5. UNITARNI PROSTORI

5.1 Pojam unitarnog prostora i osnovna svojstva

Definicija 5.1 Unitarni prostor je uređeni par (U, s), koji se sastoji od vektorskog prostora U nad poljem $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ (zajedno ih označavamo F) i preslikavanja $s : U \times U \longrightarrow F$ koje ima svojstva:

U1) Hermitska komutativnost

$$s(x, y) = \overline{s(y, x)}, \ \ \forall x, y \in U;$$

U2) Aditivnost u odnosu na prvu vraijablu

$$s(x + y, z) = s(x, z) + s(y, z), \quad \forall x, y, z \in U;$$

U3) Homogenost u odnosu na prvu varijablu

$$s(\lambda x, y) = \lambda s(x, y), \ \forall x, y \in U, \ \forall \lambda \in F;$$

U4) Pozitivna definitnost

$$x \neq \Theta \ \Rightarrow \ s(x, x) > 0, \ \forall x \in U.$$

Preslikavanje s nazivamo **skalarnim produktom** i ovisno o polju F, govorimo o **realnom** ili **kompleksnom unitarnom prostoru** U.

Napomena:

- Skalarni produkt kraće ćemo označavati kao

$$s(x,y)=\langle x \mid y\rangle \quad \text{ili} \quad s(x,y)=(x,y)\,;$$

- Za $F=\mathbb{R}$ svojstvo U1) je prava komutativnost

$$\text{U'1)} \quad \langle x \mid y\rangle = \langle y \mid x\rangle\,;$$

Lako se vidi da skalarni produkt ima sljedeća svojstva:

1. Homogenost u odnosu na drugu varijablu:

$$\langle x \mid \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\,\langle x \mid y\rangle\,,\ \ \forall \lambda\in F,\ \forall x,y\in U,$$

Naime, vrijedi:

$$\langle x \mid \lambda y\rangle = \overline{\langle \lambda y \mid x\rangle} = \overline{\lambda\,\langle y \mid x\rangle} = \overline{\lambda}\overline{\langle y \mid x\rangle} = \overline{\lambda}\,\langle x \mid y\rangle$$

2. Aditivnost u odnosu na drugu varijablu:

$$\langle x \mid y+z\rangle = \langle x \mid y\rangle + \langle x \mid z\rangle\,, \forall x,y,z\in U$$

Naime, vrijedi:

$$\langle x \mid y+z\rangle = \overline{\langle y+z \mid x\rangle} = \overline{\langle y \mid x\rangle + \langle z \mid x\rangle}$$
$$= \overline{\langle y \mid x\rangle} + \overline{\langle z \mid x\rangle} = \langle x \mid y\rangle + \langle x \mid z\rangle\,.$$

3. Iz $1.$i $2.$ slijedi:

$$\langle x \mid \lambda y+\mu z\rangle = \overline{\lambda}\,\langle x \mid y\rangle + \overline{\mu}\,\langle x \mid z\rangle\,,\ \forall x,y,z\in U,\ \forall \lambda,\mu\in F.$$

4.

$$\langle \Theta \mid x \rangle = \langle y \mid \Theta \rangle = 0, \;\; \forall x, y \in U.$$

Naime, vrijedi: $\langle \Theta \mid x \rangle = \langle 0 \cdot z \mid x \rangle = 0 \cdot \langle z \mid x \rangle = 0.$

5.

$$x = \Theta \;\Leftrightarrow\;\; \langle x \mid x \rangle = 0$$

Primjer

1. Neka su

$$x = (x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n \;\; \textbf{i} \;\; y = (y_1, ...y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Definiramo

$$\langle x \mid y \rangle =: \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}.$$

Par $(\mathbb{R}^n, \langle \;\mid\; \rangle)$ je s**tandardni n-dimenzionalni realni unitarni prostor** (provjerite!) ili **euklidski prostor**.

2. Neka su

$$x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n \;\; \textbf{i} \;\; y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Definiramo

$$\langle x \mid y \rangle =: \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i \in \mathbb{C}.$$

Par $(\mathbb{C}^n, \langle \;\mid\; \rangle)$ je **standardni n-dimenzionalni kompleksni unitarni prostor** (provjerite!).

Uz definiciju skalarnog produkta na $\mathbb{C}^n$ kao u prethodnom primjeru ne bi bilo moguće zadovoljiti uvjete pozitivne definitnosti. Npr, za

$$x = (1, i) \in \mathbb{C}^2,$$

imali bismo

$$x \neq (0,0) = \Theta \ \text{ i } \ \langle x \mid x \rangle = 1 + i^2 = 0.$$

Za

$$x = (1, i, i) \in \mathbb{C}^3$$

imali bi smo

$$\langle x \mid x \rangle = 1 + i^2 + i^2 = -1.$$

Definicija standardnog skalarnog produkta na $\mathbb{C}^n$ osigurava

$$\langle x \mid x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x}_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \geq 0,$$

a jednakost se dobiva samo u slučaju $x_i = 0$, $\forall i$, tj. za $x = \Theta$.

Definicija 5.2 Za vektore $x, y \in U$ kažemo da su **ortogonalni** ako je $\langle x \mid y \rangle = 0$. Za skup vektora $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset U$ kažemo da je **ortogonalan** ako je $\langle x_i \mid x_j \rangle = 0, \forall i, j, i \neq j$.

Napomena: Jasno je da je nulvektor $\Theta \in U$ ortogonalan na svaki vektor iz U. Nadalje ćemo razumijevati da ortogonalni skup vektora ne sadrži nulvektor.

Definicija 5.3 Neka je $x \in U$. Nenegativan broj $\sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ nazivamo **normom** ili **duljinom** vektora x i označavamo s $\|x\|$.

Propozicija 5.1 Preslikavanje $\| \ \| : U \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ima svojstva:

N1) $\|x\| \geq 0, \forall x \in U;$

N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta;$

N3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|, \forall x \in U, \forall \lambda \in F.$

Dokaz:

Definicija 5.4 Kažemo da je skup vektora $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset U$ **ortonormiran**, ako vrijedi

$$\langle x_i \mid x_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ za } i = j \\ 0 \text{ za } i \neq j \end{cases}$$

Vektor $x \in U$ sa svojstvom $\|x\| = 1$ naziva se **jedinični** ili **normirani** vektor.

Propozicija 5.2 Ako je skup vektora $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset U$ ortogonalan, onda je taj skup linearno nezavisan u U.

Dokaz:

Napomena: Tvrdnja specijalno vrijedi i za ortonormirani skup vektora iz U.

Specijalno, vektori

$$e_1 = (1, 0, ..., 0)\,, \ldots, e_n = (0, ..., 0, 1)$$

tvore ortonormiranu bazu u $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ (standardne baze).

Teorem 5.1 U svakom n-dimenzionalnom unitarnom prostoru U postoji ortonormirana baza.

Dokaz: Neka je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ proizvoljna baza od U, tj. skup od n linearno nezavisnih vektora.

Postupkom tzv. **Gram-Schmidtove ortogonalizacije** moguće je od njega formirati ortonormirani skup vektora $\{e_1, \ldots, e_n\}$ za koji vrijedi

$$[\{e_1, \ldots, e_n\}] = [\{x_1, \ldots, x_n\}] = U.$$

Skup $\{e_1, \ldots, e_n\}$ će biti tražena baza.

1. Definiramo
$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \text{ (jedinični vektor)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [e_1] = [x_1] \text{ (jer su vektori kolinearni).}$$

2. Pretpostavimo da smo formirali ortonormiran skup od $k < n$ vektora $\{e_1, \ldots, e_k\}$ sa svojstvom $[\{e_1, \ldots, e_k\}] = [\{x_1, \ldots, x_k\}]$.

Definiramo

$$y_{k+1} = x_{k+1} + \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k, \quad \alpha_j \in F.$$

Želimo $[\{e_1, \ldots, e_k, y_{k+1}\}] = [\{x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}\}]$.
Odredimo α_j, $j = 1, \ldots, k$ iz uvjeta

$$y_{k+1} \perp e_j, j = 1, \ldots, k.$$

Imamo

$$0 = \langle y_{k+1} \mid e_j \rangle = \langle x_{k+1} \mid e_j \rangle + \alpha_j \quad \Rightarrow$$

$$\alpha_j = -\langle x_{k+1} \mid e_j \rangle, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Dakle, vektor

$$y_{k+1} = x_{k+1} - \langle x_{k+1} \mid e_1 \rangle e_1 - \cdots - \langle x_{k+1} \mid e_k \rangle e_k$$

ima svojstvo $[e_1, \ldots, e_k, y_{k+1}] = [x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}]$ i $y_{k+1} \perp e_j, = 1, \ldots, k$.

3. Stavljamo

$$e_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|}.$$

4. Korake 3. i 4. ponavljamo dok konačno ne definiramo e_n. $\square$

Ortonormirana baza je svojstvena unitarnom prostoru i u velikoj je upotrebi u teoriji unitarnih prostora. Standardno se označava $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Ona pojednostavnjuje:

$1.$ Prikaz proizvoljnog vektora u bazi:

$$x \in U,\ \ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \overset{/|e_j>}{\Rightarrow} x_j = \left\langle x \mid e_j \right\rangle \ \text{ tj. } x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle\, e_i;$$

$2.$ Prikaz skalarnog produkta:

$$\langle x \mid y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \middle| \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \underset{=\overline{y_i}}{\left\langle e_i \mid \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right\rangle} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i;$$

$3.$ Prikaz norme vektora:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \Rightarrow \|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle} \overset{2)}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x}_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

Definicija 5.4 Regularna kvadratna matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ je **unitarna** ako vrijedi

$$A^{-1} = \overline{A}' = \text{(ozn.)} = A^*,$$

tj.

$$AA^* = A^*A = E.$$

Teorem 5.2 Neka su $(e) = \{e_1, ..., e_n\}$ i $(e') = \{e'_1, ..., e'_n\}$ ortonormirane baze unitarnog prostora U. Tada je matrica prijelaza $T_{ee'}$ unitarna.

Dokaz:

Vrijedi i obrat ovog teorema:

Teorem 5.3 Neka je $(e) = \{e_1, ..., e_n\}$ ortonormirana baza unitarnog prostora U i A unitarna matrica. Tada je i $\{Ae_1, \ldots, , Ae_n\}$ ortonormirana baza od U.[1]

Dokaz: Lako se provjeri da u konačno dimenzionalnom unitarnom prostoru U za svaku matricu A (reda dimenzije prostora) vrijedi[2]

$$\langle Ax \mid y \rangle = \langle x \mid A^* y \rangle, \quad \forall x, y \in U. \tag{1}$$

Ako matricu A poistovjetimo s operatorom $l : U \longrightarrow U$ kojemu je pridružena, tada relacija (1) predstavlja definicijsku relaciju linearnog operatora

---

[1] Napomena 1: Ovdje matricu A poistovjećujemo s linearnim opreatorom $l : U \to U$ čiji je matrični prikaz u bazi (e) upravo (unitarna) matrica $A = [\alpha_{ik}]$. Uz ovu identifikaciju je $Ae_k = l(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} e_i$ i $Ax = l(x) = A\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k (Ae_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \alpha_{ik}\right) e_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i$.

[2] Napomena 2: Ako je $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ i $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ tada je, uz identifikaciju $x = [x_k]$ i $y = [y_k]$, $Ax = [\alpha_{ik}][x_k] = \left[\sum_{k=1}^{n} x_k \alpha_{ik}\right] = [\gamma_i]$, pa je $\langle Ax \mid y \rangle = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \bar{y}_j$. Odavde se lako provjeri da je $\langle x \mid A^* y \rangle = \langle Ax \mid y \rangle$.

$$l^* : U \longrightarrow U$$

kojeg nazivamo **(hermitski) adjungirani operator** operatora l. U našem slučaju iz (1) dobivamo

$$\langle Ae_i \mid Ae_j \rangle = \langle e_i \mid A^* Ae_j \rangle =$$

$$(A \text{ je unitarna}) = \langle e_i \mid e_j \rangle \,. \quad \Box$$

Teorem 5.4 U unitarnom prostoru vrijedi nejednakost **Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog**

$$|\langle x \mid y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \;\; \forall x, y \in U.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su x i y linearno zavisni vektori.

Dokaz:

Teorem 5.5 U svakom unitarnom prostoru U vrijedi

N4) Nejednakost trokuta

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \,, \quad \forall x, y \in U,$$

i

$$|\, \|x\| - \|y\| \,| \leq \|x - y\| \,, \;\; \forall x, y \in U.$$

Dokaz:

Vektorski prostor L na kojem je definirana funkcija

$$\|\ \| : L \longrightarrow [0, \infty)$$

sa svojstvima N1) - N4) naziva se **normirani vektorski prostor**.

Iz provedenih razmatranja slijedi da je svaki unitarni prostor ujedno i normiran uz definiciju

$$\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}, \ \forall x \in U.$$

Obrat, međutim, općenito ne vrijedi, tako da je klasa normiranih vektorskih prostora šira od klase unitarnih vektorskih prostora. Vrijede inkluzije:

unitarni v.p. $\subset$ normirani v.p. $\subset$

metrički prostori $\subset$ topološki prostori.

U normiranim vektorskim prostorima raspolažemo pojmom "duljine" vektora.

Propozicija 5.3 (Pitagorin poučak) Za ortogonalni skup vektora $\{x_1, \ldots, x_k\}$ unitarnog prostora U vrijedi poopćenje Pitagorinog poučka

$$\|x_1 + \cdots + x_k\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_k\|^2 .$$

Dokaz:

Vratimo se sada na nejednakost C-S-B

$$|\langle x \mid y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

tj.

$$\frac{|\langle x \mid y\rangle|}{\|x\| \, \|y\|} \leq 1$$

za sve ne-nul vektore iz U. U realnom unitarnom prostoru to znači:

$$-1 \leq \frac{\langle x \mid y\rangle}{\|x\| \, \|y\|} \leq 1$$

za sve nenul $x, y \in U$, što nas motivira za definiciju kuta između dva vektora.

Definicija 5.5 Neka su $x, y \neq \Theta$ elementi realnog unitarnog prostora U. **Kut** između ovih vektora, u oznaci $\measuredangle(x, y)$, $\measuredangle(x, y) \in [0, \pi]$ definiran je relacijom

$$\cos(\measuredangle(x, y)) = \frac{\langle x \mid y\rangle}{\|x\| \, \|y\|}.$$

Ova definicija je kompatibilna s definicijom ortogonalnosti dva vektora $\left(x \perp y \Rightarrow \measuredangle(x, y) = \frac{\pi}{2}\right)$.

Za proizvoljni vektor $x \neq \Theta$ realnog unitarnog prostora U označimo $\alpha_i = \measuredangle(x, e_i)$, gdje je $(e) = \{e_1, ..., e_n\}$ ortonormirana baza od U. Tada, za $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, imamo

$$\cos(\measuredangle(x, e_i)) = \cos \alpha_i = \frac{\langle x \mid e_i \rangle}{\|x\|} = \frac{x_i}{\|x\|} \Big/^2$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha_i = \frac{x_i^2}{\|x\|^2} \Rightarrow \cos^2 \alpha_1 + \cdots + \cos^2 \alpha_n =$$

$$= \frac{1}{\|x\|^2}\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right) = 1,$$

što je poopćenje poznate relacije iz geometrije na E^3, tj. klasične algebre vektora (u pridruženom) V^3.

Definicija 5.6 Za unitarne prostore U i U' kažemo da su **izomorfni** ako postoji izomorfizam vektorskih prostora $l : U \longrightarrow U'$ (regularni linearni operator) koji čuva skalarni produkt, tj. takav da vrijedi

$$\langle l(x) \mid l(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle, \ \forall x, y \in U. \qquad (2)$$

Linearni operator koji ima svojstvo (2) nazivamo **unitarnim operatorom** ili **izometrijom** jer specijalno za $y = x$ imamo

$$\langle l(x) \mid l(x)\rangle = \langle x \mid x\rangle \Leftrightarrow \|l(x)\|^2 = \|x\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|l(x)\| = \|x\|, \ \forall x \in U.$$

(Unitarni operator čuva normu.)

Teorem 5.6 Svaka dva n-dimenzionalna unitarna prostora nad istim poljem su izomorfna.

Dokaz:

Korolar 5.1 Svaki n-dimenzionalni realni unitarni prostor izomorfan je s $\mathbb{R}^n$, a svaki n-dimenzinoalni kompleksni unitarni prostor s C^n.

5.2 Ortogonalni komplement. Projektor

Definicija 5.7 Neka je $L \neq \emptyset$ podskup unitarnog prostora U. Skup

$$L^{\perp} = \{x \in U : \langle x \mid y\rangle = 0, \forall y \in L\}$$

naziva se **ortogonalni komplement** skupa L.

Lako se pokaže da je $L^{\perp} < U$ (podprostor) bez obzira što se na L ne zahtijeva nikakva struktura.

Propozicija 5.4 Neka je $U^r < U$ podprostor unitarnog prostora U dimenzije r. Tada je

$$U = U^r \oplus (U^r)^{\perp}$$

i

$$\dim (U^r)^{\perp} = n - r.$$

<u>Dokaz:</u>

Na osnovi prethodne propozicije zaključujemo da svaki element $x \in U = U \oplus (U^r)^{\perp}$ ima jedinstveni prikaz oblika

$$x = x_1 + x_2, \;\; x_1 \in U^r, \; x_2 \in (U^r)^{\perp},$$

pa je dobro definiran operator $P : U \to U^r \subset U$ relacijom

$$P(x) = P(x_1 + x_2) =: x_1, \forall\, x_1 + x_2 \in U, x_1 \in U^r, x_2 \in (U^r)^{\perp}.$$

Operator P nazivamo **projektorom** na podprostor U^r.

Teorem 5.7 Projektor P na podprostor U^r unitarnog prostora U je linearno preslikavanje sa svojstvima $P^2 = P$ i

$$\langle P(x) \mid y \rangle = \langle x \mid P(y) \rangle, \; \forall x, y \in U. \tag{3}$$

<u>Dokaz:</u>

Linearni operator na unitarnom prostoru koji ima svojstvo (3) naziva se **hermitski**.

Projektor je, dakle, hermitski operator, tj. linearni operator koji se podudara sa svojim adjungiranim operatorom $(P = P^*)$. Projektor $P : U \to U$, gdje je U realan unitarni prostor, ima i ova dva važna svojstva:

P1)

$$\begin{aligned}\langle Px \mid x\rangle &= \langle x_1 \mid x_1 + x_2\rangle = \langle x_1 \mid x_1\rangle \\ &= \langle Px \mid Px\rangle \geq 0, \forall x \in U;\end{aligned}$$

P2)

$$\cos\measuredangle(x, Px) = \frac{\langle x \mid Px\rangle}{\|x\|\,\|Px\|} \overset{P1)}{=}$$

$$= \frac{\|Px\|^2}{\|x\|\,\|Px\|} = \frac{\|Px\|}{\|x\|} \geq 0, \forall x \in U \setminus \{\Theta\},$$

Propozicija 5.5 Neka su U_1 i U_2 potprostori unitarnog prostora U. Tada vrijedi:

i) $\left(U_1^{\perp}\right)^{\perp} = U_1$;

ii) $(U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$;

ii) $(U_1 \cap U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} + U_2^{\perp}$.

<u>Dokaz:</u>

5.3 Grammova determinanta

Definicija 5.8 Neka su $x_1, \ldots, x_k$ vektori unitarnog prostora U. Tada matricu

$$G\left(x_1, \ldots, x_k\right) = \begin{bmatrix} \langle x_1 \mid x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1 \mid x_k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x_k \mid x_1 \rangle & \cdots & \langle x_k \mid x_k \rangle \end{bmatrix}$$

nazivamo **Grammovom matricom**, a njenu determinantu u oznaci $\Gamma\left(x_1, \ldots, x_k\right)$, **Gramovom determinantom** vektora $x_1, \ldots, x_k$.

Teorem 5.8 Vektori $x_1, \ldots, x_k \in U$ su linearno zavisni ako i samo ako je $\Gamma\left(x_1, \ldots, x_k\right) = 0$.

Dokaz:

Primjetimo da ovaj teorem daje brojčanu reprezentaciju linearne zavisnosti vektora.

Teorem 5.9 Ako su $x_1, \ldots, x_k \in U$, $k \leq n$, linearno nezavisni vektori, onda je $\Gamma\left(x_1, \ldots, x_k\right) > 0$.

Dokaz:

Na osnovi prethodna dva teorema zaključujemo da je $\Gamma\left(x_1, \ldots, x_k\right) \geq 0$ za svaki izbor vektora $x_1, \ldots, x_k \in U$.

Gramova determinanta ima veliku ulogu u računanju volumena konveksnih tijela.

5.4 Unitarni operatori

Definicija 5.9 Neka je U unitarni prostor. Operator $l : U \longrightarrow U$ nazivamo **unitarnim operatorom** ako je

$$\langle l(x) \mid l(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle , \ \forall x, y \in U. \tag{4}$$

Unitarni operator na realnom unitarnom prostoru naziva se **ortogonalni operator**.

Napomena: U gornjoj definiciji smo izostavili uvjet linearnosti jer to slijedi iz svojstva (2). Imamo:

Teorem 5.10 Unitarni operator $l : U \longrightarrow U$ je automorfizam.

Dokaz:

Propozicija 5.5 Skup svih unitarnih (ortogonalnih) operatora na unitarnom prostoru U tvori grupu u odnosu na kompoziciju, koju nazivamo **unitarnom (ortogonalnom) grupom** i označavamo s $\mathcal{U}(U)$ $(\mathcal{O}(U))$.

Dokaz:

Pridružimo unitarnom operatoru l matricu $A(e)$ u nekoj ortonormiranoj bazi $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ od U

$$l(e_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i, \ k = 1, \ldots, n \ \Rightarrow$$

$$A(e) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

onda je ta matrica zapravo matrica prijelaza iz ortonormirane baze $\{e_1, \ldots, e_n\}$ u ortonormiranu bazu $\{l(e_1), \ldots, l(e_n)\}$, pa je, po Teoremu 5.2, matrica $A(e)$ unitarna ($A^{-1} = A^*$).

Obratno, ako je u ortogonalnoj bazi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ od U operatoru l pridružena unitarna matrica, onda je, po Teoremu 5.3, $\{l(e_1), \ldots, l(e_n)\}$ ortonormirana baza od U, što povlači da l čuva skalarni produkt, tj. unitaran je. Dakle, vrijedi

Teorem 5.11 Operator $l : U \longrightarrow U$ je unitaran ako i samo ako u svakoj ortonormiranoj bazi (e) od U ima unitarnu matricu $A(e)$, tj. matricu za koju vrijedi

$$A^{-1}(e) = A^*(e) = \overline{A(e)}^T.$$

Napomena: Skup svih unitarnih matrica reda n tvori grupu $U(n)$ u odnosu na množenje i ta grupa je izomorfna s grupom $\mathcal{U}(U)$ unitarnih operatora na unitarnom prostoru U dimenzije n.

Propozicija 5.5 Ako je $l \in \mathcal{U}(U)$, onda je $|\det l| = 1$ i $|\lambda| = 1$ za svaku svojstvenu vrijednost λ operatora l.

Dokaz:

U slučaju realnog unitarnog prostora U i ortogonalnog operatora $l : U \longrightarrow U$, ovo znači da je $\det A = \pm 1$ i $\lambda = \pm 1$ za bilo koju svojstvenu vrijednost λ operatora l.

Propozicija 5.6 Svojstveni vektori unitarnog operatora koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima međusobno su ortogonalni.

Dokaz:

Napomena: Polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ je algebarski zatvoreno, pa unitaran operator koji djeluje na kompleksnom unitarnom prostoru U uvijek će imati n svojstvenih vrijednosti, gdje je $n = \dim U$.

Vrijedi nadalje:

Teorem 5.12 Neka je U kompleksan unitaran prostor, a $l : U \longrightarrow U$ unitaran operator. Tada l dopušta dijagonalizaciju, točnije, postoji ortonormirana baza od U koja se sastoji od svojstvenih vektora operatora l u kojoj l ima matrični zapis

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

gdje su λ_i, $i = 1, ..., n$ svojstvene vrijednosti od l.

Teorem 5.13 Neka je realan unitaran prostor, a $l : U \longrightarrow U$ ortogonalan operator. Tada postoji ortonormirana baza od U u kojoj l ima matrični zapis

$$A = \begin{bmatrix} I_{\alpha_1} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & I_{\alpha_j} & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & -1 \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

gdje je

$$I_{\alpha_i} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix},\ \alpha_i \in \langle 0, 2\pi\rangle \backslash \{\pi\}, \forall i = 1, \ldots, j.$$

A nazivamo **kanonskim oblikom** matrice ortogonalnog operatora.

Uočimo: U (3) je moguće blokove

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

uključiti u rotacijske blokove za $\alpha = \pi$. Na taj se način u kanonskoj matrici ortogonalnog operatora -1 ne pojavljuje ili se pojavljuje točno jednom.

U prvom slučaju (tada je $\det l = \det A = 1$) djelovanje operatora l možemo shvatiti kao niz istovremenih rotacija u međusobno okomitim 2-dimenzionalnim potprostorima od U, kombinirano s identitetom u ostalim smjerovima. Tada operator l nazivamo **rotacijom**.

U drugom slučaju (tada je $\det l = \det A = -1$) možemo pisati

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\alpha_i} & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & 0 & \\ & & I_{\alpha_j} & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & I_\pi & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & & & & I_\pi & \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

(u drugoj matrici smo zamijenili zadnji (jedini) -1 s 1), što znači da se djelovanje operatora l može shvatiti kao kompozicija rotacije i simetrije (zrcaljenja) u odnosu na podprostor $[e_1, \ldots, e_{n-1}] < U$ koja se u danoj bazi opisuje s

$$[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n]^T \mapsto [x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n]^T .$$

Tada operator l nazivamo **simetrijom (zrcaljenjem)**.