4. SUSTAVI LINEARNIH JEDNADŽBI

- Za određivanje ima li sustavi linearnih jednadžbi rješenje(a) i ako ima kako ga (ih) naći, važnu ulogu imaju linearni operatori, matrice i determinante.

3.1 Notacija i formulacija

Neka je F dano polje. Tada skup od m izraza oblika, gdje je $\alpha_{ik} \in F$, $\beta_i \in F$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$,

$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha_{11}x_1 & + & \alpha_{12}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1m}x_n & = & \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 & + & \alpha_{22}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2m}x_n & = & \beta_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 & + & \alpha_{m2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}x_n & = & \beta_m \end{array}, \qquad (1)$$

nazivamo **sustav od m linearnih jednadžbi sa n nepoznanica** $x_1, ..., x_n$ nad poljem F. Skalare α_{ik} nazivamo **koeficijenti sustava**, a skalare $\beta_1, ...\beta_m$ **slobodni koeficijenti.** Kraći zapis sustava:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}x_k = \beta_i, \quad i = 1, .., m \qquad (2)$$

Napomena: općenito je $m \neq n$.

Rješenje sustava (1) je svaka uređena $n-$torka $(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n) \in F^n$ koja supstitucijom $x_1 = \gamma_1, ..., x_n = \gamma_n$ sve jednadžbe u (1) prevodi u trivijalne identitete u polju F.

Rješiti sustav (1) znači naći **sva** njegova rješenja.

Sustavu (1) pridružujemo matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m2} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$ **matrica sustava**

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ **stupačana matrica nepoznanica**

$$B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$ **stupač. mat. slobodnih koeficijenata**

pa sustav (1) možemo zapisati kao matričnu jednadžbu

$$AX = B, \tag{3}$$

kod koje je X nepoznata matrica (Ovo slijedi iz definicije množenja i jednakosti matrica).

Rješenje matrične jednadžbe (3) bit će stupčana matrica

$$C = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix} \qquad (4)$$

za koju supstiticija $X = C$ u (3) daje matričnu jednakost

$$AC = B.$$

<u>Uočimo:</u> Sustav (1) je ekvivalentan s matričnom jednadžbom (3) ($(1) \Leftrightarrow (3)$) u smislu da svako rješenje $(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n) \in F^n$ od (1) određuje jedno rješenje (stupčanu matricu) C oblika (4), i obratno.

Sustavu (1) pridružujemo i <u>**proširenu matricu sustava**</u>

$$A_p = [A \,|B] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m2} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{bmatrix}.$$

Primjer 1 Sustavu

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(P1)}$$

možemo pridružiti tri matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$ *matrica (koeficijenata) sustava*

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$ *stupačana matrica nepoznanica*

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ *stupačana matrica slobodnih koeficijenata*

Sada je

$$AX = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{bmatrix},$$

pa iz $(P1)$ slijedi jednakost matrica

$$AX = B.$$

Sustavu pridružujemo i *proširenu matricu sustava*

$$A_p = [A\,|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right].$$

Tri osnovna problema:

- **Problem egzistencije rješenja.** Koji su nužni i dovoljni uvjeti da bi sustav (1) imao barem jedno rješenje? Razlikujemo slučajeve:
  - Sustav nema rješenja. Tada kažemo da je **nemoguć** ili **nerješiv** ili **inkompatibilan.**
  - Sustav ima rješenja. Tada kažemo da je **moguć** ili **rješiv** ili **kompatibilan.**

- **Problem strukture rješenja.** Ako je sustav rješiv razlikujemo slučajeve:
  - Sustav ima točno jedno rješenje (treba naći kriterij za jedinstvenost);
  - Sustav ima više (beskonačno) rješenja (treba naći koja su među njima linearno nezavisna (interpretirana kao vektori));

- **Problem efektivnog rješevanja sustava.** Ako je sustav rješiv kako naći algoritam koji nam omogućava nalaženje svih rješenja.

Primjer 2

1. Sustav

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 &= -2 \end{aligned}$$

ima točno jedno rješenje $(x_1, x_2) = (-7, 4)$. Ovaj sustav (zamjenom: $x_1 \mapsto x$ i $x_2 \mapsto y$) možemo geometrijski interpretirati kao dva pravca u ravnini

$$\begin{aligned} p_1 \text{ ... } x + 2y &= 1 \\ p_2 \text{ ... } 2x + 3y &= -2 \end{aligned}$$

koji se sijeku u točki $(x, y) = (-7, 4)$.

2. Sustav

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2 \\ -2x_1 - 4x_2 &= 1 \end{aligned}$$

nema rješenja. Ovaj sustav (zamjenom: $x_1 \mapsto x$ i $x_2 \mapsto y$) možemo geometrijski interpretirati kao dva paralelna pravca u ravnini

$$\begin{aligned} p_1 \text{ ... } x + 2y &= 1 \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ p_2 \text{ ... } -2x - 4y &= 1 \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(ne sijeku se)

3. Sustav

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 5 \\ -2x_1 - 6x_2 &= -10 \end{aligned}$$

imama beskonačno rješenja danih sa $x_2 = t$, $x_1 = -3x_2 + 5 = -3t + 5$, $t \in \mathbb{R}$, tj.

$$(x_1, x_2) = (-3t + 5, t)\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ovaj sustav (zamjenom: $x_1 \mapsto x$ i $x_2 \mapsto y$) možemo geometrijski interpretirati kao dva pravca u ravnini koji se podudaraju

$$p_1 \ldots\; x + 3y = 5 \implies y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$p_2 \ldots\; -2x - 6y = -10 \implies y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

(pravci se sijeku u svim točkama - jednadžbe predstavljaju isti pravac).

3.2 Geometrijska interpretacija

Neka su U i V vektorski prostori nad poljem F dimenzija n i m, redom, te neka su u U i V dane baze $(e) = \{e_1, ..., e_n\}$ i $(f) = \{f_1, ..., f_m\}$ redom.

- Tada je matricom $A = [\alpha_{ij}]$ tipa (m, n) jednoznačno određen linearni operator

  $$l : U \to V,$$

  čiji je matrični zapis u paru baza (e) i (f) upravo matrica A.

- Nadalje, matricom $B = [\beta_i]$ tipa $(m, 1)$ jednoznačno je određen vektor $b \in V$ čiji je matrični zapis u bazi (f) upravo matrica B.

- Sada se problem rješevanja sustava $(1) \Leftrightarrow (3)$ svodi na problem nalaženja svih vektora $x \in U$ za koje je

  $$l(x) = b. \tag{5}$$

  Naime, ako sa X označimo koordinatnu matricu traženog vektora x u bazi (e), onda (5), matrično možemo zapisati kao

  $$AX = B. \tag{3}$$

  Dakle, problem nalaženja svih rješenja sustava (1) se svodi na nalaženje skupa

  $$l^{-1}(b) \subset U,$$

  tj. praslika vektora b.

3.3 Egzistencije rješenja.

Problem (sustav) $(1) \Leftrightarrow (3)$ će imati rješenje ako i samo ako je

$$l^{-1}(b) \neq \emptyset,$$

tj. ako i samo ako je

$$b \in \operatorname{Im} l.$$

(uz oznake iz predhodnog paragrafa).

Kriterij na nivou matrica:

Teorem 4.1 (Kronecker-Cappelli) Sustav linearnih jednadžbi je rješiv ako i samo ako matrica tog sustava i proširena matrica tog sustava imaju isti rang, tj. ako je

$$r\left(A_p\right) = r\left(A\right).$$

Dokaz:

Posljedica 4.1 Ako je rang matrice sustava jednak broju jednadžbi, tj. ako je

$$r\left(A\right) = m,$$

onda je taj sustav sigurno rješiv.

Dokaz:

Geometijska interpretacija Posljedice 4.1 :

$$r(A) = m \Rightarrow r(l) = \dim(\mathrm{Im}\, l) = m = \dim V$$

$$\Rightarrow \quad l \textit{ surjektivan} \quad \Rightarrow \quad l^{-1}(b) \neq \emptyset,$$

(uz oznake od prije).

3.4 Cramerov sustav

Definicija 4.1 Za sustav linearnih jednadžbi $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k = \beta_i, \quad i = 1, ..., m,$ tj. (1), odnosno matričnim zapisom $AX = B$ ((3)) kažemo da je **Cramerov**, ako je ispunjeno:

i) $m = n$;

ii) $r(A) = n$.

Uočimo:

- Matrica Cramerovog sustava A je kvadratna ($m = n$) i regularna ($r(A) = n$), pa joj je $\det A \neq 0$;

- Po Posljedici 4.1, zbog $r(A) = n$ (=broj jednadžbi), Cramerov sustav je uvijek riješiv.

Geometijska interpretacija:

Za pridruženi linearni operator $l : U \to V$ vrijedi:

- $\dim U = \dim V = n$;
- $r(l) = n = \dim V$ što povlači da je l *surjektivan*. Sada, po Teoremu o rangu i defektu, vrijedi

$$d(l) = \dim U - r(l) = n - r(l) = n - n = 0,$$

  pa je l i *injektivan*.

Dakle, l je **izomorfizam** vektorskih prostora U i V. Prema tome, postoji jedinstven vektor $c \in U$ tako da je

$$l(c) = b,$$

ili na nivou matrica, matrična jednadžba $AX = B$ ima **jedinstveno rješenje** $X = C$.

Na taj nači smo dokazali:

Propozicija 4.1 Cramerov sustav uvijek ima jedno i samo jedno rješenje.

Efektivno rješevanje Cramerovog sustava

Uvedimo oznake:

- $$D = \det A;$$

- Neka je D_k determinanta matrice koja se dobije zamjenom $k-$tog stupca matrice A s matricom slobodnih koeficijenata B, tj.

$$D_k = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1\,k-1} & \beta_1 & \alpha_{1\,k+1} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2\,k-1} & \beta_2 & \alpha_{2\,k+1} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{n\,k-1} & \beta_n & \alpha_{n\,k+1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Teorem 4.2 Jedinstveno rješenje Cramerovog sustava je dano sa $C = [\gamma_k]$, gdje je

$$\gamma_k = D_k D^{-1}, \ \ k = 1, ..., n.$$

Dokaz:

3.5 Homogeni sustav

Definicija 4.2 Za sustav linearnih jednadžbi (1) kažemo da je **homogen** ako su svi slobodni koeficijenti jednaki nula, tj. ako ima oblik

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k = 0, \quad i = 1, .., m,$$

odnosno matričnim zapisom $AX = 0$.

Uočimo:

- Homogeni sustav je uvijek rješiv jer ima barem trivijalno rješenje
$$x_1 = ... = x_n = 0, \ \text{tj.} \ X = O$$
- Interesira nas kada će sustav imati i netrivijalna rješenja.

Ako homogeni sustav ima i netrivijalna rješenja, onda će pridruženi linearni operator $l : U \to V$ imati netrivijalnu jezgru $Ker\, l$.

Budući je $Ker\, l < U$ i

$$\dim (Ker\, l) = d\,(l) \quad \text{i} \quad r\,(l) = r(A)$$

onda je, po Teoremu o rangu i defektu

$$d\,(l) = \dim U - r\,(l) = n - r(A).$$

Iz ovoga , očigledno slijedi:

Propozicija 4.2 Homogeni sustav uvijek ima:

i) samo trivijalno rješenje ako i samo ako je $r(A) = n$;

ii) i netrivijalna rješenja ako i samo ako je $r(A) < n$.

Posljedica 4.2 Homogeni sustav kod kojeg je broj jednadžbi manji od broja nepoznanica, ima uvijek i netrivijalna rješenja.

Dokaz:

Posljedica 4.3 (Roucheov) Homogeni sustav kod kojeg je broj jednadžbi podudara s brojem nepoznanica ima uvijek netrivijalna rješenja ako i samo ako je $\det A = 0$.

Dokaz:

Struktura rješenja homogenog sustava:

Neka je

$$AX = 0 \quad \text{i} \quad r(A) < n. \tag{6}$$

Budući je tada jezgra $Ker\, l$ pridruženog linearnog operatora $l : U \to V$ netrivijalni potprostor od U dimenzije

$$d = n - r(A) > 0,$$

u tom potprostoru postoji d linearno nezavisnih vektora npr. $\{c_1, ..., c_d\}$ i svi ostali vektori iz $Ker\, l$ su linearna kombinacija ovih vektora.
Pridružene koordinatne matrice C_i vektora c_i u bazi (e) od U nazivamo **fundamentalnim skupom rješenja** sustava (6).

Uočimo:

- Svaka od matrica C_i, $i = 1, ..., d$ je rješenje sustava (6) i svako drugo rješenje C od (6) se može prikazati u obliku
$$C = \lambda_1 C_1 + ... + \lambda_d C_d, \quad \lambda_i \in F, \tag{7}$$
tj. kao linearna kombinacija fundamentalnih rješenja;

- Ako u (7) pustimo da svi λ_i poprimaju sve vrijednosti u F, onda dobivamo sva moguća rješenja sustava (6). Stoga, (7) nazivano **opće rješenje** sustava (6).

Na taj nači smo dokazali:

Teorem 4.3 Homogeni sustav kod kojeg je $d = n - r(A)$ ima točno d fundamentalnih rješenja. Svako rješenje tog sustava je linearna kombinacija fundamentalnih rješenja.

3.6 Nehomogeni sustav

Definicija 4.3 Za sustav linearnih jednadžbi

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k = \beta_i, \quad i = 1, .., m, \tag{2}$$

kažemo da je **nehomogen** ako je barem jedan slobodnih koeficijenta različit od nule.

Matričnim zapisom $AX = B$, gdje je $B \neq O$.

Sustav $AX = O$ nazivamo **homogen sustav pridružen** sustavu (2).

Pretpostavimo da je sustav (2) rješiv, tj. da vrijedi

$$r(A_p) = r(A) = r.$$

To znači da za pridruženi linearni operator $l : U \to V$ sustavu (2) (ili $l(x) = b$) vrijedi

$$b \in \operatorname{Im} l, \quad \text{tj.} \;\; l^{-1}(b) \neq \emptyset.$$

- Neka je $c_0 \in l^{-1}(b)$ bilo koji vektor, tj. vektor za koji je $l(c_0) = b$. Tada za svaki drugi vektor $c \in l^{-1}(b)$ vrijedi

$$l(c - c_0) = l(c) - l(c_0) = b - b = \Theta. \tag{8}$$

  Dakle, $c - c_0 \in Ker\, l$, tj. $c \in c_0 + Ker\, l$, pa je

$$l^{-1}(b) \subset c_0 + Ker\, l. \tag{9}$$

- Obrnuto, neka je $y \in c_0 + Ker\, l$ bilo koji vektor. Tada postoji vektor $y' \in Ker\, l$ tako da je $y = c_0 + y'$, pa je

  $$l\,(y) = l\,(c_0 + y') = l\,(c_0) + l\,(y') = b + \Theta = b,$$

  tj. $y \in l^{-1}\,(b)$, pa je

  $$c_0 + Ker\, l \subset l^{-1}\,(b)\,. \tag{10}$$

  Iz (9) i (10) imamo

  $$c_0 + Ker\, l = l^{-1}\,(b)\,.$$

Na taj nači smo dokazali:

Propozicija 4.3 Skup $l^{-1}\,(b) \subset U$ svih rješenja sustava $l\,(x) = b$ je linearna mnogostrukost $c_0 + Ker\, l$ u prostoru U.

Matrična interpretacija strukture rješenja nehomogenog sustava:

Neka je C_0 koordinatna matrica vektora $c_0 \in l^{-1}(b)$. tu matricu nazivamo **partikularno rješenje** sustava (2).

Ako je C koordinatna matrica bilo kojeg drugog vektora $c \in l^{-1}(b)$, onda iz (8) slijedi

$$A(C - C_0) = O,$$

pa je $C - C_0$ rješenje homogenog sustava pridruženog sustavu (2).

Na taj endači smo dokazali:

Propozicija 4.4 Razlika bilo koja dva rješenja nehomogenog sustava je rješenje pridruženog homogenog sustava.

Pretpostavimo da je $\{C_1, ..., C_d\}$ fundamentalni skup rješenja pridruženog homogenog sustava, tada postoje skalari $\lambda_1, ..., \lambda_d \in F$, takvi da je

$$C - C_0 = \lambda_1 C_1 + ... + \lambda_d C_d \quad \Rightarrow$$

$$C = C_0 + \lambda_1 C_1 + ... + \lambda_d C_d. \tag{11}$$

Dakle, svako rješenje C nehomogenog sustava (2), za neki izbor skalara $\lambda_i \in F$, može se napisati u obliku (11). Vrijedi i obrnuto, sa (11) je dano neko rješenje nehomogenog sustava (2).

U tom smislu (11) nazivamo **općim rješenjem** nehomogenog sustava (2).

Na taj nači smo dokazali:

Teorem 4.4 Opće rješenje nehomogenog sustava jednako je sumi bilo kojeg partikularnog rješenja tog sustava i općeg rješenja njemu pridruženog homogenog sustava.

3.7 Gaussova metoda eliminacije

- Gaussova metoda eliminacije je algoritam za efektivno rješavanje sustava;
- Prednosti ove metode:
  - daje odgovor je li sustav rješiv ili ne;
  - ako je sustav rješiv, efektivno se mogu naći sva rješenja;
  - laka primjena na računalima.

Definicija 4.4 Za dva sustava linearnih jednadžbi nad istim poljem F, s istim brojem nepoznanica (ali ne nužno s istim brojem jednadžbi) kažemo da su **ekvivalentna** ako je **svako** rješenje prvog sustava ujedno rješenje drugog sustava, i obrnuto.

Definicija 4.5 Reći ćemo da smo nad sustavom linearnih jednadžbi izvršili **elementarnu transformaciju** ako smo izvršili jednu od sljedećih radnji:

i) zamijenili poredak dviju jednadžbi u sustavu;

ii) neku jednadžbu pomnožili skalarom različitim od 0;

iii) jednu jednadžbu pribrojili drugoj.

Uočimo: Elementarne transformacije na sustavu odgovaraju elementarnim transformacijama nad retcima proširene matrice sustava A_p.

Propozicija 4.5 Ako se na sustavu linearnih jednadžbi izvrši konačni broj elementarnih transformacija on prelazi u sebi ekvivalentan sustav.

Dokaz: Bez dokaza.

Na osnovi prethodnog imamo:

Propozicija 4.6 Dva su sustava linearnih jednadžbi ekvivalentna ako i samo ako su proširene matrice tih sustava ekvivalentne i to preko niza elementarnih transformacija nad retcima.

Osnovna ideja Gaussova metoda eliminacije:

- zamjena polaznog sustava s njemu ekvivalentnim iz kojeg se lako vidi je li sustav rješiv ili ne, a ako jest, lako se dobije njegovo rješenje.

Postupak:

Sustavu

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k = \beta_i, \quad i = 1, .., m \tag{2}$$

pridružimo proširenu matricu sustava

$$A_p = [A\,|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m2} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array}\right]$$

Nizom elementarnih transformacija nad retcima matrice $A_p = [A\,|b]$ i zamjenom prvih n stupaca matrice A (zadnji ne diramo), cilj je doći do ekvivalentne matrice oblika

$$A_p \sim \ldots \sim A_p' = \left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{1r+1}' & \cdots & \alpha_{1n}' & \beta_1' \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{2r+1}' & \cdots & \alpha_{2n}' & \beta_2' \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_{rr+1}' & \cdots & \alpha_{rn}' & \beta_r' \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{r+1}' \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_m' \end{array}\right]$$

Matrica $A_p' = [A' \,|B']$ je proširena matrica sustava

$$\begin{array}{lllllll} x_1 + & & & +\alpha_{1r+1}' x_{r+1} + & \cdots & +\alpha_{1n}' x_n & = \beta_1' \\ & x_2 + & & +\alpha_{2r+1}' x_{r+1} + & \cdots & +\alpha_{2n}' x_n & = \beta_2' \\ & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & x_r + & \alpha_{rr+1}' x_{r+1} + & \cdots & +\alpha_{rn}' x_n & = \beta_r' \\ & & & & & 0 & = \beta_{r+1}' \\ & & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & = \beta_m' \end{array}$$

koji je ekvivalentan polaznom do na, moguću, permutaciju nepoznanica. Nadalje, iz načina kao je dobiven A_p', vidimo da je $A \sim A'$, tj. $r(A) = r(A')$. Kako je očito $r(A') = r$, imamo $r(A) = r(A') = r$.

Ako je:

- barem jedan od $\beta_{r+1}', ..., \beta_m'$ različit od 0, tada je $r(A) = r < r(A_p) = r + 1$, pa sustav nije rješiv.

- $\beta'_{r+1} = ... = \beta'_m = 0$, tada je

$$r(A) = r(A') = r\left(A'_p\right) = r(A_p) = r,$$

pa dobiveni sustav ima rješenje i to:

– ako je $r = n$, imamo jedinstveno rješenje dano sa

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta'_1 \\ x_2 &= \beta'_2 \\ &\vdots \\ x_n &= \beta'_n \end{aligned} \quad \text{ili matrično} \quad X = \begin{bmatrix} \beta'_1 \\ \beta'_2 \\ \vdots \\ \beta'_n \end{bmatrix},$$

do na permutaciju nepoznanica.

– ako je $r < n$ i $d = n - r$ imamo $d-$parametarsko rješenje, a nepoznanice kojima pripadaju stupci $r+1, ..., n$ su *slobodni parametri*. To rješenje je dano sa

$$\begin{aligned} & x_1 = \beta'_1 - \alpha'_{1r+1} t_1 - ... - \alpha'_{1n} t_d \\ & x_2 = \beta'_2 - \alpha'_{2r+1} t_1 - ... - \alpha'_{2n} t_d \\ & \vdots \\ & x_r = \beta'_n - \alpha'_{rr+1} t_1 - ... - \alpha'_{rn} t_d \\ & x_{r+1} = t_1 \\ & \vdots \\ & x_n = t_d \end{aligned} \tag{12}$$

do na permutaciju nepoznanica.

Rješenje (12) možemo zapisati i matrično u obliku

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta'_1 \\ \vdots \\ \beta'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -\alpha'_{1r+1} \\ \vdots \\ -\alpha'_{rr+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + ... + t_d \begin{bmatrix} -\alpha'_{1r+1} \\ \vdots \\ -\alpha'_{rr+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= C_0 + t_1 C_1 + ... + t_d C_d \qquad (13)$$

Ovdje je:

– C_0 jedno partikularno rješenje dobivenog sustava (2) za izbor skalara $t_1 = ... = t_d = 0$;

– $C_1, ..., C_d$ su rješenja homogenog sustava pridruženog dobivenom sustavu. Ova rješenja su linearno nezavisna jer je njihova matrica tipa (n, d), $d \leq n$ očito maksimalnog ranga d. Budući da ih ima upravo $d = n - r$ ona predstavljaju fundamentalan skup rješenja homogenog sustava pridruženog dobivenom sustavu. Dakle, (13) je tipa

$$X = C_0 + H,$$

tj. suma jednog partikularnog rješenja C_0 dobivenog sustava i općeg rješenja H homogenog sustava pridruženog dobivenom sustavu, pa je to *opće rješenje* dobivenog sustava, a onda i polaznog (2).

Primjer: Zadani su sustavi:

1.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Gaussova metoda eliminacije:

Odgovarajuća proširena matrica sustava je

$$A_p = [A|\, B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \underset{-1\cdot I\ r.+III\ r.}{\overset{-2\cdot I\ r.+II\ r.}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

$$\overset{II\ r. \leftrightarrows III\ r.}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{-1\cdot II\ r}{\overset{2\cdot II\ r+Ir.}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{-1\cdot III\ r.+I\ r}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] = [A'|\, B'] = A_p'$$

Dakle, ovdje je $m = n = 3$, te $r(A) = r(A_p) = r = 3$, pa imamo jedinstveno rješenje $(x_1, x_2, x_3) = (9, -6, 1)$.

2.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Gaussova metoda eliminacije:

Odgovarajuća proširena matrica sustava je

$$A_p = [A|\,B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{-2\cdot I\ r.+III\ r.}{\overset{-2\cdot I\ r.+II\ r.}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\overset{II\ r.+III\ r.}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right] \overset{-1\cdot II\ r.+I\ r}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right] =$$

$$\overset{II\ st.\leftrightarrows III\ st.}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right] = [A'|\,B'] = A_p'$$

Dakle, ovdje je $m = n = 3$, te $r\,(A) = 2$, $r\,(A_p) = 3$, pa sustav nema rješenja.

3.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= -5 \end{aligned}$$

<u>Gaussova metoda eliminacije</u>:

Odgovarajuća proširena matrica sustava je

$$A_p = [A|\,B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -5 \end{array}\right] \underset{-2\cdot I\ r.+III\ r.}{\overset{-2\cdot I\ r.+II\ r.}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\overset{II\ r.+III\ r.}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{II\ st. \leftrightarrows III\ st.}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{-1\cdot II\ r.+Ir.}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [A'|\,B'] = A_p'$$

Dakle, ovdje je $m = n = 3$, te $r\,(A) = r\,(A_p) = 2$, pa je $d = 3 - 2 = 1$ tj. imamo jednoparametarsko rješenje:

$$\left.\begin{array}{c} x_1 + 2x_2 = -3 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x_3 = 1 \\ x_2 = t \\ x_1 = -3 - 2x_2 = -3 - 2t \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (-3 - 2t,\ t,\ 1)\,,\ t \in \mathbb{R}.$$

Matrično:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad t \in \mathbb{R}.$$

3.7 Metoda redukcije na Cramerov sustav

Pretpostavimo da je sustav

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k = \beta_i, \quad i = 1, .., m, \tag{2}$$

rješiv i neka je $r(A_p) = r(A) = r$.

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je da je prvih r redaka i prvih r stupaca matrice A_p linearno nezavisno (to se uvijek može postići zamjenom jednadžbi i permutacijom varijabla, ne dirajući zadnji stupac).

Ovo upravo znači da je kvadratna submatrica matrice A_p reda r, koja se nalazi gornjem lijevom kutu matrice A_p regularna, tj. da joj je determinanta različita od nule. Dakle,

$$A_p = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{11} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{1r} & \alpha_{1r+1} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \\ \boldsymbol{\alpha}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{rr} & \alpha_{2r+1} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_r \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & & \alpha_{mr} & \alpha_{mr+1} & \cdots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{bmatrix}.$$

Tada prvih r jednadžbi nazivamo **osnovnim jednadžbama sustava** (2), tj. sustav

$$\begin{array}{ccccccccccc} \alpha_{11}x_1 & + & & + & \alpha_{1r}x_r & + & \alpha_{1r+1}x_{r+1} & + & & + & \alpha_{1m}x_n & = & \beta_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{r1}x_1 & + & & + & \alpha_{rr}x_r & + & \alpha_{rr+1}x_{r+1} & + & & + & \alpha_{rm}x_n & = & \beta_r \end{array}, \tag{14}$$

nazivamo **osnovnim sustavom pridruženim sustavu** (2). Nepoznanice $x_1, ..., x_r$ nazivamo **glavnim** nepoznanicama, a ostale **slobodnima**.

Propozicija 4.7 Sustav (2) je ekvivalentan pripadnom osnovnom sustavu (14).

<u>Dokaz:</u>

Dakle, da bi riješili sustav (2) dovoljno je riješiti sustav (14). Napišemo ga u obliku

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\alpha_{11}x_1 & + & & + & \alpha_{1r}x_r & = & \beta_1 & - & \alpha_{1r+1}x_{r+1} & - & & - & \alpha_{1m}x_n \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
\alpha_{r1}x_1 & + & & + & \alpha_{rr}x_r & = & \beta_r & - & \alpha_{rr+1}x_{r+1} & - & & - & \alpha_{rm}x_n
\end{array},$$

i shvatimo kao sustav s (glavnim) nepoznanicama $x_1, ..., x_r$. Kako je, po pretpostavci,

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{r1} & \cdots & \alpha_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

to je Cramerov sustav za svaki izbor skalara $x_{r+1} = \gamma_{r+1}, ..., x_n = \gamma_n$.

Ako je jedinstveno rješenje tog sustava $x_1 = \gamma_1, ..., x_r = \gamma_r$, onda opće rješenje polaznog suatava (2) ovisi o $n - r = d$ slobodnih parametara.

Primjer: Zadan je sustav:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= -2 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= -5. \end{aligned} \tag{15}$$

Odgovarajuća proširena matrica sustava je

$$A_p = [A|\,B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

$$\underset{-2\cdot I\ r.+III\ r.}{\overset{I\ r.+II\ r.}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{2}\cdot II\ r}{\overset{\frac{1}{2}\cdot II\ r.+III\ r.}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dakle $r(A) = r(A_p) = 2$. Iz ovoga vidimo da je jedna jednadžba linearna kombinacija ostale dvije ($IIj. = 3 \cdot Ij. - 2 \cdot IIIj.$). Gornji sustav napišimo (permutirajući jednadžbe i nepoznanice) u obliku

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + 2x_2 &= -2 \\ 2x_1 + x_3 + 4x_2 &= -5 \\ -x_1 + x_3 - 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Odgovarajuća proširena matrica sustava je

$$A_p = [A|\,B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & -5 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

koja u gornjem lijevom kutu ima regularnu kvadratnu matricu reda 2. Osnovni sustav pridružen sustavu (15) je tada

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + 2x_2 &= -2, \\ 2x_1 + x_3 + 4x_2 &= -5, \end{aligned} \qquad (16)$$

a glavne nepoznanice x_1 i x_3, te x_2 slobodni parametar. Sustav (16) zapišimo kao

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= -2 - 2x_2, \\ 2x_1 + x_3 &= -5 - 4x_2. \end{aligned}$$

Ovaj sustav ima rješenja ($D = -1$, $D_1 = 2x_2 + 3$, $D_2 = -1$)

$$\begin{aligned} x_1 &= -2x_2 - 3, \\ x_3 &= 1, \end{aligned}$$

tj. rješenje polaznog sustava (15) je dano sa

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = -2x_2 - 3 \\ x_3 = 1 \\ x_2 = t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x_1 = -3 - 2t \\ x_2 = t \\ x_3 = 1 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (-3 - 2t,\ t,\ 1)\,,\ t \in \mathbb{R}.$$

Matrično:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3.7 Matrične jednadžbe

Linearne matrične jednadžbe su jednadžbe oblika

$$AX = B \text{ ili } \quad YA = B \tag{17}$$

gdje su $A = [\alpha_{ik}]$ i $B = [\beta_{ik}]$ dane kvadratne matrice reda n nad poljem F, a $X = [x_{ik}]$ i $Y = [y_{ik}]$ nepoznate kvadratne matrice istog reda, koje treba odrediti.

Rješenje ovakve matrične jednadžbe je bilo koja matrica $C = [\gamma_{ik}]$ nad poljem F koja matričnu jednadžbu prevodi u matrični identitet. **Riješiti** matričnu jednadžbu znači naći **sva** njena rješenja.

- Ako je A regularna matrica onda matrična jednadžba

$$AX = B \ \text{(}YA = B\text{)}$$

ima jedinstveno rješenje, i rješenje je onda dano sa

$$X = A^{-1}B \ \text{ ili } \ (Y = BA^{-1}).$$

- Ako je A singularna matrica onda se matrična jednadžba

$$AX = B \ \text{(}YA = B\text{)}$$

svodi na rješavanje sustava od n^2 linearnih jednadžbi i n^2 nepoznanica. (ili na rješavanje n sustava od kojih svaki ima n linearnih jednadžbi i n nepoznanica). Rješavanjem sustava zaključujemo je li polazna jednadžba nerješiva ili ima beskonačno rješenja.

Ako je

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{(1)} & \mathbf{b}^{(2)} & \cdots & \mathbf{b}^{(n)} \end{bmatrix} \qquad \text{i}$$

$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} & \mathbf{x}^{(2)} & \cdots & \mathbf{x}^{(n)} \end{bmatrix}$$

gdje su $\mathbf{b}^{(1)}$,...,$\mathbf{b}^{(k)}$, $\mathbf{x}^{(1)}$,..., $\mathbf{x}^{(k)}$ stupci matrice B odnosno X, redom, onda matrična jednadžba

$AX = B$ ima oblik

$$\begin{bmatrix} A\mathbf{x}^{(1)} & A\mathbf{x}^{(2)} & \cdots & A\mathbf{x}^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{(1)} & \mathbf{b}^{(2)} & \cdots & \mathbf{b}^{(n)} \end{bmatrix},$$

odnosno dobivamo n sustava koji imaju matrični zapis

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{b}^{(1)} \\ A\mathbf{x}^{(2)} &= \mathbf{b}^{(2)} \\ &\vdots \\ A\mathbf{x}^{(n)} &= \mathbf{b}^{(n)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Svih n sustava ima istu matricu sustava, a to je upravo matrica A. Sustave rješavamo istovremeno Gaussov metodom eliminacije. Formiramo matricu

$$[A \mid B] = \left[A \;\middle|\; \mathbf{b}^{(1)} \;\; \mathbf{b}^{(2)} \;\; ... \;\; \mathbf{b}^{(n)} \right].$$

Elementarnim transformacijama nad retcima gornje matrice (i eventualnom permutacijom <u>prvih n</u> stupaca) dolazimo do oblika

$$[A \mid B] \sim \; ... \; \sim [A' \mid B'] = \left[A' \;\middle|\; \mathbf{b}'^{(1)} \;\; \mathbf{b}'^{(2)} \;\; ... \;\; \mathbf{b}'^{(n)} \right].$$

Sada, ovisno o obliku matrice A' i vektora $\mathbf{b}^{(1)}$,...,$\mathbf{b}^{(n)}$, za svaki sustav posebno određujemo rješivost, odnosno tražimo rješenje.

<u>Vrijedi:</u> matrična jednadžba $AX = B$ je nerješiva ako i samo ako je barem jedan sustav u (18) nerješiv.

Primjer: Zadana je matrična jednadžba

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Budući je

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

matričnu jednadžbu rješavamo svođenjem na sustav. Pretpostavimo da je

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}.$$

Budući je

$$AX = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_3 & 2x_2 + 3x_4 \\ 4x_1 + 6x_3 & 4x_2 + 6x_4 \end{bmatrix},$$

onda je

$$\begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_3 & 2x_2 + 3x_4 \\ 4x_1 + 6x_3 & 4x_2 + 6x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

Što je ekvivalentno sustavu od 4 jednadžbe s 4 nepoznanice

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 6x_3 &= 2 \\ 2x_2 + 3x_4 &= 2 \\ 4x_2 + 6x_4 &= 4 \end{aligned}$$

ili dvama sustavima od po dvije nepoznanice s istom matricom sustava A :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 6x_3 &= 2 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_4 &= 2 \\ 4x_2 + 6x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Možemo ih rješavati istovremeno:

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 4 \end{array}\right] \overset{-2\cdot I\ r.+II\ r.}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{\frac{1}{2}\cdot I\ r.+II\ r.}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Iz ovoga slijedi

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_3 \\ x_3 = t \\ x_2 = 1 - \frac{3}{2}x_4 \\ x_4 = s \end{array}, \quad t, s \in \mathbb{R}, \right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t \\ x_3 = t \\ x_2 = 1 - \frac{3}{2}s \\ x_4 = s \end{array}, \quad t, s \in \mathbb{R}, \right\}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t & 1 - \frac{3}{2}s \\ t & s \end{bmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$