}A_n}\right] = \left[\overrightarrow{A_0A_n}\right]$$

Svojstva:

Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ vektori, tada vrijedi.

- $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ (svojstvo asocijativnosti);
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a}$;
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$;
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (svojstvo komutativnosti).

Definiramo oduzimanje vektora kao

$$\vec{a} - \vec{b} =: \vec{a} + \left(-\vec{b}\right),$$

ili ako je $\vec{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ i $\vec{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$ onda je

$$\vec{a} - \vec{b} = \left[\overrightarrow{BA}\right].$$

Definicija 6.4

Neka je $\vec{a}$ vektor i $\lambda \in \mathbb{R}$. Produkt skalara λ i vektora $\vec{a}$ je vektor $\vec{c} = \lambda\vec{a}$ zadan sa:

- $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$;
- vektori $\vec{a}$ i $\lambda\vec{a}$ su kolinearni;
- ako je $\lambda > 0$ onda $\vec{a}$ i $\lambda\vec{a}$ imaju istu orijentaciju, a ako je $\lambda < 0$ onda $\vec{a}$ i $\lambda\vec{a}$ imaju suprotnu orijentaciju. (Za $\lambda = 0$ je $|\lambda\vec{a}| = 0$, pa je $\lambda\vec{a}$ nul-vektor).

Svojstva:

Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektori i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalari, tada vrijedi.

- $\lambda\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;
- $(\lambda + \mu)\,\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;
- $(\lambda\mu)\,\vec{a} = \lambda\,(\mu\vec{a})$;

Specijalno vrijedi:

- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
- $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$;
- $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$, za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$;
- ako je $\vec{a} \neq \vec{0}$ ($\Rightarrow |\vec{a}| \neq 0$) onda je $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} =: \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{e}$ jedinični vektor.

Koordinatizacija

- olakšava baratanje s vektorima.

Koordinatizacija pravca

- Odaberemo (brojevni) pravac $\mathbf{p}$;
- točku kojoj je pridružena 0 označimo sa O, a točku kojoj je pridružena 1 označimo sa I;

Vektor $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ je jedinični vektor ($\left|\overrightarrow{OI}\right| = d\,(O, I) = 1$).

Tako smo na pravcu $\mathbf{p}$ zadali koordinatni sustav $\left(0, \vec{i}\right)$.

Svakoj točki $T \in \mathbf{p}$ je jednoznačno pridružen realni broj x (apscisa) i vektor $\overrightarrow{OT}$. Vrijedi:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OT} = x \cdot \overrightarrow{OI} = x \cdot \vec{i} =: [x] =: \{x\}$$

(iz svojstava množenja vektora sa skalarom).

Za točke $T, S \in \mathbf{p}$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lambda\overrightarrow{OT} + \mu\overrightarrow{OS} = \lambda\left(x_2 \cdot \vec{i}\right) + \mu\left(x_2 \cdot \vec{i}\right) =$$

$$= [\lambda x_2 + \mu x_2] = \{\lambda x_2 + \mu x_2\}\,.$$

(svedeno na operacije s brojevima).

Koordinatizacija ravnine

- Odaberemo dva okomita (brojevna) pravaca $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ koji se sijeku u točki O (i leže u ravnini $\mathbf{\Pi}$);
- na pravcu $\mathbf{p}$ zadajmo koordinatni sustav $\left(0, \vec{i}\right)$, a na pravcu $\mathbf{q}$ zadajmo koordinatni sustav $\left(0, \vec{j}\right)$ tako da je

$$\vec{i} = \overrightarrow{OI},\ \ \vec{j} = \overrightarrow{OJ}, \quad \left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = 1,$$

  i tako da točka I, rotacijom za $\frac{\pi}{2}$ u pozitivnom smjeru, prelazi u točku J.

S ovim smo u ravnini $\mathbf{\Pi}$ zadali desni pravokutni koordinatni sustav $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Svakoj točki $T \in \mathbf{\Pi}$ je jednoznačno pridružen uređeni par realnih brojeva (x, y) i vektor $\overrightarrow{OT}$. Vrijedi:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OT} = x\vec{i} + y\vec{j} =: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =: \{x, y\}$$

(iz svojstava zbrajanja vektora i množenja sa skalarom).

Nazivi:

- pravac $\mathbf{p}$: os apscisa ili $x-$os;
- pravac $\mathbf{q}$: os ordinata ili $y-$os;
- x i y - koordinate točke T; x je apscisa, a y je ordinata;
- x i y - skalarne komponente radijus vektora $\overrightarrow{OT}$;
- $x\vec{i}$ i $y\vec{j}$ - vektorske komponente radijus vektora $\overrightarrow{OT}$;

Za točke $T, S \in \mathbf{\Pi}$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lambda\overrightarrow{OT} + \mu\overrightarrow{OS} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \end{bmatrix} = \{\lambda x_2 + \mu x_2,\ \lambda y_2 + \mu y_2\}\,.$$

(svedeno na operacije s matricama).

Koordinatizacija prostora

- Odaberemo u prostoru $\mathbf{E}^3$ tri međusobno okomita (brojevna) pravaca $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ i $\mathbf{r}$ koji se svi sijeku u točki O;

- u ravnini $\mathbf{\Pi}$ određenoj s pravcima $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ zadamo desni pravokutni koordinatni sustav $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$ na prije opisani način;

- na pravcu $\mathbf{r}$ zadajmo koordinatni sustav $\left(0, \vec{k}\right)$, tako da vektori $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$ zadovoljavaju pravilo desnog vijka.

S ovim smo u prostoru $\mathbf{E}^3$ zadali desni pravokutni koordinatni sustav $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ i pri tome vrijedi

$$\vec{i} = \overrightarrow{OI}, \;\; \vec{j} = \overrightarrow{OJ}, \; \vec{k} = \overrightarrow{OK}, \qquad \left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1.$$

Svakoj točki $T \in \mathbf{E}^3$ je jednoznačno pridružena uređena trojka realnih brojeva (x, y, z) i vektor $\overrightarrow{OT}$. Vrijedi:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OT} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} =: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =: \{x, y, z\}$$

(iz zbrajanja vektora i množenja sa skalarom).

Nazivi:

- pravac $\mathbf{p}$: os apscisa ili $x-$os;
- pravac $\mathbf{q}$: os ordinata ili $y-$os;
- pravac $\mathbf{r}$: os aplikata ili $z-$os;
- $x,\ y,\ z$ - koordinate točke T; x je apscisa, y je ordinata, a z aplikata;
- $x,\ y,\ z$ - skalarne komponente radijus vektora $\overrightarrow{OT}$;
- $x\vec{i},\ y\vec{j},\ z\vec{k}$ - vektorske komponente radijus vektora $\overrightarrow{OT}$;
- prostor $\mathbf{E}^3$ je podijeljen u 8 oktanata

Za točke $T, S \in \mathbf{E}^3$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lambda\overrightarrow{OT} + \mu\overrightarrow{OS} + = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{bmatrix} = \{\lambda x_2 + \mu x_2,\ \lambda y_2 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2\}\ .$$

(svedeno na operacije s matricama).

Neka je u koordinatnom sustavu $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ zadan vektor $\vec{a} = \{x, y, z\}$ tada je:

• duljina ili norma vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OT}$

$$|\vec{a}| = \left|\overrightarrow{OT}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

(vidi se geometrijski: $\left|\overrightarrow{OT}\right| = d\left(O, T\right)$).

• ako je $\vec{a} \neq \vec{0}$, tada je pripadni jedinični vektor

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

($|\vec{a}_0| = \left|\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}\right| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1$).

Linearna nezavisnost

Neka su $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,...,$\vec{a}_k$ vektori u prostoru $\mathbf{E}^3$ i λ_1, λ_2, ...,$\lambda_k \in \mathbb{R}$. Vektor

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_k\vec{a}_k$$

nazivamo *linearna kombinacija* vektora $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,...,$\vec{a}_k$.

Definicija 6.5 Za vektore $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,...,$\vec{a}_k$ kažemo da su *linearno nezavisni* ako za sve $\lambda_1, \lambda_2, ...,\lambda_k \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{0} \Longrightarrow \lambda_1{=}\lambda_2 = ... =\lambda_k = 0.$$

U protivnom kažemo da su vektori $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,...,$\vec{a}_k$ *linearno zavisni*.

Odnosno, za vektore $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,...,$\vec{a}_k$ kažemo da su linearno zavisni ako postoje skalari $\lambda_1, \lambda_2, ...,\lambda_k \in \mathbb{R}$, od kojih je barem jedan različit od nule, takvi da je

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{0}.$$

Ako su vektori $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,...,$\vec{a}_k$ linearno zavisni, onda barem jedan od njih možemo izraziti kao linearnu kombinaciju ostalih, i obratno, ako se barem jedan od vektora $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,...,$\vec{a}_k$ može izraziti kao linearna kombinacija ostalih, onda su vektori $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,...,$\vec{a}_k$ linearno zavisni.

Ako su vektori $\vec{a}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$, ..., $\vec{a}_k = \{x_k, y_k, z_k\}$ zadani u koordinatnom sustavu $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ tada je njihova linearna nezavisnost ekvivalentna s linearnom nezavisnošći stupaca matrice

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_k \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_k \end{bmatrix}$$

Uočimo:

- svaka dva kolinearna vektora su linearno zavisna;
- svaka tri komplanarna vektora su linearno zavisna;
- svaka četiri vektora u prostoru su linearno zavisna;
- svaka dva nekolinearna vektora su linearno nezavisna;
- svaka tri nekomplanarna vektora su linearno nezavisna.

Svaka tri linearno nezavisna $\vec{a}$, $\vec{b}$,$\vec{c}$ vektora u prostoru $\mathbf{E}^3$ čine bazu prostora $\mathbf{E}^3$.

Dakle, svaki vektor $\vec{d}$ u prostoru $\mathbf{E}^3$ možemo na jedinstven način izraziti kao linearnu kombinaciju vektora baze $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Napomena: Iz predhodnog zaključujemo da svaka tri nekomplanarna vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$,$\vec{c}$ vektora u prostoru $\mathbf{E}^3$ čine bazu prostora $\mathbf{E}^3$.