2. MATRICE I DETERMINANTE

- Matrice (pravokutne sheme brojeva) susrećemo kod raznih problema u matematici, ali i u kemiji, fizici, ekonomiji..., jer se s njima relativno jednostavno računa;

- Pojam matrice je, neovisno o primjenama, uveden potkraj 19. st., a povezuje se s imenima J.J. Sylvester-a i A. Cayley-a;

2.1 Definicija matrice

Definicija 2.1 Neka je F bilo koje polje koje ćemo nazivati **osnovno polje**, a njegove elemente **skalarima.** Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ i

$$D_{m,n} = \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\}.$$

Svako preslikavanje

$$A : D_{m,n} \to F.$$

nazivamo **matrica tipa** (m, n) nad poljem F. Vrijednost funkcije A na mjestu (točki) (i, k) označavamo sa

$$A(i, k) = \alpha_{ik} \in F.$$

Budući je domena $D_{m,n}$ konačna (ima mn elemenata), tradicionalan zapis matrice je

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix},$$

ili

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \text{ ili } \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{Vmatrix}.$$

U teoretskim razmatranjima, kad je poznata domena, kraća oznaka je

$$[\alpha_{ik}] \text{ ili } (\alpha_{ik}) \text{ ili } \|\alpha_{ik}\|.$$

Skalare α_{ik}, $i = 1, 2, ...m$ i $k = 1, 2, ..., n$, nazivamo **matričnim elementima,** a α_{ik}, u kraćem zapisu, nazivamo **reprezentant matrice**.

Uređenu $n-$torku

$$(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, ...\alpha_{in})$$

nazivamo $i-$**ti redak** matrice A, a uređenu $m-$torku

$$(\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, ...\alpha_{mk})$$

nazivamo $k-$**ti stupac** matrice A.

Dakle, matrica tipa (m,n) ima m redaka i n stupaca, i kažemo da se element α_{ik} nalazi na presjeku $i-$tog retka i $k-$tog stupaca.

Matrica čiji su svi elementi $\alpha_{ik}=0$ naziva se **nulmatrica** tipa (m,n). Oznaka:

$$O=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Ako je $m=1$, tj. ako je matrica tipa $(1,n)$, tj.

$$[\alpha_{11}, \alpha_{12}, ...\alpha_{1n}],$$

onda kažemo da je matrica **retčana** ili **matrica redak**.

Ako je $n=1$, tj. ako je matrica tipa $(m,1)$, tj.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{bmatrix},$$

onda kažemo da je matrica **stupčana ili matrica stupac.**

Ako je $m = n$, tj. ako je matrica A tipa (n, n), onda govorimo o **kvadratnoj matrici reda** n.

Uređena $n-$torku

$$(\alpha_{11}, \alpha_{22}, ...\alpha_{nn})$$

kvadratne matrice reda n nazivamo **glavna dijagonala** matrice A, uređenu $n-$torku

$$(\alpha_{1n}, \alpha_{2\,n-2}, ...\alpha_{n\,1})$$

nazivamo **sporedna dijagonala** kvadratne matrice A reda n.

Sumu elemenata na glavnoj dijagonali

$$tr\,A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}$$

nazivamo **trag** kvadratne matrice A.

Jedinična matrica je kvadratna matrica kojoj su svi elementi van glavne dijagonale jednaki 0, a na dijagonali jednaki 1, tj, kvadratna matrica s elementima $\alpha_{ij} = \delta_{i,j}$ (Kroneckerov simbol). Oznaka:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Kako su matrice funkcije, dvije matrice $A = [\alpha_{ik}]$ i $B = [\beta_{ik}]$ nad istim poljem F su **jednake,** što pišemo

$$A = B,$$

ako su istog tipa (imaju istu domenu) i ako je $\alpha_{ik} = \beta_{ik}$ za sve $i = 1, 2, ...m$ i $k = 1, 2, ..., n$.

Primjer 1 Matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

nisu jednake jer nisu istog tipa.

Matricom $A = [\alpha_{ik}]$ tipa (m, n) jednoznačno je određena matrica $B = [\beta_{ki}]$ tipa (n, m) definirana s

$$\beta_{ki} = \alpha_{ik}$$

za svaki $i = 1, 2, .., m$ i $k = 1, 2, ..., n$. Tu matricu nazivamo **transponirana matrica** matrice A i označujemo s A^T (ili A').

<u>**Uočimo:**</u>

- Po definiciji, transponiranu matricu A^T, dobivamo iz polazne matrice A zamjenom stupaca s retcima, tj. $i-$ti stupac od A^T podudara se s $i-$tim retkom od A, za svaki $i = 1, 2, .., m$.

Očito je

$$\left(A^T\right)^T = A.$$

Primjer 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \left(A^T\right)^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

- Transponirana matrica kvadratne matrice je opet kvadratna matrica istog reda.

Primjer 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Skup svih matrica tipa (m, n) nad poljem F označimo sa $\mathcal{M}_{m,n}(F)$ (kraće $\mathcal{M}_{m,n}$), a svih kvadratnih matrica reda n nad poljem F označimo sa $\mathcal{M}_n(F)$ (kraće$\mathcal{M}_n$). Sada ćemo na tim skupovima definirati standardne algebarske strukture.

2.2 Linearni prostor $\mathcal{M}_{m,n}$

Neka su $A = [\alpha_{ik}]$ i $B = [\beta_{ik}]$ matrice istog tipa, tj. neka su $A,\, B \in \mathcal{M}_{m,n}$. **Zbroj** matrica (funkcija!) A i B je matrica $C = [\gamma_{ik}]$ koja je istog tipa kao matrice A i B, gdje je

$$\gamma_{ik} = \alpha_{ik} + \beta_{ik}$$

za sve $i = 1, 2, .., m$ i $k = 1, 2, ..., n$. Pišemo:

$$C = A + B.$$

Primjer 4

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Propozicija 2.1 Skup $\mathcal{M}_{m,n}$ je u odnosu na zbrajanje matrica Abelova grupa.

Dokaz:

Za $\lambda \in F$ i bilo koju matricu $A \in \mathcal{M}_{m,n},\ A = [\alpha_{ik}]$ definiramo **produkt te matrice sa skalarom** λ kao matricu $C = [\gamma_{ik}]$ istog tipa kao matrica A, tako da je

$$\gamma_{ik} = \lambda\alpha_{ik}$$

za sve $i = 1, 2, .., m$ i $k = 1, 2, ..., n$. Pišemo $C = \lambda A$.

Primjer 5

$$3\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 9 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Svojstva:

Za svaki izbor λ, μ skalara iz F i matrica A, $B \in \mathcal{M}_{m,n}$ vrijedi (dokazati sami!):

1. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$;

2. $1A = A$;

3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,

4. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,

Teorem 2.1 Skup $\mathcal{M}_{m,n}$ je u odnosu na zbrajanje matrica i množenja sa skalarom linearni prostor nad F i

$$\dim \mathcal{M}_{m,n} = m \cdot n.$$

Dokaz:

Uočimo:

- Po Korolaru 1.5 je
$$\mathcal{M}_{m,n} \cong F^{mn} \text{ i } \mathcal{M}_n \cong F^{n^2}.$$

Specijalno,

$$\mathcal{M}_1 \cong F$$

tj. matrice prvog reda su skalari (uz identifikaciju $[\alpha_{11}] \equiv \alpha_{11}$).

2.3 Množenje matrica. Algebra $\mathcal{M}_n$

- Neka je linearni operator $f : U \to V$ i neka su $A = \{a_1, ..., a_n\}$ i $B = \{b_1, ..., b_m\}$ baze linearnih prostora U i V, redom. Kako je (po Teoremu 1.1) svaki linearni operator jednoznačno zadan svojim djelovanjem na bazi A

$$f\left(a_k\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} b_i, \quad \forall k = 1, ..., n,$$

  onda je linearni operator f jednoznačno zadan skalarima $\alpha_{ik} \in F$, tj. matricom

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}.$$

- Množenje matrica definirat ćemo tako da odgovara produktu (kompoziciji) lineranih operatora.

Za uređen par matrica (A, B) kažemo da je **ulančan** ako matrica A ima onoliko stupaca koliko B ima redaka. Na primjer, A i B su ulančane matrice ako je A tipa (m, p) a B tipa (p, n).

Uočimo:

- Dvije kvadratne matrice istog reda su uvijek ulančane;
- Ako je uređen par matrica (A, B) ulančan, ne slijedi da je i uređen par (B, A) ulančan (osim ako je $m = n$);

Definicija 2.2 Neka su $A = [\alpha_{ik}]$ tipa (m, p) i $B = [\beta_{ik}]$ tipa (p, n) ulančane matrice nad istim poljem F. Tada je **umnožak (produkt)** matrica A i B matrica $C = [\gamma_{ik}]$ tipa (m, n) , gdje je

$$\gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij}\beta_{jk} = \alpha_{i1}\beta_{1k} + \alpha_{i2}\beta_{2k} + ... + \alpha_{ip}\beta_{pk}$$

za sve $i = 1, 2, .., m$ i $k = 1, 2, ..., n$. Pišemo $C = AB$.

Zaključak: Množenje matrica je preslikavanje (operator)

$$\mathcal{M}_{m,p} \times \mathcal{M}_{p,n} \to \mathcal{M}_{m,n}.$$

Uočimo:

- Općenito matrice istog tipa se ne mogu množiti. To je moguće onda i samo onda ako su kvadratne istog reda;

- Množenje matrica **nije komutativno** jer:

- ako je AB definirano, ne mora biti definirano i BA;
- ako je definirano AB i BA, to ne moraju biti matrice istog tipa;
- ako je definirano AB i BA i ako su to matrice istog tipa (reda), općetito je $AB \neq BA$;
- specijalno, ako je $AB = BA$, onda kažemo da A i B **komutiraju**.

Primjer 6

- Ako je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow AB \neq BA$$

- Ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$AB = BA = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow A \text{ i } B \text{ komutiraju.}$$

Propozicija 2.2 Množenje matrica je asocijativno, tj. vrijedi

$$A(BC) = (AB)C,$$

kad god su ti produkti definirani.

Dokaz:

Propozicija 2.3 Množenje matrica je

i) kvaziasocijativno, tj. vrijedi

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B), \quad \forall \lambda \in F;$$

ii) distributivno prema zbrajanju, tj. vrijedi

$$(A+B)C = AC + BC$$

$$A(B+C) = AB + AC$$

kad god su ti produkti definirani.

Dokaz:

Napomena: Može se pokazati da za transponiranje vrijedi $(AB)^T = B^T A^T$ (sami dokazati!).

Budući je:

- $\mathcal{M}_n$ svih kvadratnih matrica reda n vektorski prostor nad poljem F (Teorem 2.1);
- matrice iz $\mathcal{M}_n$ se mogu množiti i umnožak je opet iz $\mathcal{M}_n$, dakle dobro je definirana binarna operacija
$$\cdot \ : \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$$
na skupu $\mathcal{M}_n$;
- operacija množenja ima svojstva *i)* i *ii)* iz Propozicije 2.3,

onda $\mathcal{M}_n$ ima strukturu **algebre nad poljem** F.

Uočimo: Množenje u algebri $\mathcal{M}_n$:
- je asocijativno (Propozicija 2.2);
- operacija množenja ima jedinicu (jedinična matrica $E \in \mathcal{M}_n$) jer vrijedi
$$AE = EA = A,$$
za svaki $A \in \mathcal{M}_n$;
- operacija množenja nije komutativna (osim za $n = 1$).

Zaključak: *Linearni prostor $\mathcal{M}_n$ ($n > 1$) nad poljem F s obzirom na množenje matrica, je asocijativna, nekomutativna algebra s jedinicom nad poljem F.*

2.4 Regularne matrice. Opća linerana grupa

Promotrimo strukturu $(\mathcal{M}_n, \cdot)$. To je nekomutativan monoid, a u toj strukturi može se uvesti pojam inverznog elementa.

Definicija 2.3 Neka je $A \in \mathcal{M}_n$. Za matricu A kažemo da je **regularna** (**invertibilna**) ako postoji matrica X za koju vrijedi

$$AX = XA = E.$$

Budući da je matrica X jedinstvena (jer ako inverz u monoidu postoji, onda je jedinstven), uvodimo oznaku

$$X = A^{-1}$$

i matricu A^{-1} nazivamo **inverzna martica** ili **inverz** matrice A.

Za matricu A kažemo da je **singularna** ukoliko nije regularna.

Budući da skup svih invertibilnih elemenata u monoidu čini grupu vrijedi:

Teorem 2.2 Skup svih regularnih matrica reda n nad poljem F čini, u odnosu na množenje, (nekomutativnu) grupu.

Napomena: Dokaz ovog teorema se može provesti i direktno u ovom specijalnom slučaju.

Grupu svih regularnih matrica reda n nad poljem F obično označujemo sa

$$GL(n, F)$$

i nazivamo **opća linearna grupa** (matrica reda n nad poljem F).

Definicija 2.4 Neka je $A \in \mathcal{M}_n$. Za matricu A kažemo da je **ortogonalna** ako vrijedi

$$AA^T = A^T A = E.$$

<u>**Uočimo:**</u> Iz Definicije 2.3 slijedi da je svaka ortogonalna matrica regularana i da je

$$A^{-1} = A^T.$$

Dakle, alternativna definicija je: $A \in \mathcal{M}_n$ je ortogonalna matrica ako je $A^{-1} = A^T$.

Primjer 7 Neka je za $\alpha \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$AA^T = A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E \Rightarrow A$ je ortogonalna.

Teorem 2.3 Skup svih ortogonalnih matrica reda n nad poljem F čini, podgrupu od $GL(n, F)$.

Dokaz:

Grupu svih ortogonalnih matrica reda n nad poljem F obično označujemo sa

$$O(n, F)$$

i nazivamo **ortogonalna grupa** (matrica reda n nad poljem F).

Struktura ortogonalne matrice:

Propozicija 2.4 Neka je $A = [\alpha_{ik}]$ ortogonalna matrica. Onda je

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\alpha_{kj} = \delta_{ik}$$

i

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}\alpha_{jk} = \delta_{ik}$$

za sve $i = 1, 2, .., n$ i $k = 1, 2, ..., n$.

Dokaz:

Uočimo: Ako je $A = [\alpha_{ik}]$ ortogonalna matrica, iz Propozicije 2.4 slijedi:

- Za $i = k$ je
$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^2 = 1$$
(suma kvadata elemenata nekog retka je 1);

- Za $i \neq k$ je
$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\alpha_{kj} = 0$$
(suma produkata odgovarajućih elemenata dva različita retka (skalarni produkt) je 0);

- Analogno vrijedi i za stupce;

- Zbog ovoga kažemo da retci (stupci) u ortogonalnoj matrici čine **ortonormirani sustav** (analog. sa V^3).

Obrat Propozicije 2.4:

Propozicija 2.5 Neka je $A = [\alpha_{ik}]$ kvadratna matrica kojoj retci i stupci čine ortonormirani sustav. Onda je A ortogonalna matrica.

Dokaz:

2.5 Rang matrice

Svakoj matrici

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

pridružit ćemo nenegativan cijeli broj, njezin rang, koji govori o stupnju "nedegeneriranosti" te matrice.

Promotrimo linearan prostor

$$\mathcal{M}_{m,1} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} : \alpha_i \in F \right\}$$

(vektori su **stupci**). Ovaj prostor je izomorfan sa $\mathcal{M}_{m,1} \cong F^m$ i dimenzije je

$$\dim \mathcal{M}_{m,1} = m.$$

Matrici $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ danoj s (1), pridružimo stupčane matrice

$$S_k = \begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{mk} \end{bmatrix}, \quad k = 1, ..., n,$$

određene stupcima matrice A. Na taj način je matrici A pridružen jednoznačno određen $n-$člani skup stupaca iz $\mathcal{M}_{m,1}$

$$A \longmapsto \{S_1, ..., S_n\} \subset \mathcal{M}_{m,1}.$$

To je tzv. **stupčana reprezentacija** matrice A.

Ako maksimalni linearno nezavisni podskup u stupčanoj reprezentaciji $\{S_1, ..., S_n\}$ ima r vektora (stupaca), onda taj broj $r'(A) = r'$ nazivamo **rang po stupcima matrice** A.

Uočimo:

- $$r'(A) = \dim [\{S_1, ..., S_n\}]$$

  gdje je $[\{S_1, ..., S_n\}]$ potprostor od $\mathcal{M}_{m,1}$ razapet vektorima (stupcima) $S_1, ..., S_n$;

• Ako je matrica A tipa (m, n) onda je

$$r'(A) \leq \min\{m, n\}.$$

Analogno, promotrimo linearan prostor

$$\mathcal{M}_{1,n} = \left\{ \left[\ \alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \cdots\ \ \alpha_n\ \right] : \alpha_i \in F \right\}$$

(vektori su **retci**). Ovaj prostor je izomorfan sa $\mathcal{M}_{1,n} \cong F^n$ i dimenzije je $\dim \mathcal{M}_{1,n} = n$.

Matrici $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ danoj s (1), pridružimo redčane matrice

$$R_i = \left[\ \alpha_{i1}\ \ \alpha_{i2}\ \ \cdots\ \ \alpha_{in}\ \right], \ \ i = 1, ..., m,$$

određene retcima matrice A. Na taj način je matrici A pridružen jednoznačno određena $m-$člani skup redaka iz $\mathcal{M}_{1,n}$

$$A \longmapsto \{R_1, ..., R_m\} \subset \mathcal{M}_{1,n}.$$

To je tzv. **retčana reprezentacija** matrice A.

Ako maksimalni linearno nezavisni podskup u retčanoj reprezentaciji $\{R_1, ..., R_m\}$ ima r'' vektora (redaka), onda taj broj $r''(A) = r''$ nazivamo **rang po retcima matrice** A.

Analogno, vrijedi:

- $$r''(A) = \dim[\{R_1, ..., R_m\}]$$

  gdje je $[\{R_1, ..., R_m\}]$ potprostor od $\mathcal{M}_{1,n}$ razapet vektorima (stupcima) $R_1, ..., R_m$;

- Ako je matrica A tipa (m, n) onda je

  $$r''(A) \leq \min\{m, n\}.$$

Može se pokazati da je:

$$r'(A) = r''(A) = r,$$

pa broj $r = r(A)$ nazivamo **rang matrice** A.

Posljedica:

- $r(A) \leq \min\{m, n\}$;

- Matrica A i njoj transponirana matrica A^T imaju isti rang, tj.

  $$r(A) = r\left(A^T\right).$$

Primjer 8

- $$r\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \;\Rightarrow r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2$$
- $$r\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 1 \;\Rightarrow r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}\right) = 1$$

- $r\,(O) = 0$, gdje je O nulmatrica bilo kojeg tipa i to je jedina ranga 0;

- $r\,(E) = n$, gdje je E jedinična matrica reda n;

Efektivno računanje ranga

Elementarne transformacije nad matricom A:

1. Zamjena dva retka (stupca) matrice A;

2. Množenje nekog retaka (stupca) matrice A skalarom različitim od 0;

3. Dodavanje nekog retka (stupca) matrice A nekom drugom retku (stupcu) te matrice.

Neka su matrice A, $B \in \mathcal{M}_{m,n}$ dvije matrice istog tipa. Kažemo da je matrica A **ekvivalentna** matrici B i pišemo

$$A \sim B,$$

ako postoji konačan niz matrica

$$A = A_1,\ A_2, ..., A_{k-1},\ A_k = B$$

sa svojstvom da se matrica A_i dobiva primjenom jedne od elementarnih transformacija na matricu A_{i-1}, za svaki $i = 2, 3, ..., k$.

Očito je $\sim$ **realacija ekvivalencije** na skupu $\mathcal{M}_{m,n}$.

Propozicija 2.6 Ekvivalentne matrice imaju isti rang.

Dokaz: Bez dokaza.

Cilj: Matricu svesti na njoj ekvivalentnu kojoj je rang evidentan.

Neka je $r \leq m, n$ nenegativan cijeli broj, a $D_r = [\alpha_{ik}]$ matrica tipa (m, n) kojoj su elementi dani sa

$$\alpha_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \leq r \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

tj. matrica oblika

$$D_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Ova matrica ima rang r i nazivamo je **kanonska matrica ranga** r tipa (m, n). Očito je $D_0 = O$.

Teorem 2.4 Svaka matrica je ekvivalentna kanonskoj matrici D_r istog tipa, za neki r.

Dokaz: Bez dokaza.

Posljedica 2.1 Matrica A ima rang r ako i samo ako je ekvivalentna kanonskoj matrici D_r istog tipa.

Dokaz:

Primjer 9

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{I\,r. \leftrightarrows II\,r.}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{-2\cdot I\,r + IIr.}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{-2\cdot Is + IIs.}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{-1\cdot Is + IIIs.}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{IIs. \leftrightarrows IIIs.}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = D_2$$

$$\Longrightarrow r(A) = 2.$$

<u>**Uočimo:**</u>

- Rang ne ovisi o načinu svođenja na kanonski oblik;
- Rang **karakterizira** ekvivalentne matrice.

Posljedica 2.2 Dvije matrice istog tipa su ekvivalentne ako i samo ako imaju isti rang.

<u>Dokaz:</u>

<u>**Zaključak:**</u> Na skupu $\mathcal{M}_{m,n}$ ima točno $k+1$ klasa ekvivalencije, gdje je $k = \min\{m, n\}$, a klase su reprezentirane kanonskim matricama $D_0, D_1, ..., D_k$.

2.6 Pojam determinante. Osnovna svojstva

- Determinanta je prvo u algebru uvedena kao sredstvo za rješavanje sustava linearnih jednadžbi;

- Danas detreminanta igra važnu ulogu u teoriji matrica. Pomoću nje dobivamo važne informacije o rangu i regularnosti dane matrice;

Prisjetimo se:

- Neka je $S = \{1, 2, ..., n\}$. Svaku bijekciju $p : S \to S$ nazivamo **permutacija** od S. Oznaka

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ p(1) & p(2) & ... & p(n) \end{pmatrix};$$

- Skup svih permutacija S_n od S čini grupu s obzirom na kompoziciju kao binarnu operaciju i ta grupa je reda $n!$;

- Neka je $p \in S_n$. **Inverzija** u p je svaki slučaj kada je

$$i < j \quad \text{i} \quad p(i) > p(j) .$$

  Ukupan broj inverzija u p označujemo sa $I(p)$ i definiramo

$$sign(p) = (-1)^{I(p)}$$

kao **parnost** permutacije (p parna $sign(p) = 1$, p neparna $sign(p) = -1$).

Definicija 2.5 Neka je $A = [\alpha_{ik}] \in \mathcal{M}_n(F)$. Preslikavanje

$$\det : \mathcal{M}_n(F) \to F$$

definirano sa

$$\det A = \sum_{p \in S_n} (-1)^{I(p)} \alpha_{1p(1)} \alpha_{2p(2)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{np(n)}$$

nazivamo **determinantnom funkcijom**, a njenu vrijednost $\det A$ na matrici A nazivamo **determinantnom** matrice A ($\det A \in F$).

Uočimo:

- **Osnovni sumand**

$$(-1)^{I(p)} \alpha_{1p(1)} \alpha_{2p(2)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{np(n)}$$

(ima ih $n!$) dobiva se od n elemenata, od kojih nikoja dva nisu u istom retku i istom stupcu, a predznak ovisi o parnosti permutacije p drugih indeksa.

Uobičajena oznaka za je

$$\det A = |A| = |\alpha_{ik}|\,,$$

ili kraće

$$\det A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}.$$

U ovoj oznaci, red determinante, elemente, retke, stupce, dijagonale, definiramo analogno kao kod pripadne matrice.

Iz definicije imamo:

- Za $n = 1$, tj. za matricu $A = [\alpha_{11}]$ imamo

$$\det A = |\alpha_{11}| = \alpha_{11};$$

Za $n = 2$ imamo

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0\, \alpha_{11}\alpha_{22} + (-1)^1\, \alpha_{21}\alpha_{12};$$

Za $n = 3$ imamo

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^0 \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + (-1)^1 \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} + (-1)^1 \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}$$

$$+ (-1)^2 \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + (-1)^2 \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} + (-1)^3 \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} =$$

$$= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}$$

$$+\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}.$$

Ili lakše pamtljivo, tzv. **Sarrusovo pravilo**

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{array} \right| =$$

$$= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{31}$$

$$-\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}.$$

<u>Uočimo:</u>

- Efektivno računanje determinante, po definiciji, već za $n \geq 3$, je vrlo komplicirano (problem raste s n - za $n = 10$ imamo $10! \approx 3,6$ milijuna osnovnih sumanada);

- Pojednostavljenje: korištenjem nekih svojstava determinante.

Propozicija 2.7 Neka je $A = [\alpha_{ik}] \in \mathcal{M}_n(F)$ tada je

$$\det A = \sum_{q \in S_n} (-1)^{I(q)} \alpha_{q(1)1} \alpha_{q(2)2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{q(n)n}$$

(u osnovnom sumandu su faktori svrstani po prirodnom poretku stupaca).

Dokaz:

Posljedica 2.3 Za svaki $A = [\alpha_{ik}] \in \mathcal{M}_n(F)$ je

$$\det A = \det A^T.$$

Dokaz:

Propozicija 2.8 Ako je matrica B dobivena iz A zamjenom njezinih susjednih redaka (stupaca), onda je

$$\det B = -\det A.$$

Dokaz:

Posljedica 2.4 Ako je matrica B dobivena iz A zamjenom bilo koja dva redaka (stupaca), onda je

$$\det B = -\det A.$$

Dokaz:

Uočimo:

- Determinanta primjenom elementarne transformacije 1. mijenja predznak.

Posljedica 2.5 Ako matrica A ima dva ista redaka (stupaca), onda je

$$\det A = 0.$$

Dokaz:

Propozicija 2.9 Ako je matrica B dobivena iz A množenjem jednog njezinog redaka (stupaca) skalarom $\lambda \in F$, onda je

$$\det B = \lambda \det A.$$

Dokaz:

Uočimo:

- Determinanta primjenom elementarne transformacije 2. promijeni se za faktor λ.

Posljedica 2.6 Ako matrica A ima dva proporcionalna retka (stupaca), onda je

$$\det A = 0.$$

Dokaz:

Posljedica 2.7 Ako je A matrica reda n i $\lambda \in F$ bilo koji skalar tada je

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A.$$

Dokaz:

Propozicija 2.10 Neka su $A = [\alpha_{ik}]$, $B = [\beta_{ik}]$, $C = [\gamma_{ik}]$ matrice istog reda n, sa svojstvom

$$\gamma_{ik} = \begin{cases} \alpha_{ik} + \beta_{ik}, & i = s \\ \alpha_{ik} = \beta_{ik}, & i \neq s \end{cases},$$

za odabrani $s \leq n$ i za sve k. Onda je

$$\det C = \det A + \det B.$$

Isto vrijedi i za odabrani stupac.

Dokaz:

Uočimo:

- Općenito je

  $$\det(A + B) \neq \det A + \det B,$$

  ali se $\det(A + B)$ može prikazati kao suma 2^n determinanti.

Posljedica 2.8 Ako je matrica B dobivena iz A dodavanjem nekog njezinog redaka (stupaca) nekom drugom retku (supcu), onda je

$$\det B = \det A.$$

Dokaz:

Uočimo:

- Determinanta se, primjenom elementarne transformacije 3., ne mijenja.

Posljedica 2.9
Ako se nekom retku (stupcu) matrice doda linearna kombinacija ostalih redaka (stupaca), njezina se determinanta ne mijenja.

Ako je neki redak (stupac) matrice linearna kombinacija ostalih redaka (stupaca), njena determinanta je jednaka nuli.

Dokaz:

2.7 Binet-Cauchyjev teorem.

Svojstva determinante

$$\det \lambda A \;=\; \lambda^n \det A$$

$$\det (A + B) \;\neq\; \det A + \det B \;\; \text{(općenito)},$$

pokazuju da preslikavanje (funkcional)

$$\det : \mathcal{M}_n (F) \to F$$

nije linearni funkcional na $\mathcal{M}_n (F)$**.** Ali ovo preslikavanje (funkcional) "poštuje množenje", tj. vrijedi:

Teorem 2.5 (Binet-Cauchy) Za svaki par matrica A, $B \in \mathcal{M}_n (F)$ vrijedi

$$\det (AB) = \det A \cdot \det B.$$

Dokaz:

Posljedica 2.10 Za svaki par matrica A, $B \in \mathcal{M}_n (F)$ vrijedi

$$\det (AB) = \det (BA)$$

Dokaz:

Propozicija 2.11 Ako je matrica ortogonalna, onda je

$$\det A = \pm 1.$$

Dokaz:

Uočimo: Obrat ove propozicije ne vrijedi. Npr. za

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

je $\det A = 1$, ali A nije ortogonalna jer je joj retci (stupci) ne čine ortonormirani sustav.

2.8 Laplaceov razvoj determinante.

Determinantu reda 3 računali smo pomoću determinanti reda 2 na sljedeći način:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_{11} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$$

(razvoj po prvom retku). Generalizirajmo ovo:

Neka je $A = [\alpha_{ik}]$ kvadratna matrica reda n i

$$\det A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{p \in S_n} (-1)^{I(p)} \alpha_{1p(1)} \alpha_{2p(2)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{np(n)} \qquad (1)$$

njena determinanta.

- Izdvojimo $i-$ti redak

$$\{\alpha_{i1},\ \alpha_{i2}, \cdots \alpha_{in}\}. \qquad (2)$$

- Svaki osnovni sumand u (1) sadrži točno jedan element iz skupa (2);

- Element α_{ik} sadrži točno $(n-1)!$ osnovnih sumanada;

- Izlučimo element α_{ik} iz tih $(n-1)!$ osnovnih sumanada. U zagradi ostaje suma produkata od $n-1$ elementa dane determinante, od kojih niti jedan nije iz $i-$tog retka i $k-$tog stupca. Izraz u zagradi nazivamo **algebarski komplement** ili **kofaktor** elementa α_{ik} kojeg označujemo sa

$$A_{ik}.$$

- Primjer: Za $n = 3$ imamo

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33}$$

$$+\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}.$$

  Izdvojimo prvi redak i element α_{13}. Njegov algebarski komplement nalazimo na sljedeći način

$$\alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} = \alpha_{13}\left(\alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31}\right) \;\Rightarrow$$

$$A_{ik} = \alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{31}$$

- Analogno vrijedi za fiksikrani odabrani $k-$ti stupac;

- Kako je determinanta suma svih svojih osnovnih sumanada, imamo:

Propozicija 2.12 (Laplace) Za matricu $A = [\alpha_{ik}]$ vrijedi:

1) $\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} A_{ij}$ za svaki $i = 1, ..., n$;

2) $\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{jk} A_{jk}$ za svaki $k = 1, ..., n$.

Kažemo da je 1) razvoj $\det A$ po njenom $i-$to retku, a 2) razvoj $\det A$ po njenom $k-$tom stupcu.

Struktura algebarskih komplemenata A_{ik}:

- Neka je α_{ik} bilo koji element matrice A;
- Uočimo submatricu od A koja se dobije ispuštanjem $i-$tog retka i $k-$tog stupca iz A;
- Označimo njenu determinantu sa

$$\Delta_{ik} = \det \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,k-1} & \alpha_{1,k+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i-1,1} & \cdots & \alpha_{i-1,k-1} & \alpha_{i-1,k+1} & \cdots & \alpha_{i-1,n} \\ \alpha_{i+i,1} & \cdots & \alpha_{i+i,k-1} & \alpha_{i+i,k+1} & \cdots & \alpha_{i+i,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{n,k-1} & \alpha_{n,k+1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ovo je determinanta $(n-1)-$reda, a nazivamo je **subdeterminanta** ili **minora** matrice A određena elementom α_{ik}.

Teorem 2.6 Za svaki $i, k = 1, ..., n$ vrijedi

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \Delta_{ik}.$$

<u>Dokaz:</u> Bez dokaza.

Iz Propozicije 2.12 i Teorema 2.6 slijedi: za matricu $A = [\alpha_{ik}] \in \mathcal{M}_n$ je:

1) $\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ij}\Delta_{ij}$ za svaki $i = 1, ..., n$;

2) $\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} \alpha_{jk}\Delta_{jk}$ za svaki $k = 1, ..., n$.

Primjer

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (\text{drugi redak}) = (-1)^{2+1} \cdot 2 \cdot |-3| + (-1)^{2+2} \cdot 4 \cdot |1|$$

$$= (-1) \cdot 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 \cdot 1 = 10$$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (\text{treći stupac}) = (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 1 \cdot (1 - 2) + 0 = 1.$$

Propozicija 2.13 Za matricu $A = [\alpha_{ik}]$ je, uz $i \neq j$,

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} A_{jk} = 0.$$

<u>Dokaz:</u> Bez dokaza.

Posljedica 2.11 Za bilo koju matricu $A = [\alpha_{ik}]$ je

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} \det A;$

2) $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ik} A_{jl} = \delta_{kl} \det A.$

<u>Dokaz:</u>

Neka je matrica $A = [\alpha_{ik}] \in \mathcal{M}_n$, a $[A_{ik}]$ matrica algebarskih komplemenata matrice A. Transponiranu matricu te matrice, tj. matricu

$$\tilde{A} = [A_{ik}]^T = [A_{ki}] \,.$$

nazivamo **adjunkta** matrice A.

Propozicija 2.14 Za svaku matricu $A \in \mathcal{M}_n$

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det A \cdot E,$$

gdje je E jedinična matrica reda n.

<u>Dokaz:</u>

Posljedica 2.12 Za svaku matricu $A \in \mathcal{M}_n$ je

$$\det A \cdot \det \tilde{A} = (\det A)^n \,.$$

<u>Dokaz:</u>

2.9 Još o rangu i inverzu matrice

Pomoću determinante možemo utvrditi je li matrica regularna ili nije, te odrediti njezin rang, odnosno inverz ako je regularna.

Teorem 2.6 Matricu $A \in \mathcal{M}_n$ je regularna onda i samo onda ako je $\det A \neq 0$.

Dokaz:

Posljedica 2.13 Ako je $A \in \mathcal{M}_n$ je regularna, njen inverz je dan formulom

$$A^{-1} = (\det A)^{-1}\, \tilde{A},$$

gdje je $\tilde{A}$ adjunkta matrice A.

Dokaz:

Posljedica 2.14 Neka je $A \in \mathcal{M}_n$. Onda je:

a) $\det A \neq 0$ ako i samo ako skup njezinih stupaca (redaka) linearno nezavisan;

b) $\det A = 0$ ako i samo ako skup njezinih stupaca (redaka) linearno zavisan.

Dokaz: