Definicija 6.6 Kut između vektora $\vec{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right]$ i $\vec{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$ je (manji) kut između usmjerenih dužina $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$, tj.

$$\varphi = \measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) =: \measuredangle\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

Definicija 6.7 Neka su dani vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i neka je $\varphi = \measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$. Skalarni umnožak vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je realan broj (skalar)

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos\varphi.$$

Napomena: Ako je $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$, onda $\varphi = \measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$ nije definiran, pa definiramo

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} =: 0.$$

Svojstva:

Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektori i $\lambda \in \mathbb{R}$, tada vrijedi:

S1. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$ ili $\vec{a} \perp \vec{b}$ ($\varphi = \frac{\pi}{2}$);

S2. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2$;

S3. $\lambda\left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right) = (\lambda\vec{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \vec{a} \cdot \left(\lambda\overrightarrow{b}\right)$; (homogenost)

S4. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$; (komutativnost)

S5. $\overrightarrow{a} \cdot \left(\overrightarrow{b} + \vec{c}\right) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$; (distributivnost)

Primjer Neka je $|\overrightarrow{a}| = 1$, $\left|\overrightarrow{b}\right| = 2$ i $\vec{a} \perp \vec{b}$ izračunajte

$$\left(2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) \cdot \left(3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}\right) \stackrel{S5.}{=}$$

$$= 2\overrightarrow{a} \cdot 3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{a} \cdot 2\overrightarrow{b} + \left(-\overrightarrow{b}\right) \cdot 3\overrightarrow{a} + \left(-\overrightarrow{b}\right) \cdot 2\overrightarrow{b} \stackrel{S3.,S2.}{=}$$

$$= 6\,|\overrightarrow{a}|^2 + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} - 2\left|\overrightarrow{b}\right|^2 \stackrel{S1.}{=} 6 \cdot 1^2 + 0 - 2 \cdot 2^2 = -2$$

<u>Projekcija vektora na vektor</u>

Neka su dani vektori $\vec{a} = \left[\overrightarrow{OA}\right] \neq \vec{0}$ i $\vec{b} = \left[\overrightarrow{OB}\right]$. Neka je točka B' ortogonalna projekcija točke B na pravac određen točkama 0 i A. Tada vektor

$$\vec{b}_{\vec{a}} = \left[\overrightarrow{OB'}\right] = \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos\varphi \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos\varphi \cdot \vec{a}_0$$

nazivamo <u>vektorska projekcija vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$.</u>
Skalar

$$\pi_{\vec{a}}\left(\vec{b}\right) = b_{\vec{a}} = \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos\varphi$$

nazivamo <u>skalarna projekcija vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$.</u>
<u>Vrijedi:</u> $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot b_{\vec{a}} = \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot a_{\vec{b}}$.

U pravokutnom koordinatnom sustavu $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, iz definicije skalarnog umnoška, slijedi:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \tag{1.1}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \overset{S4.}{\Rightarrow} \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{j} = 0. \tag{1.2}$$

Za vektore $\overrightarrow{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ i $\overrightarrow{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ je

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) \cdot \left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) = \text{...(svojstva)}$$

$$= a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + ... + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \cdot \vec{k} =$$

$$= \text{...(1.1 i 1.2)...} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Specijalno vrijedi:

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = \left|\overrightarrow{a}\right|^2.$$

Kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ se računa pomoću

$$\cos\varphi = \cos\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|} =$$

$$= \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Prikloni kutevi α, β, γ vektora $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \neq \vec{0}$ su kutevi koje taj vektor zatvara s vektorima $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$, redom. Budući je

$$\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \vec{i}\right) = \measuredangle\left(\vec{a}_0, \vec{i}\right),$$

onda je

$$\cos\alpha = \cos\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{i}\right) = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{i}}{|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{i}\right|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Slično,

$$\cos\beta = \cos\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \vec{j}\right) = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \vec{j}}{|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\vec{j}\right|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos\gamma = \cos\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \vec{k}\right) = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \vec{k}}{|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\vec{k}\right|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Definicija 6.8 Neka su dani vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i neka je $\varphi = \measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$. Vektorski umnožak vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ sa svojstvima:

1. $\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\varphi;$
2. $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \perp \vec{b}$ i $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \perp \overrightarrow{a};$
3. Trojka $\left(\overrightarrow{a}, \vec{b}, \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)$ čini desni koordinatni sustav.

Napomena: Ako je $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$, onda $\varphi = \measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$ nije definiran, pa definiramo

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} =: \vec{0}.$$

Geometrijska interpretacija: Norma vektora $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ je jednaka površini paralelograma P_{pg}, što ga definiraju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

$$\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\varphi = |\overrightarrow{a}| \cdot v_{\vec{a}} = P_{pg},$$

gdje je $v_{\vec{a}} = \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\varphi$ visina na stranicu (vektor) $\overrightarrow{a}$.

Svojstva: Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektori i $\lambda \in \mathbb{R}$, tada vrijedi:

V1. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$ ili $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ($\varphi = 0$);

V2. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\left(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}\right)$ (antikomutativnost);

V3. $\lambda\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) = (\lambda\vec{a})\times\overrightarrow{b} = \vec{a}\times\left(\lambda\overrightarrow{b}\right)$ (homogenost);

V4. $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)\times\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c} + \overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}$; (distributivnost).

Specijalno vrijedi:

V1'. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \vec{0}$ za svaki vektor $\overrightarrow{a}$;

Primjer Neka je $|\overrightarrow{a}| = 1, \left|\overrightarrow{b}\right| = 2$ i $\vec{a} \perp \vec{b}$. Izračunajte površinu paralelograma P što ga definiraju vektori $2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.

$$\left(2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) \times \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \overset{V4.}{=}$$

$$= 2\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \left(-\overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{a} + \left(-\overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{b} =$$

$$\overset{V2.,V1'.,V3.}{=} \vec{0} + 2\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) + \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) + \vec{0} = 3\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)$$

Sada je $P = \left|\left(2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) \times \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)\right|$, tj.

$$P=\left|3\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\right|=3\left|\overrightarrow{a}\right|\cdot\left|\overrightarrow{b}\right|\cdot\sin\frac{\pi}{2}=3\cdot1\cdot2\cdot1=6$$

U koordinatnom sustavu $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, iz definicije vektorskog umnoška, slijedi:

$$\begin{aligned}
\vec{i}\times\vec{i} &= \vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0},\\
\vec{i}\times\vec{j} &= \vec{k}\overset{V2.}{\Rightarrow}\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\\
\vec{j}\times\vec{k} &= \vec{i}\overset{V2.}{\Rightarrow}\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\\
\vec{k}\times\vec{i} &= \vec{j}\overset{V2.}{\Rightarrow}\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}
\end{aligned}$$

Za vektore $\overrightarrow{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ i $\overrightarrow{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ je

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=\ldots\text{(svojstva)}\ldots$$

$$=a_xb_x\vec{i}\times\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\times\vec{j}+\ldots+a_zb_y\vec{k}\times\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\times\vec{k}=$$

$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}-\left(a_xb_z-a_zb_x\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}=$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Uočimo: Iz svojstava determinante $\Rightarrow$ svoj.: V1., V2., V3. (nije dokaz).

Definicija 6.9 Neka su dani vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Mješoviti umnožak vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ je umnožak (skalar) oblika:

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \vec{c}$$

Oznaka: $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \vec{c} =: \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$.

Geometrijska interpretacija: Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ definiraju paralelopiped (volumena V). Ako je

$$\psi = \measuredangle\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}\right),$$

onda je visina paralelopipeda na bazu (paralelogram) definiran vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednaka $v = \pm |\vec{c}| \cdot \cos\psi$. Sada je

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \vec{c} = \left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\psi = P_{pg} \cdot (\pm v) = \pm V$$

Uočimo:

- $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \vec{c} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$ ili $\vec{c} = \vec{0}$ ili $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su komplanarni ($\psi = \frac{\pi}{2}$);
- $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \cdot \vec{c} \geq 0 \;\Rightarrow\; \psi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

U koordinatnom sustavu $\left(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ za vektore $\overrightarrow{a} = a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\overrightarrow{b} = b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ i $\overrightarrow{c} = c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$ vrijedi:

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \left(c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}\right) =$$

$$\left[(a_yb_z-a_zb_y)\,\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\,\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\,\vec{k}\right]\cdot\left(c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\right.$$

$$= \ldots\text{(svojstva skal. umn.)}\ldots = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Iz svojstava determinanti imamo

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix},$$

tj. (cikličkom zamjenom) imamo

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \left[\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right] = \left[\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right]. \tag{1}$$

Budući je $\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\vec{c} \overset{V2.}{=} -\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}\right)\cdot\vec{c}$ imamo

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\right],$$

pa je

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\right] = -\left[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\right]. \quad (2)$$

Napomena: Svojstva (1) i (2) vrijede i ako vektori nisu zadani u koordinatnom sustavu $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Budući da svaka tri nekomplanarna (ne-nul) vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$,$\vec{c}$ u prostoru $\mathbf{E}^3$ čine bazu prostora $\mathbf{E}^3$ ($\vec{a}$, $\vec{b}$,$\vec{c}$ su linearno nezavisni), onda vrijedi:

$$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \text{ je baza } \mathbf{E}^3 \ \Leftrightarrow\ \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] \neq 0$$

Ako je

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] > 0 \ \Rightarrow\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ čine desni koordinatni sustav,}$$

a ako je

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] < 0 \ \Rightarrow\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ čine lijevi koordinatni sustav.}$$

Ako vektor $\vec{d}$ u prostoru $\mathbf{E}^3$ želimo izraziti kao linearnu kombinaciju vektora baze $\vec{a}$, $\vec{b}$,$\vec{c}$, a vektori su zadani u koordinatnom sustavu $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, onda je

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \ \Rightarrow d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k} =$$

$$\alpha\left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) + \beta\left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) + \gamma\left(c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow \ d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k} =$$

$$(\alpha a_x + \beta b_x + \gamma c_x)\,\vec{i} + \left(\alpha a_y + \beta b_y + \gamma c_y\right)\vec{j} + (\alpha a_z + \beta b_z + \gamma c_z)\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \ \begin{cases} a_x\alpha + b_x\beta + c_x\gamma = d_x \\ a_y\alpha + b_y\beta + c_y\gamma = d_y \\ a_z\alpha + b_z\beta + c_z\gamma = d_z \end{cases} \qquad (3)$$

Sustav (3) je Cramerov sustav koji uvijek ima jedinstveno rješenje (α, β, γ) (stupci matrice sustava A su linearno nezavisni $\Rightarrow rang(A) = 3 \Rightarrow A$ regularna).

Primjer Pokažite da vektori $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{j} + \vec{k}$ čine bazu prostora $\mathbf{E}^3$ i prikažite vektor $\vec{d} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ je baza } \mathbf{E}^3 \ \Leftrightarrow \ \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] \neq 0$$

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \ \Rightarrow \ \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \text{ je baza.}$$

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \;\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + \gamma = 1 \\ \beta + \gamma = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \Longrightarrow$$

$$\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

Definicija 6.9 Neka su dani vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. <u>Vektorsko- vektorski umnožak</u> vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ je umnožak (vektor) oblika:

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \vec{c}.$$

<u>Uočimo:</u>

1. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ je okomit na ravninu razapetu s $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$;
2. $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \vec{c}$ je okomit na $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$;

<u>Zaključak:</u> $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \vec{c}$ leži u ravnini razapetoj s $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$. Dakle, $\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \vec{c}$ se može prikazati kao linearna kombinacija vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Vrijedi:

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \vec{c} = (\overrightarrow{a} \cdot \vec{c})\,\overrightarrow{b} - \left(\overrightarrow{b} \cdot \vec{c}\right)\overrightarrow{a} \quad \left(= \lambda_1 \overrightarrow{a} + \lambda_2 \overrightarrow{b}\right)$$

Uočimo: Budući je

$$\overrightarrow{a}\times\left(\overrightarrow{b}\times\vec{c}\right)\overset{V2}{=}-\left(\overrightarrow{b}\times\vec{c}\right)\times\overrightarrow{a}=(\vec{c}\cdot\overrightarrow{a})\,\overrightarrow{b}-\left(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}\right)\vec{c},$$

onda je, općenito,

$$\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\times\vec{c}\neq\overrightarrow{a}\times\left(\overrightarrow{b}\times\vec{c}\right)$$

(jer vektor $\overrightarrow{a}\times\left(\overrightarrow{b}\times\vec{c}\right)$ leži u ravnini razapetoj s $\vec{c}$ i $\overrightarrow{b}$).

7. Analitička geometrija prostora

Neka je $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ pravokutan koordinatni sustav u prostoru $\mathbf{E}^3$. Svaka točka T u prostoru jednoznačno je određena koordinatama (x, y, z), koje su ujedno skalarne komponente radijus-vektora $\overrightarrow{OT}$.

$$T(x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OT} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Udaljenost dviju točaka

Neka su $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i $T_2(x_2, y_2, z_2)$ dvije točke u prostoru $\mathbf{E}^3$. Tada je

$$d(T_1, T_2) = \left|\overrightarrow{T_1T_2}\right|.$$

Budući je

$$\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{OT_2} - \overrightarrow{OT_1} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k},$$

onda je

$$d(T_1, T_2) = \left|\overrightarrow{T_1T_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Ravnina

Svaka ravnina Π u prostoru $\mathbf{E}^3$ jednoznačno je određena:

- ili s tri točke koje sve ne leže na istom pravcu;
- ili s pravcem i jednom točkom koja ne leži na tom pravcu;
- ili s dva različita pravca;
- ili točkom $T_1 \in \Pi$ i vektorom $\vec{n}$ okomitim na ravninu Π.

Napomena: Vektor $\vec{n}$ je okomit na ravninu Π, ako je okomit na svaki vektor iz te ravnine. Vektor $\vec{n}$ nazivamo normala ravnine Π.

Dakle, neka je $T_1 \in \Pi$ i $\vec{n}$ normala ravnine Π i neka je $T \in \Pi$, $T \neq T_1$.Tada vektor $\overrightarrow{T_1T}$ leži u Π, pa je

$$\vec{n} \ \perp \ \overrightarrow{T_1T}.$$

Budući je

$$\overrightarrow{T_1T} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OT_1} = \vec{r} - \vec{r}_1,$$

onda je

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$$

što je vektorska jednadžba ravnine Π.

Neka je $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ pravokutan koordinatni sustav u prostoru $\mathbf{E}^3$ i neka je $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T(x, y, z)$, $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$, onda je

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}\right) \cdot \left[(x - x_1)\,\vec{i} + (y - y_1)\,\vec{j} + (z - z_1)\,\vec{k}\right] = 0$$

$$\Rightarrow A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \qquad (4)$$

Jednadžba (4) se naziva <u>jednadžba ravnine kroz točku</u> $T_1(x_1, y_1, z_1)$.

Iz (4) dobivamo

$$Ax + By + Cz + \underbrace{(-Ax_1 - By_1 - Cz_1)}_{D} = 0.$$

Jednadžba

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (5)$$

se naziva <u>opća jednadžba ravnine</u>.

<u>Napomena:</u> Normalu ravnine $\vec{n}$ određuje samo pravac (nosač), tj. ravnina se ne mijenja ako normali $\vec{n}$ promijenimo duljinu i orijetaciju.

Primjer Nađite jednadžbu ravnine Π koja prolazi točkom $T\,(1,-2,1)$ i čija je normala $\vec{n}=-\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$.

I način: Iz jednadžbe (4) dobivamo

$$-1\cdot(x-1)+1\cdot(y-(-2))+4\,(z-1)=0 \quad\Rightarrow$$

$$\Pi....-x+y+4z-1=0$$

II način: Iz jednadžbe (5) dobivamo

$$-1\cdot x+1\cdot y+4\cdot z+D=0$$

$$T\in\Pi \;\Rightarrow -1\cdot 1+1\cdot(-2)+4\cdot 1+D=0 \;\Rightarrow\; D=-1 \;\Rightarrow$$

$$\Pi....-x+y+4z-1=0$$

Jednadžba ravnine zadane s tri točke

Neka su $T_1\,(x_1,y_1,z_1)\,,\,T_2\,(x_2,y_2,z_2)\,,\,T_3\,(x_3,y_3,z_3)$ tri točke u prostoru $\mathbf{E}^3$, koje sve ne leže na istom pravcu (nekolinearne točke). Te tri točke određuju ravninu Π. Neka je $T\,(x,y,z)\in\Pi$, $T\neq T_1,T_2,T_3$. Budući su vektori

$$\overrightarrow{T_1T},\ \overrightarrow{T_1T_2},\ \overrightarrow{T_1T_3}$$

komplanarni (svi leže u Π), onda je mješoviti produkt

$$\left[\overrightarrow{T_1T},\ \overrightarrow{T_1T_2},\ \overrightarrow{T_1T_3}\right] = 0.$$

Budući je

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{T_1T} &= (x - x_1)\,\vec{i} + (y - y_1)\,\vec{j} + (z - z_1)\,\vec{k}, \\
\overrightarrow{T_1T_2} &= (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j} + (z_2 - z_1)\,\vec{k}, \\
\overrightarrow{T_1T_2} &= (x_3 - x_1)\,\vec{i} + (y_3 - y_1)\,\vec{j} + (z_3 - z_1)\,\vec{k},
\end{aligned}$$

onda je

$$\left[\overrightarrow{T_1T}, \overrightarrow{T_1T_2}, \overrightarrow{T_1T_3}\right] = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Jednadžba (6) se naziva <u>jednadžba ravnine kroz tri točke</u>.

Primjer Nađite jednadžbu ravnine Π koja prolazi točkama $T_1\,(1, 0, 0)$, $T_2\,(0, 2, 0)$, $T_3\,(0, 0, -1)$.
Iz jednadžbe (6) dobivamo

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 0 & z - 0 \\ 0 - 1 & 2 - 0 & 0 - 0 \\ 0 - 1 & 0 - 0 & -1 - 0 \end{vmatrix} = 0$$

Razvojem determinante dobivamo opći oblik jednadžbe ravnine Π

$$\Pi \; .... \; -2x - y + 2z + 2 = 0.$$

Segmentni oblik jednadžbe ravnine

Neka je

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{5}$$

opći oblik jednadžbe ravnine Π. Ako je $D \neq 0$ dijeljenjem jednadžbe (5) s $-D$ dobivamo jednadžbu oblika

$$\Pi \; .... \; \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1. \tag{7}$$

Jednadžba (7) se naziva segmentni oblik jednadžbe ravnine.

Napomena: p, q, r su odresci ravnine Π na koordinatnim osima x, y, z, redom, tj. koordinatne osi x, y, z, probadaju ravninu u točkama $T_1\left(p, 0, 0\right)$, $T_2\left(0, q, 0\right)$, $T_3\left(0, 0, r\right)$, redom.

Uočimo: Ako ravnina prolazi ishodištem onda je $D = 0$ ($A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0$), pa ne postoji segmentni oblik ravnine.

Primjer

1. Ravninu Π zadanu jednadžbom $-2x-y+2z+2=0$ napišite u segmentnom obliku.

$$-2x - y + 2z + 2 = 0 \;\; / : (-2) \Longrightarrow \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-1} = 1.$$

Koordinatne osi x, y, z, probadaju (sijeku) ravninu Π u točkama $T_1\,(1,0,0)$, $T_2\,(0,2,0)$, $T_3\,(0,0,-1)$, redom.

2. Ravninu Π zadanu jednadžbom $-x+2y+2=0$ napišite u segmentnom obliku.

$$-x + 2y + 2 = 0 \;\; / : (-2) \;\; \Longrightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{-1} = 1.$$

Koordinatne osi x, y, probadaju (sijeku) ravninu Π u točkama $T_1\,(2,0,0)$, $T_2\,(0,-1,0)$, redom.
Uočimo: ravnina Π ne siječe os z.

Pravac

Svaki pravac p u prostoru $\mathbf{E}^3$ jednoznačno je određen:

- ili s dvije različite točke,
- ili točkom $T_1 \in p$ i vektorom $\vec{s}$ s nosačem p.

Napomena: Vektor $\vec{s}$ nazivamo vektor smjera pravca.

Dakle, neka je $T_0 \in p$ i $\vec{s}$ vektor smjera pravca p i neka je $T \in p$. Tada su vektori $\overrightarrow{T_0T}$ i $\vec{s}$ kolinearni, pa postoji $t \in \mathbb{R}$ tako da je

$$\overrightarrow{T_0T} = t\vec{s}.$$

Budući je

$$\overrightarrow{T_0T} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OT_0} = \vec{r} - \vec{r}_0,$$

onda je

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{s} \;\Rightarrow\; \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s} \tag{8}$$

što je vektorska jednadžba pravca.

Neka je $\left(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ pravokutan koordinatni sustav u prostoru $\mathbf{E}^3$ i neka je $T_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$, $T\left(x, y, z\right)$, $\vec{s} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$, onda

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s} \quad \Rightarrow$$

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + t\left(l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}\right) \quad \Rightarrow$$

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \left(x_0 + tl\right)\vec{i} + \left(y_0 + tm\right)\vec{j} + \left(z_0 + tn\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases} \tag{9}$$

Jednadžba (9) se naziva parametarski oblik jednadžbe pravca

Napomena: svakoj vrijednosti parametra $t \in \mathbb{R}$ u (9) odgovara jedna točka pravca.

Eliminacijom parametra t iz jednadžbi (9) (npr. $t = \frac{x-x_0}{l}$) dobivamo

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \tag{10}$$

Jednadžba (9) se naziva kanonski oblik jednadžbe pravca.

Primjer Nađite pravac koji prolazi točkom $T_0\,(1,-3,0)$ i ima vektor smjera $\vec{s}=2\vec{i}-\vec{k}$.

Parametarski oblik jednadžbe pravca:

$$p...\begin{cases} x=1+2t, \\ y=-3, \\ z=-t. \end{cases}$$

Eliminacijom parametra t dobivamo

$$p....\frac{x-1}{2}=\frac{y-(-3)}{0}=\frac{z}{-1}$$

<u>Uočimo:</u> $\frac{y-(-3)}{0}$ je samo formalni zapis.

<u>Jednadžba pravca zadanog s dvije točke</u>

Neka su $T_1\,(x_1,y_1,z_1)$, $T_2\,(x_2,y_2,z_2)$ dvije različite točke u prostoru $\mathbf{E}^3$. Te dvije točke određuju pravac p. Budući su $T_1,\,T_2\in p$, vektor $\overrightarrow{T_1T_2}$ ima nosač p, tj. vektor $\vec{s}=\overrightarrow{T_1T_2}$ je vektor smjera pravca p. Budući je

$$\vec{s}=\overrightarrow{T_1T_2}=(x_2-x_1)\,\vec{i}+(y_2-y_1)\,\vec{j}+(z_2-z_1)\,\vec{k},$$

onda je

$$p ... \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\,t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\,t, \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)\,t, \end{cases} \;,\; t \in \mathbb{R},$$

ili

$$p ... \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

jednadžba pravca zadanog s dvije točke.

Međusobni položaj pravca i ravnine

Pravac kao presjek dvije ravnine

Neka su zadane dvije ravnine

$$\begin{aligned} \Pi_1 \; ....A_1x + B_1y + C_1z + D_1 \;&=\; 0, \\ \Pi_2 \; ....A_2x + B_2y + C_2z + D_2 \;&=\; 0. \end{aligned}$$

Želimo znati kakav je međusobni položaj ravnina. Imamo tri mogućnosti:

1. Π_1 i Π_2 se sijeku u pravcu p ($\Pi_1 \cap \Pi_2 = p$);
2. Π_1 i Π_2 su paralelne ($\Pi_1 \parallel \Pi_2$);
3. Π_1 i Π_2 se podudarju ($\Pi_1 \equiv \Pi_2$).

Analizom sustava

$$
\begin{aligned}
A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0,\\
A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0,
\end{aligned}
$$

dobivamo ogovor na gornje pitanje. Promatramo proširenu matricu sustava

$$
A_p = [A\,|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{array}\right] \sim [A_R\,|\mathbf{b}'] \,.
$$

Budući je broj nepoznanica $n = 3$, imamo tri mogućnosti:

1. ako je $rang\,(A) = rang\,(A_p) = 2 \Rightarrow$ imamo jednoparametarsko rješenje $\Rightarrow \Pi_1$ i Π_2 se sijeku u pravcu p (parametarska jednadžba);
2. ako je $rang\,(A) = 1$ i $rang\,(A_p) = 2 \Rightarrow$ nema rješenja $\Rightarrow \Pi_1$ i Π_2 su paralelne ($\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$);
3. ako je $rang\,(A) = rang\,(A_p) = 1 \Rightarrow$ imamo dvoparametarsko rješenje $\Rightarrow \Pi_1$ i Π_2 se podudarju ($\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$);

Primjer Nađite paramerarsku jednadžbu pravca p zadanog kao presjek ravnina

$$p ... \begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ x + 2y + z + 2 = 0 \end{cases} .$$

Promatramo proširenu matricu gornjeg sustava

$$A_p = [A\,|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim ... \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \sim [A_R\,|b'$$

Budući je $n = 3$, $rang\,(A) = rang\,(A_p) = 2$, onda imamo jednoparametarsko rješenje

$$z = t,\ x = 3t,\ y = -1 - 2t,\ t \in \mathbb{R}$$

ili

$$p ... \begin{cases} x = 3t, \\ y = -1 - 2t, \\ z = t, \end{cases} ,\ t \in \mathbb{R}, \text{ ili } p .... \frac{x}{3} = \frac{y - (-1)}{-2} = \frac{z}{1}.$$

Kut između dvije ravnine

Neka su zadane dvije ravnine Π_1 i Π_2 s normalama $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$, redom. Kut između ravnina

$$\varphi = \measuredangle\left(\Pi_1, \Pi_2\right)$$

definiramo na sljedeći način:

- Ako je $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ ili $\Pi_1 \equiv \Pi_2$ onda je $\varphi = 0$;
- Ako je $\Pi_1 \cap \Pi_2 = p$ pravac, onda kroz bilo koju točku T_1 pravca p položimo ravninu Π okomitu na p. Ravnina Π siječe ravnine Π_1 i Π_2 u pravcima p_1 i p_2, redom. Definiramo
$$\varphi =: \measuredangle\left(p_1, p_2\right)$$
(vidjeti sliku u dodatku). Međutim, vrijedi
$$\measuredangle\left(p_1, p_2\right) = \measuredangle\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right)$$
($p_1 \perp \vec{n}_1$ i $p_2 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow \measuredangle\left(p_1, p_2\right) = \measuredangle\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right)$), pa uzimamo
$$\varphi = \measuredangle\left(\Pi_1, \Pi_2\right) = \measuredangle\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right).$$
Kut računamo na način
$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

ili, ako su normale $\vec{n}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$ i $\vec{n}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Specijalni slučajevi:

- Ako je $\Pi_1 \parallel \Pi_2$ ili $\Pi_1 \equiv \Pi_2$ onda je $\vec{n}_1 = \lambda\vec{n}_2$, tj. vrijedi

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

- Ako je $\Pi_1 \perp \Pi_2$ onda je $\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, pa je $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, tj. vrijedi

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Kut između pravca i ravnine

Neka su zadana ravnina Π s normalom $\vec{n}$ i pravac p s vektorom smjera $\vec{s}$. Kut između pravca i ravnine

$$\psi = \measuredangle\left(\Pi,\ p\right)$$

definiramo na sljedeći način: Ako je pravac p' projekcija pravca p u ravninu Π onda definiramo

$$\psi =: \measuredangle\left(p,\ p'\right), \quad 0 \leq \psi < \frac{\pi}{2}.$$

To je najmanji kut što ga vektor smjera $\vec{s}$ pravca p zatvara s nekim vektorom u ravnini Π (vidjeti sliku u dodatku). Budući je

$$\frac{\pi}{2} - \psi = \measuredangle\left(\vec{n},\ \vec{s}\right)$$

onda je

$$\sin\psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$$

ili, ako je $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ i $\vec{s} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$

$$\sin\psi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Uočimo: Ako je $p \perp \Pi$ onda je projekcija pravca p u ravninu Π točka, pa definiramo:

$$p \perp \Pi \quad \Rightarrow \quad \psi = \measuredangle(\Pi,\ p) =: \frac{\pi}{2}.$$

Specijalni slučajevi:

- Ako je $p \parallel \Pi$, onda je $\psi = 0$, pa je $\measuredangle(\vec{n},\ \vec{s}) = \frac{\pi}{2}$, tj. vrijedi $\vec{n} \cdot \vec{s} = 0$ ili

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

- Ako je $p \perp \Pi$, onda je $\psi = \frac{\pi}{2}$, pa je $\measuredangle(\vec{n},\ \vec{s}) = 0$, tj.onda su $\vec{n}$ i $\vec{s}$ kolinearni, tj. vrijedi $\vec{n} = \lambda\vec{s}$ ili

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Primjer Nađite točku u kojoj pravac

$$p....\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$$

probada ravninu

$$\Pi.... -2x + 2y - 2z - 1 = 0,$$

te kut između Π i p.

Parametarska jednadžba pravca je

$$p ... \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -1 - t, \\ z = t, \end{cases}$$

Uvrštavanjem u jednadžbu ravnine dobivamo

$$-2(t+1) + 2(-1-t) - 2t - 1 = 0 \;\Rightarrow\; t = -\frac{5}{6}.$$

Dakle, za vrijednost parametra $t = -\frac{5}{6}$, dobivamo točku

$$P\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{5}{6}\right)$$

u kojoj pravc p probada ravninu Π.

Budući je $\vec{n} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ i $\vec{s} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, onda je

$$\vec{n} = -2\vec{s},$$

pa su $\vec{n}$ i $\vec{s}$ kolinearni ($\psi = \frac{\pi}{2}$), tj. $p \perp \Pi$.