3. INVARIJANTE LINEARNOG OPERATORA

- U ovom poglavlju ispitat ćemo još neka svojstva svojstva linearnih operatora koristeći matrice i determinante.

3.1 Koordinatizacija

Neka je V linearni prostor nad poljem F i neka je $\dim V = n$. Neka je

$$B = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

bilo koja baza od V. Tu bazu nazivamo još i **koordinatna baza** ili **koordinatni sustav**. Neka je $a \in V$ bilo koji vektor, onda on ima jednoznačan prikaz oblika

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i.$$

Koeficijente $\alpha_i \in F$ nazivamo **koordinatama,** a uređenu $n-$torku

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \text{(kraće)} = (\alpha_i)$$

koordinatnim slogom, a matricu

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \text{(kraće)} = [\alpha_i] \, ,$$

koordinatnim matricom vektora a u bazi B. Neka je

$$k : V \to F^n.$$

preslikavanje (operator) definirano sa

$$k(a) = (\alpha_i) \, ,$$

a

$$h : V \to \mathcal{M}_{n1}.$$

preslikavanje (operator) definirano sa

$$h(a) = [\alpha_i] \, .$$

Propozicija 3.1 Preslikavanja (operatori) k i h su izomorfizmi linearnih prostora.

<u>Dokaz:</u> Trivijalan (sami).

Svaki od tih izomorfizama nazivamo **koordinatizacija prostora** V s obzirom na danu bazu B i (budući je $V \underset{k}{\cong} F^n \underset{h}{\cong} \mathcal{M}_{n1}$) imamo identifikaciju

$$a \;=\; k(a) = h\,(a)\,,\text{ tj.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \;=\; (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

ili kraće

$$a = (\alpha_i)\,,\text{ odnosno } a = [\alpha_i]\,.$$

Neka je $S = \{x_1, ..., x_s\} \subset V$ skup vektora i neka je za $k = 1, ..., s$

$$x_k = \begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{nk} \end{bmatrix}$$

koordintna matrica vektora $x_k \in S$ u bazi B. Tada skupu S možemo pridružiti matricu tipa (n, s)

$$M\,(S) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1s} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{ns} \end{bmatrix}$$

kojoj se stupci podudaraju s koordintna matrica vektora x_k, $k = 1, ..., s$. Matricu $M(S)$ nazivamo **matrica skupa vektora** S s obzirom na bazu B.

Propozicija 3.2 Maksimalni linearno nezavisan podskup skupa S sadrži r vektora ako i samo ako je rang matrice $M(S)$ jednak r.

Dokaz:

Posljedica 3.1 Skup $S = \{x_1, ..., x_n\}$ od n vektora iz V bit će baza prostora V onda i samo onda ako je matrica $M(S)$ toga skupa regularna, tj. ako i samo ako je

$$\det M(S) \neq 0.$$

3.2 Transformacija koordinata

Neka su $B = (a_i)$ i $B' = (a_i')$ dvije koordinatne baze linearnog prostora V. Ako je $a \in V$ bilo koji vektor, on ima svoju koordinatnu matricu $X = [\alpha_i]$ u bazi B i koordinatnu matricu $X' = [\alpha_i']$ u bazi B'.

Pitanje: Po kakvom se zakonu mijenjaju koordinate vektora a pri prijelazu iz jednog koordinatnog sustava u drugi, tj. kakva je veza matrica X i X'.

Neka su zadane koordinate vektora baze B' u bazi B, tj. neka je poznato

$$a_k' = \begin{bmatrix} \beta_{1k} \\ \vdots \\ \beta_{nk} \end{bmatrix}$$

gdje je $k = 1, ..., n$. Matricu

$$T = M\left(B'\right) = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn} \end{bmatrix}$$

skupa B' u bazi B nazivamo **matricom prijelaza** ili **matrica transformacije** baze B u bazu B'. Pišemo $B \xrightarrow{T} B'$. Kako je B' baza, po Korolaru 3.1, zaključujemo da je matrica T uvijek regularna, pa je

$$\det T \neq 0.$$

Teorem 3.1 Neka su X i X' koordinatne matrice vektora $a \in V$ u bazama B, odnosno B', a T neka matrica prijelaza iz prve baze u drugu. Onda je

$$X = TX',$$

odnosno

$$X' = T^{-1}X.$$

Dokaz:

Relacije

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} \alpha'_k, \quad i = 1, ..., n,$$

i njima inverzne

$$\alpha'_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} \alpha_k, \quad i = 1, ..., n,$$

gdje je $[\gamma_{ik}] = T^{-1}$, nazivamo **jednadžbama transformacije koordinata.**

3.3 Matrični zapis linearnog operatora

U 2. poglavlju smo spomenuli da se linearni operatori mogu reprezentirati matricama. Ponovimo:

Neka su U i V linearni prostori nad istim poljem F, dimenzija n i m, redom. Neka je

$$l : U \to V$$

linearni operator i neka su $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_n\}$ i $\mathcal{F} = \{f_1, ..., f_m\}$ baze linearnih prostora U i V, redom.

Kako je (po Teoremu 1.1) svaki linearni operator jednoznačno zadan svojim djelovanjem na bazi $\mathcal{E}$

$$l(e_k) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} f_i, \quad \forall k = 1, ..., n,$$

onda je linearni operator f jednoznačno zadan skalarima $\alpha_{ik} \in F$, tj. matricom

$$L = L_{(\mathcal{E},\mathcal{F})} = M((l(e_1), ..., l(e_n))) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}.$$

tipa (m, n). Stupci ove matrice su koordinate slika $l(e_k)$ vektora iz baze $\mathcal{E}$ u bazi $\mathcal{F}$.

Matricu L nazivamo **matrična reprezentacija**, ili kraće, **matrica** operatora l u paru baza $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

Ako je $U = V$, onda standardno uzimamo $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ i govorimo o matrici operatora l u bazi $\mathcal{E}$.

Primjer 1

1.1 Projektor

$$p : F^3 \to F^2, \;\; p(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \beta),$$

u paru kanonskih baza dan je matricom

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.2 Nul-operator

$$n : V \to V, \; n(x) = \Theta_V, \; \forall x \in V,$$

u bilo kojoj bazi, dan je nul-matricom

$$O = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Propozicija 3.3 Rang linearnog operatora $l : U \rightarrow V$ jednak je rangu matrice L tog operatora.

Dokaz:

Posljedica 3.2 Linearni operator je izomorfizam linearnih prostora ako i samo ako je matrica tog operatora regularna.

Dokaz:

Neka je $l : U \rightarrow V$ linearni operator i neka je $L = [\alpha_{ik}]$ njegova matrična reprezentacija u paru baza $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

Neka je $a \in U$ bilo koji vektor, te neka je $X = [\alpha_i]$ njegova koordinatna matrica u bazi $\mathcal{E}$.

Ako je $Y = [\beta_i]$ koordinatna matrica slike $l(a) \in V$ u bazi $\mathcal{F}$, treba naći vezu izmedu X i Y, tj. treba vidjeti kako se pomoću X i L može naći Y.

Propozicija 3.4 Koordinate slike dane su relacijom

$$Y = LX.$$

Dokaz:

3.4 Izomorfizam prostora $Hom(U, V)$ i $\mathcal{M}_{mn}$

Lema 3.1 Neka su $A = [\alpha_{ik}]$ i $B = [\alpha_{ik}]$ matrice tipa (m, n) . Ako je

$$AX = BX$$

za svaku stupčanu matricu $X \in \mathcal{M}_{n1}$, onda je

$$A = B.$$

Dokaz:

Teorem 3.2 Neka su $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_n\}$ i $\mathcal{F} = \{f_1, ..., f_m\}$ baze linearnih prostora U i V, redom. Neka je

$$\Phi : Hom(U, V) \to \mathcal{M}_{mn}$$

preslikavanje (operator) definirano s

$$\Phi\,(l) = L,$$

gdje je L matrica operatora l u paru baza $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Tada je Φ izomorfizam linearnih prostora. Specijalno, ako je $U = V$,

$$\Phi : HomV \to \mathcal{M}_n$$

je izomorfizam algebri.

Dokaz: Ideja dokaza.

Uočimo:

- Budući Φ ovisi o izboru baza, ispravnije bi bilo pisati $\Phi_{(\mathcal{E},\mathcal{F})}$.

- Pomoću izomorfizma Φ imamo korespodenciju:

$$\begin{aligned} l+h &\longrightarrow L+H, \\ \lambda l &\longrightarrow \lambda L, \\ lh &\longrightarrow LH. \end{aligned}$$

- Po Korolaru 3.2, izomorfizam linearnih prostora reprezentiran regularnom matricom (u bilo kojem paru baza), onda se, specijalno, automorfizam $l : V \to V$ naziva *regularni operator*.

- Budući skup svih regularnih operatora

$$AutV$$

čini multiplikativnu grupu, onda, na osnovi izomorfizma danog u Teoremu 3.2, identificiramo

$$AutV = GL\left(n, F\right),$$

tj. multiplikativnu grupu $AutV$ nazivamo *opća linearna grupa.*

3.5 Odnos matričnih zapisa istog linearnog operatora

Neka je

$$l : V \to V$$

linearni operator, L matrica operatora l u bazi $\mathcal{E}$, a L' matrica operatora l u baza $\mathcal{E}'$.

Veza izmedu matrica L i L':

Teorem 3.3 Neka su L i L' matrice linearnog operatora $l : V \to V$ u bazi $\mathcal{E}$, odnosno $\mathcal{E}'$, redom. Tada je

$$L' = T^{-1}LT$$

gdje je T matrica prijelaza iz baze $\mathcal{E}$ u bazu $\mathcal{E}'$.

Dokaz:

Definicija 3.1 Neka su A i B kvadratne matrice istog reda, tj. neka su A, $B \in \mathcal{M}_n$. Kažemo da je matrica A **slična** matrici B, ako postoji regularna matrica $T \in \mathcal{M}_n$ takva da je

$$B = T^{-1}AT.$$

Pišemo

$$A \simeq B.$$

Lako se provjeri da je sličnost relacija ekvivalencije na skupu $\mathcal{M}_n$.

Preformulacija Teorema 3.3:

Posljedica 3.3 Matrice istog linearnog operatora u različitim bazama su slične matrice.

3.6 Karakteristični polinom. Hamilton-Cayleyev teorem

- Zanimat će nas **invarijante linearnog** operatora, tj. svojstva koja se mogu pročitati iz matričnog zapisa linearnog operatora, ali pri tom ne ovise o tom zapisu tj. o izboru baze.

- Dakle, ovo se svodi, budući da ta svojstva promatramo matrično, na proučavanje zajedničkih svojstava neke klase sličnih matrica, tzv. **invarijanti sličnosti**. Jedno takvo svojstvo smo upoznali, a to je rang matrice.

Definicija 3.2 Neka je A kvadratna matrica reda n nad poljem F. Tada matricu

$$C = A - \lambda E,$$

gdje je λ proizvoljan (promjenjivi) skalar, a E jedinična matrica, nazivamo **karakteristična** (ili **svojstvena**) **matrica** za matricu A. Njenu determinantu

$$\det\left(A - \lambda E\right),$$

nazivamo **karakteristični** (ili **svojstveni**) **polinom** za matricu A. Nadalje,

$$\det\left(A - \lambda E\right) = 0,$$

nazivamo **karakteristična** (ili **svojstvena**) **jednadžba** za matricu A.

Uočimo:

• Ako je $A = \left[\alpha_{ik}\right]$, onda je karakteristična matrica

$$C = \begin{bmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} - \lambda \end{bmatrix}.$$

• Sada je, očito, karakteristični polinom

$$\det C = \det (A - \lambda E) = k_A(\lambda)$$

$$= k_A(\lambda) = k_n \lambda^n + k_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + k_0, \quad k_i \in F,$$

polinom $n-$tog stupnja u varijabli λ s koeficijentima iz F, a karakteristična jednadžba je oblika $k_A(\lambda) = 0$, tj.

$$k_n \lambda^n + k_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + k_0 = 0.$$

Primjer Ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix},$$

onda je karakteristična matrica

$$A - \lambda E = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix},$$

pa je karakteristični polinom

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda - 1,$$

a karakteristična jednadžba je

$$\lambda^2 - 6\lambda - 1 = 0.$$

Propozicija 3.5 Za koeficijente karakterističnog polinoma matrica A vrijedi

$$k_n = (-1)^n, \quad k_{n-1} = (-1)^{n-1} trA, , \quad k_0 = \det A.$$

<u>Dokaz:</u> Tehnički.

Propozicija 3.6 Slične matrice imaju isti karakteristični polinom.

<u>Dokaz:</u>

Ova propozicija osigurava ispravnost sljedeće definicije:

Definicija 3.3 Neka je

$$l : V \to V$$

bilo koji linearni operator. Tada definiramo **karakteristični** (ili **svojstveni**) **polinom** za operator l kao

$$k_l(\lambda) = k_L(\lambda),$$

gdje je L matrica operatora l u bilo kojoj bazi $\mathcal{E}$. Slično, definiramo **trag** $tr\, l$ i **determinantu** $\det l$ kao

$$\begin{aligned} tr\, l &= trL, \\ \det l &= \det L. \end{aligned}$$

gdje je L matrica operatora l u bilo kojoj bazi $\mathcal{E}$.

Uočimo:

- Definicije $tr\, l$ i $\det l$ su dobre, jer su $\det(L)$ i $tr\,(L)$ koeficijenti karakterističnog polinoma, a on ne ovisi o L, tj. o izboru baze (Prop 3.6);

- $tr\, l$ i $\det l$ su važne invarijante linearnog operatora.

Veza matrice i njenog karakterističnog polinoma:

Ako je

$$p(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + ... + \alpha_1 \lambda + \alpha_0, \quad \alpha_i \in F,$$

proizvoljan polinom stupnja n, tada za matricu $A \in \mathcal{M}_n(F)$ možemo promatrati **matricu** oblika

$$p(A) = \alpha_n A^n + ... + \alpha_1 A + \alpha_0 E \qquad \text{(*)}$$

(sve je dobro definirano!). $(*)$ nazivamo **matrični polinom**. Za ovakve polinome vrijede standardna pravila računanja s polinomima. Npr.

$$A^2 - E = (A + E)(A - E)$$

Oprez: Potećkoće nastupaju ako se promatraju polinomi u više varijabla. Npr.

$$A^2 - B^2 \neq (A+B)(A-B).$$

(množenje matrica nije komutativno!).

Jasno je da za svaku matricu $A \in \mathcal{M}_n(F)$ postoji polinom $p(\lambda)$ s koeficijentima iz F, koji matrica A poništava, tj. za koji vrijedi

$$p(A) = O,$$

gdje je O nul matrica. Naime,

- $\mathcal{M}_n(F)$ je linearni prostor nad poljem F i $\dim \mathcal{M}_n(F) = n^2$;
- $n^2 + 1$ vektora

$$E,\ A,\ A^2, ..., A^n, ..., A^{n^2},$$

je linearno zavisno u $\mathcal{M}_n(F)$, pa postoje skalari $\alpha_i \in F$, koji nisu svi 0, takvi da je

$$\alpha_0 E + \alpha_1 A + ... + \alpha_n A^n + ... + \alpha_{n^2} A^{n^2} = O.$$

Ovo upravo znači da matrica A poništava polinom

$$p(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + ... + \alpha_n \lambda^n + ... + \alpha_{n^2} \lambda^{n^2}.$$

s koeficijentima iz polja F.

Preciznije, vrijedi čuveni teorem:

Teorem 3.4 (Hamilton-Cayley) Svaka kvadratna matrica A poništava svoj karakteristični polinom, tj. vrijedi

$$k_A(A) = O.$$

Dokaz:

3.7 Minimalni polinom

Definicija 3.4 Neka je A kvadratna matrica reda n nad poljem F. Neka je

$$m_A(\lambda)$$

polinom najnižeg stupnja u varijabli λ, s koeficijentima iz F kojeg matrica A poništava, tj. polinom za koji je

$$m_A(A) = O.$$

Tada $m_A(\lambda)$ nazivamo **minimalni polinom** za matricu A, a pripadnu jednadžbu

$$m_A(\lambda) = 0,$$

nazivamo **minimalna jednadžba** matrice A.

Uočimo:

- Iz Hamilton-Cayleyevog teorema slijedi
$$st\, m_A(\lambda) \leq st\, k_A(\lambda) = n.$$

  Primjer Ako je $A = \alpha E$, onda je $k_A(\lambda) = (\alpha - \lambda)^n$, a $m_A(\lambda) = \alpha - \lambda$.

Propozicija 3.7 Neka je $p(\lambda)$ bilo koji polinom s koeficijentima iz F kojeg matrica A poništava, tj. $p(A) = O$. Tada je $p(\lambda)$ djeljiv sa svakim minimalnim polinomom od A.

Dokaz:

Posljedica 3.4 Karakteristični polinom od A je djeljiv s minimalnim polinomom od A.

Uočimo:

- Ako je $m_A(\lambda)$ minimalni polinomom od A, onda je i
$$\alpha m_A(\lambda), \quad \alpha \in F,\ \alpha \neq 0,$$
  minimalni polinomom od A.

Vrijedi i više:

Posljedica 3.5 Minimalnim polinomom od A je jedinstven do na skalar različit od nule, tj. ako su $m_1(\lambda)$ i $m_2(\lambda)$ minimalni polinomi od A, onda postoji $\alpha \in F$, $\alpha \neq 0$, takav da je

$$m_2(\lambda) = \alpha m_1(\lambda).$$

Dokaz:

Propozicija 3.8 Slične matrice imaju iste minimalne polinome.

Dokaz: Bez dokaza.

Ova propozicija osigurava uvođenje pojma minimalnog polinoma za operatore.

Definicija 3.4 Neka je

$$l : V \to V$$

bilo koji linearni operator. Tada definiramo **minimalni polinom** za operator l kao

$$m_l(\lambda) = m_L(\lambda),$$

gdje je L matrica operatora l u bilo kojoj bazi $\mathcal{E}$.

Uočimo: Definicija ne ovisi o L, tj. o izboru baze (Prop 3.8).

Efektivno računaje minimalnog polinoma za danu matricu (operator):

U dokazu Teorem 3.4 (H.-C.) smo vidjeli da je adjunkta matrice $C = A - \lambda E$ oblika

$$\tilde{C} = [p_{ki}(\lambda)],$$

tj. njezini su polinomi u λ i $st\ (p_{ki}) \leq n - 1$. Neka je

$$q_A(\lambda),$$

najveći zajednički divizor svih elemenata (polinoma) od $\tilde{C}$. Tada je

$$st\, q_A(\lambda) \leq n - 1,$$

gdje je n red matrice A.

Propozicija 3.9 Polinom $q_A(\lambda)$ dijeli karakteristični polinom $k_A(\lambda)$.

Dokaz: Bez dokaza.

Teorem 3.5 Polinom $h(\lambda) = \frac{k_A(\lambda)}{q_A(\lambda)}$ je minimalni polinom za matricu A.

Dokaz: Bez dokaza.

Primjer Ako je

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{bmatrix},$$

onda je karakteristični polimom

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & -4 \\ 4 & -8-\lambda & -1 \\ -4 & -1 & -8-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 - 9\lambda^2 + 81\lambda + 729 = -(\lambda+9)^2(\lambda-9).$$

Nadalje,

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} (\lambda+9)(\lambda+7) & 4(\lambda+9) & -4(\lambda+9) \\ 4(\lambda+9) & (\lambda+9)(\lambda-8) & -(\lambda+9) \\ -4(\lambda+9) & -(\lambda+9) & (\lambda+9)(\lambda-8) \end{bmatrix} =$$

$$= (\lambda+9)\begin{bmatrix} \lambda+7 & 4 & -4 \\ 4 & \lambda-8 & -1 \\ -4 & -1 & \lambda-8 \end{bmatrix}$$

pa je $q_A(\lambda) = \lambda + 9$, što povlači

$$m_A(\lambda) = \frac{k_A(\lambda)}{q_A(\lambda)} = -(\lambda+9)(\lambda-9) = -\lambda^2 + 81.$$

Za polinom $p(\lambda)$ s koeficijentima iz polja F kažemo da je **reducibilan** s obzirom na to polje, ako ga je moguće prikazati u obliku

$$p(\lambda) = a(\lambda)\, b(\lambda)\,,$$

gdje su $a(\lambda)$ i $b(\lambda)$ polinomi s koeficijentima iz polja F tako da je $1 \leq st\, a(\lambda) < st\, p(\lambda)$ i $1 \leq st\, b(\lambda) < st\, p(\lambda)$. Za polinom koji nije reducibilan kažemo da je **ireducibilan** s obzirom na dano polje.

Primjer Polinom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1,$$

je ireducibilan s obzirim na polje $\mathbb{R}$, a ireducibilan s obzirom na polje $\mathbb{C}$, jer je nad $\mathbb{C}$

$$p(\lambda) = (\lambda + i)(\lambda - i)\,.$$

Polinomi

$$p_1(\lambda) = \lambda^2 - 1, \quad p_2(\lambda) = (\lambda - 1)^5$$

su reducibilni s obzirom na svako polje.

Propozicija 3.10 Svaki ireducibilni faktor karakterističnog polinoma neke matrice je također ireducibilni faktor minimalnog polinoma te matrice.

Dokaz: Bez dokaza.

Posljedica 3.6 Ako u karakterističnom polinomu nema istih (ireducibilnih) faktora, taj polinom se podudara s minimalnim polinomom te matrice.

Dokaz:

3.8 Invarijantni potprostori

Neka je $l : V \to V$ linearni operator i $L < V$ potprostor od V sa svojstvom da je

$$l(a) \in L$$

za svaki $a \in L$, tj. tako da je

$$l(L) \subset L.$$

Tada kažemo da je L **invarijantni potprostor** s obzirom na linearni operator l ili, kraće, da je L $l-$**invarijantni potprostor** od V. Restrikcija

$$\bar{l} = l\,|L$$

je onda linearni operator

$$\bar{l} : L \to L$$

na linearnom prostoru L za koji kažemo da je **induciran** operatorom l.
Trivijalni invarijantni potprostori su

$$L = V \quad \text{i} \quad L = \{\Theta\}\,.$$

Ako operator ima i netrivijalne invarijantne potprostore onda za njega kažemo da je **reducibilan.**

Može se dogoditi da linearni operator dopušta više netrivijalnih invarijantnih potprostora. Interesantan je slučaj kad su L, $M < V$ invarijantni potprostori za linearni operator l takvi da je

$$V = L \oplus M.$$

Propozicija 3.11 Neka je $l : V \to V$ linearni operator i L, $M < V$ invarijantni potprostori za l tako da je $V = L \oplus M$. Linearni operator l je potpuno određen operatorima koje inducira na potprostorima L i M.

<u>Dokaz:</u>

Iz ovoga slijedi, ako je $V = L \oplus M$ i ako su

$$l_1 : L \to L \text{ i } l_2 : M \to M$$

linearni operatori, onda je jednoznačno određen linearni operator $l : V \to V$ sa svojstvom $l_1 = l|L$ i $l_2 = l|M$ i kažemo da je linearni operator l **direktna suma operatora** l_1 i l_2 (s obzirom na rastav $V = L \oplus M$), i pišemo

$$l = l_1 \oplus l_2.$$

Linearni operator l koji ima netrivijalne invarijantne potprostore čija je direktna suma cijeli prostor naziva se **potpuno reducibilan.**

Matrični prikaz reducibilnih i potpuno reducibilnih opreatora

Neka je $L < V$ invarijantni potprostori za linearni operator l, neka je $\dim L = r$, $1 \leq r \leq n-1$ i neka je

$$\{e_1, ..., e_r\}$$

neka baza prostora L. Nadopunimo je do baze prostora V

$$B = \{e_1, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_n\}.$$

Budući je L $l-$invarijantni potprostor, onda je za $i = 1, ..., r$, $l(e_i) \in L$, tj.

$$l(e_i) = \alpha_{1i}e_1 + ... + \alpha_{ri}e_r + 0 \cdot e_{r+1} + ... + 0 \cdot e_n.$$

Dakle, matrični zapis od l u bazi B ima oblik

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1r} & \alpha_{1r+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{r1} & \cdots & \alpha_{rr} & \alpha_{rr+1} & \cdots & \alpha_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{r+1r+1} & \cdots & \alpha_{r+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{nr+1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Uočimo:

- U donjem lijevom kutu ova matrica ima nul matricu tipa $(n-r, r)$, a u gornjem lijevom kutu je matrični zapis induciranog operatora $l\,|L$ u bazi $\{e_1, ..., e_r\}$.

Silčno, neka je linearni operator $l : V \to V$ potpuno reducibilan, a M, $L < V$ njegovi invarijantni potprostori tako da je $V = L \oplus M$ i $\dim L = r$, $1 \leq r \leq n-1$ i neka je

$$B_1 = \{e_1, ..., e_r\}$$

neka baza prostora L, te

$$B_2 = \{e_{r+1}, ..., e_n\}$$

neka baza prostora M. Tada je

$$B = B_1 \cup B_2 = \{e_1, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_n\} .$$

baza prostora V i vrijedi

$$l(e_i) = \alpha_{1i} e_1 + ... + \alpha_{ri} e_r + 0 \cdot e_{r+1} + ... + 0 \cdot e_n.$$

za $i = 1, ..., r$, odnosno

$$l(e_j) = 0 \cdot e_1 + ... + 0 \cdot e_r + \alpha_{r+1j} e_{r+1} + ... + \alpha_{nj} e_n.$$

za $j = r+1, ..., n$. Dakle, matrični zapis od l u bazi B

ima oblik

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{r+1r+1} & \cdots & \alpha_{r+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{nr+1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Uočimo:

- U gornjem lijevom kutu je matrični zapis induciranog operatora $l\,|L$ u bazi B_1, a u donjem desnom kutu je matrični zapis induciranog operatora $l\,|M$ u bazi B_2.

- Ako matrični zapis induciranog operatora $l\,|L$ u bazi B_1 označimo sa A_1, matrični zapis induciranog operatora $l\,|M$ u bazi B_2 označimo sa A_2, onda matricu A možemo zapisati pomoću tzv. **blok matrica**

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

  gdje su sa O označene nul matrice tipa $(n-r, r)$, odnosno tipa $(r, n-r)$, gdje je $\dim L = r$.

- Matricu oblika (2), odnosno (3), nazivamo **kvazidijagonalna matrica (dijagonalna blok matrica).**

Zaključak:

- Linearni operator l je reducibilan ako i samo ako ima matrični zapis oblika (1), odnosno l je potpuno reducibilan ako i samo ako ima matrični zapis oblika (2).

- Dakle, linearni operator l je reducibilan ako i samo ako je svaki njegov matrični zapis sličan matrici oblika (1), odnosno l je potpuno reducibilan ako i samo ako je svaki njegov ima matrični zapis sličan matrici oblika (2).

Generalizacija:

Neka su $L_1, L_2, ..., L_m < V$ netrivijalni invarijantni potprostori operatora $l : V \to V$ takvi da je

$$V = L_1 \oplus L_2 \oplus ... \oplus L_m.$$

Ako su $l_i = l \,|L\,,\ i = 1, ..., m$ inducirani operatori, onda za l kažemo da je nihova direktna suma i pišemo

$$l = l_1 \oplus l_2 \oplus ... \oplus l_m.$$

Ako je A_i matrični zapis operatora l_i u bazi B_i prostora L_i, onda je

$$B = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_m.$$

baza prostora V, i u toj bazi l ima matrični zapis

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_m \end{bmatrix},$$

dakle kvazidijagonalnu matricu.

Važan slučaj je kada su svi invarijantni potprostori od l jednodimenzionalni. Tada su blok matrice A_i reda 1, tj. skalari, pa je kvazidijagonalna matrica A **obična dijagonalna matrica.**

Pitanje:

Postoje li reducibilni i potpuno reducibilni operatori, kao i oni za koje postoji matrični zapis koji je dijagonalna matrica?

3.9 Svojstvene vrijednosti linearnog operatora

Neka je V $n-$dimenzionalni vektorski prostor nad poljem F, $l : V \to V$ linearni operator, a $L < V$ njegov invarijantni potprostor tako da je $\dim L = 1$. Neka je $\{e\}$ neka baza za L.

Budući je L invarijantan, onda postoji skalar $\lambda \in L$ tako da je

$$l\left(e\right) = \lambda e.$$

Sada je za bilo koji vektor $x \in L$, $x = \alpha e$, pa je

$$l\left(x\right) = l\left(\alpha e\right) = \alpha l\left(e\right) = \alpha\left(\lambda e\right) = \lambda\left(\alpha e\right) = \lambda x.$$

Uočimo:

- Skalar λ je karakterističan za potprostor L jer operator l svaki vektor iz tog potprostora "produljuje" ("skraćuje") za λ.

- Problem traženja skalara $\lambda \in F$ i svih vektora za koje je

  $$l\left(x\right) = \lambda x.$$

  nazivamo **problem svojstvenih vrijednosti** za operator $l : V \to V$.

- Skalar $\lambda \in F$ nazivamo **svojstvena vrijednost** operatora l ako postoji vektor $a \in V$, $a \neq \Theta$, takav da je

$$l(a) = \lambda a.$$

  Svaki $a \in V$, $a \neq \Theta$, koji zadovoljava ovaj uvjet naziva se **svojstveni vektor** operatora l pridružen svojstvenoj vrijednosti λ**.**

  Napomena: Za svojstvenu vrijednost još se koriste nazivi **karakteristična**, **vlastita**, **latentna** vrijednost operatora. Slično za svojstvene vektore.

Neka je

$$S(\lambda) = \{a \in V \mid l(a) = \lambda a\}.$$

skup **svih** svojstvenih vektora operatora l pridruženih svojstvenoj vrijednostost λ zajedno s nulvektorom Θ.

Propozicija 3.12 Skup $S(\lambda) \subset V$ je potprostor od V.

Dokaz:

Potprostor $S(\lambda)$ nazivamo **svojstveni potprostor** operatora l pridružen svojstvenoj vrijednosti λ, a njegovu dimenziju **geometrijska kratnost** od λ.

Skup $\sigma(l)$ **svih** svojstvenih vrijednosti operatora l nazivamo **spektar** operatora l.

Teorem 3.6 Skalar $\lambda_0 \in F$ je svojstvena vrijednost operatora l ako i samo ako je λ_0 korijen karakteristične jednadžbe $k_l(\lambda) = 0$ tog operatora.

Dokaz:

Primjer Neka je $l : V \to V$ linearni operator i

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix},$$

njegov matrični zapis u nekoj bazi, tada je karakteristična jednadžba tog operatora

$$k_l(\lambda) = \lambda^2 + 9 = 0.$$

- Ako je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$, tada l nema svojstvenih vrijednosti (kar. jed. nema korijena u $\mathbb{R}$);

- Ako je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$, tada l ima dvije svojstvene vrijednosti $\lambda = 3i$ i $\lambda = -3i$.

Uočimo:

- Po Teoremu 3.6 linearni operator koji djeluje na $n-$dimenzionalnom vektorskom prostoru nad poljem F ima najviše n svojstvenih vrijednosti, a ne mora imati ni jednu. Broj svojstvenih vrijednosti ovisi o broju rješenja u polju F jednadžbe $k_l(\lambda) = 0$.

- Za polje F kažemo da je **algebarski zatvoreno**, ako svaki polinom $p(\lambda)$ s koeficijentima iz F, dopušta faktorizaciju u linearne faktore s koeficijentima iz F, tj. ako $p(\lambda)$ dopušta zapis

  $$p(\lambda) = \alpha_m (\lambda - \lambda_1) \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_m),$$

  gdje je $\alpha_m, \lambda_1, ..., \lambda_m \in F$.

Posljedica 3.7 Linearni operator, koji djeluje na $n-$dimenzionalnom vektorskom prostoru nad algebarski zatvorenim poljem, ima točno n svojstvenih vrijednosti (od kojih neke mogu biti i iste).

Postupak određivanja svojstvenih vektora:

- Neka je $\lambda = \lambda_0$ svojstvena vrijednost linearnog operatora l. Tražimo vektore $a \in V$, $a \neq \Theta$, sa svojstvom

  $$l(a) = \lambda_0 a.$$

- Neka je L matrica operatora l u nekoj bazi B i X matrični zapis traženog vektora u to bazi. Tada je

  $$LX = \lambda_0 X$$

  ili

  $$(L - \lambda_0 E) X = O$$

tj.
$$C(\lambda_0)\, X = O \tag{4}$$

gdje je $C(\lambda_0)$ karakteristična matrica operatora l u koju je uvršteno $\lambda = \lambda_0$, a $X = [\alpha_i]$ nepoznata matrica stupac.

- Matrična jednadžba (4) je ekvivalentna homogenom sustavu od n jednadzbi s n nepoznanica $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Budući da je $\det C(\lambda_0) = k_l(\lambda_0) = 0$, onda taj sustav ima i netrivijalnih rješenja. Svako od tih rješenja odgovara koordinatnoj matrici nekog svojstvenog vektoru (u bazi B) pridruženog svojstvenoj vrijednosti λ_0.

Primjer 1 Neka je linearni operator reprezentiran matricom (nad $\mathbb{R}$)

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix}.$$

Tada je karakteristična matrica

$$C = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ -3 & -6 & -6-\lambda \end{bmatrix},$$

pa je karakteristična jednadžba tog operatora

$$k_l(\lambda) = -\lambda(\lambda+3)(\lambda+2) = 0.$$

Dakle svojstvene vrijednosti operatora su $\lambda = 0$, $\lambda = -3$ i $\lambda = -2$.

- Odredimo svojstvene vektore za $\lambda = -3$. Imamo

$$C(-3) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ -3 & -6 & -3 \end{bmatrix},$$

pa je

$$C(-3)[\alpha_i] = O$$

oblika

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ -3 & -6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ovo je ekvivalentno sustavu

$$\begin{array}{r} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_1 - 6\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \end{array}.$$

Ovaj sustav ima netrivijalna (jednoparametarska) rješenja oblika

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \alpha a_3 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{bmatrix}.$$

Dakle, svojstveni vektori su oblika αa_3, $\alpha \neq 0$, a pripadni svojstveni potprostor je

$$S(-3) = \{\alpha a_3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

- Slično se pokaže da je su za $\lambda = 0$ svojstveni vektori su oblika βa_1, $\beta \neq 0$, gdje je

  $$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

  a pripadni svojstveni potprostor je

  $$S(0) = \{\beta a_1 \mid \beta \in \mathbb{R}\}.$$

  Za $\lambda = -2$ svojstveni vektori su oblika γa_2, $\gamma \neq 0$, gdje je

  $$a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

  a pripadni svojstveni potprostor je

  $$S(-2) = \{\gamma a_2 \mid \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Teorem 3.7 Neka su $\lambda_1, ..., \lambda_s$ međusobno različite svojstvene vrijednosti linearnog operatora $l : V \to V$ i neka su $a_1, ..., a_s \in V$ svojstveni vektori pridruženi tim svojstvenim vrijednostima, redom. Tada je skup $S = \{a_1, ..., a_s\}$ linearno nezavisan u V.

Dokaz:

3.10 Dijagonalizacija. Jordanova forma matrice.

Problem: Neka je $l : V \to V$ linearni operator. Želimo naći bazu prostora V u kojoj će linearni operator imati što jednostavniji matrični zapis.

Za linearni operator l kažemo da **dopišta dijagonalizaciju** ako postoji baza prostora V u kojoj je l reprezentiran dijagonalnom matricom (a u svakoj drugoj bazi matrični prikaz je sličan dijagonalnoj matrici). Za takav operator kažemo da je **polujednostavan** ili **poluprost**.

Zadatak: Naći uvjete uz koje će operator dopustiti djagonalizaciju.

Teorem 3.8 Linearni operator $l : V \to V$ dopušta dijagonalizaciju ako i samo ako u prostoru V postoji baza koja se sastoji od svojstvenih vektora tog operatora.

Dokaz:

Posljedica 3.8 Ako linearni operator dopišta dijagonalizaciju, onda je njegov dijagonalni matrični zapis u bazi koja se sastoji od svojstvenih vektora tog operatora, a elementi na glavnoj dijagonali su svojstvene vrijednosti tog operatora.

Posljedica 3.9 Ako linearni operator $l : V \to V$ ima n različitih svojstvenih vrijednosti, gdje je $n = \dim V$, onda l dopušta dijagonalizaciju.

Dokaz:

Uočimo:

- Posljedica 3.9 daje dovoljan uvjet za prepoznavanje linearnih operatora koji se mogu dijagonalizirati;
- U slučaju kada neka svojstvena vrijednost ima kratnost veću od jedan, ili kada karakteristična jednadžba nema sve korijene iz pripadnog polja, Posljedica 3.9 ne daje odgovor dopušta li operator dijagonalizaciju;

Nužan i dovoljan uvjet za dijagonalizaciju (bez dokaza):

Teorem 3.9 Linearni operator $l : V \to V$ dopušta dijagonalizaciju ako i samo ako se njegov minimalni polinom može prikazati kao produkt međusobno različitih linearnih faktora s koeficijentima iz pripadnog polja.

Uočimo: Gornji teorem je egzistencijalne prirode, tj. daje uvjete pod kojima je dijagonalizacija moguća, ali ne daje način kako to i napraviti.

Slučaj 1: Linearni operator dopušta dijagonalizaciju (uvjeti - Teorem 3.9):

- Neka je linearni operator $l : V \to V$ reprezentiran matricom L u nekoj bazi B;

- Nađemo n linearno nezavisnih svojstvenih vektora $a_1, ..., a_n$ i prikažemo ih u bazi $B,$ tj. u obliku

$$a_k = \begin{bmatrix} t_{1k} \\ \vdots \\ t_{nk} \end{bmatrix}, \; k = 1, ..., n.$$

- Budući da je skup $B' = \{a_1, ..., a_n\}$ također baza za V, onda je matrica transformacije iz baze B u bazu B' dana sa

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix},$$

  onda operator l u bazi B' ima dijagonalnu formu (Teorem 3.8) koju dobivamo kao

$$D = T^{-1}LT.$$

Dakle, vrijedi:

Propozicija 3.13 Ako je matrica L linearnog operatora l slična dijagonalnoj matrici, onda sprezanje obavlja matrica T koordinata svojstvenih vektora operatora l u istoj bazi u kojoj je L matrični zapis tog operatora.

Primjer 2 Ako je linearni operator $l : V \to V$ reprezentiran matricom (nad $\mathbb{R}$) u nekoj bazi B

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix},$$

onda su svojstveni vektori u B dani sa[1]

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

pa sprezanje provodi matrica

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sada je

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix},$$

pa je

$$D = T^{-1}LT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

[1] U Primjeru 1 smo pokazali da su ovo svojstveni vektori koji pripadaju različitim svojstvenim vrijednostima, pa su (po Teorem 3.7) linearno nezavisni, tj. čine bazu od V.

i na dijagonali su upravo svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 0$, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_1 = -3$.

Slučaj 2: Linearni operator ne dopušta dijagonalizaciju (uvjeti - Teorem 3.9):

Primjer 3 Ako je linearni operator $l : V \to V$ reprezentiran matricom (nad $\mathbb{R}$)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

u nekoj bazi B, onda je karakteristična jednadžba tog operatora

$$k_l(\lambda) = -(\lambda - 1)^2 (\lambda - 2) = 0,$$

a minimalni polinom

$$m_l(\lambda) = -(\lambda - 1)^2 (\lambda - 2),$$

pa po Teoremu 3.9 linearni operator l ne dopušta dijagonalizaciju. Uočimo, operator l ima samo dva linearno nezavisna svojstvena vektora

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Matricu koje ne možemo dijagonalizirati, pojednostavljujemo tako što je **kvazidijagonaliziramo**, tj. svodimo na **Jordanovu formu matrice,** odnosno prikažemo je kao dijagonalnu blok matricu i to tako da su blokovi što jednostavnije strukture.

Opis Jordanove forme:

- **Temeljni Jordanov blok** ili **Jordanova klijetka** pridružen skalaru $\lambda \in F$ je kvadratna matrica oblika

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

  kojoj su na dijagonali upravo skalar λ, točno poviše dijagonale su jedinice, a svi ostali elementi su jednaki nuli.

- **Jordanov blok** pridružen skalaru $\lambda \in F$ je dijagonalna blok matrica

$$C = \begin{bmatrix} B_1 & & & O \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & B_s \end{bmatrix},$$

  gdje su B_i, $i = 1, ...s$, temeljni Jordanovi blokovi, općenito različitih redova, pridruženi tom skalaru λ.

- **Jordanova matrica** je dijagonalna blok matrica
$$J = \begin{bmatrix} C_1 & & & O \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & C_k \end{bmatrix},$$
gdje su C_j, $j = 1, ...k$, Jordanovi blokovi, koji pripadaju različitim skalarima λ_j.

Primjer 4

- Temeljni Jordanov blok
$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

- Jordanov blok
$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

• Jordanova matrica

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & & & & & & O \\ 0 & 2 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & & & & \\ & & & 2 & 1 & & & & \\ & & & 0 & 2 & & & & \\ & & & & & -4 & 1 & & \\ & & & & & 0 & -4 & & \\ O & & & & & & & & -4 \end{bmatrix},$$

<u>Uočimo:</u> Dijagonalna matrica je Jordanova matrica kod koje su svi temeljni blokovi reda 1.

Teorem 3.10 Svaka je kvadratna matrica nad algebarski zatvorenim poljem (spec. nad $\mathbb{C}$) slična nekoj Jordanovoj matrici nad tim poljem. Jordanova matrica je jedinstvena do na poredak blokova na dijagonali.

Ili jezikom operatora:

Teorem 3.11 Neka je $l : V \to V$ linearni operator koji djeluje na vektorskom prostoru algebarski zatvorenim poljem. Onda u prostoru V postoji baza u kojoj je operator l reprezentiran Jordanovom matricom.

Teorem 3.12 Neka je A kvadratna matrica nad algebarski zatvorenim poljem. Neka je

$$k_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_k)^{r_k},$$

karakteristični polinom, a

$$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{s_1} \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_k)^{s_k},$$

minimalni polinom matrice A. Onda je A slična Jordanovoj matrici

$$J = \begin{bmatrix} C_1 & & & O \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & C_k \end{bmatrix},$$

gdje:

- Jordanov blok C_i odgovara svojstvenoj vrijednosti λ_i, $i = 1, ..., k$;
- U matrici C_i barem jedan od (temeljnih) blokova je reda s_i, dok red ostalih blokova ne prelazi s_i;
- Broj blokova u martici C_i se podudara s geometrijskom kratnošću svojstvene vrijednosti λ_i;
- Suma redova svih blokova u matrici C_i jednaka je r_i (alg. krat. od λ_i);

Jordanova matrica je jedinstvena do na poredak temeljnih Jordanovih blokova na dijagonali.

Primjer 3 (nastavak) Za matricu

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

karakteristični polinom je oblika

$$k_L(\lambda) = -(\lambda - 1)^2 (\lambda - 2),$$

a minimalni polinom

$$m_L(\lambda) = -(\lambda - 1)^2 (\lambda - 2),$$

pa po Teoremu 3.2 njena Jordanova matrica ima oblik

$$J = \begin{bmatrix} C_1 & O \\ O & C_2 \end{bmatrix}.$$

- Blok C_1, koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 1$, ima barem jedan blok reda $s_1 = 2$. Budući je i $r_1 = 2$, onda je
$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
- Sada je očito blok C_2, koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 2$, reda najviše jedan, tj.
$$C_2 = [2]$$
(ili C_2 ima sve blokove reda najviše $s_2 = 1$. Budući je i $r_1 = 1$, onda je $C_2 = [2]$).

- Jordanova matrica dakle ima oblik

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$