5. UNITARNI PROSTORI

5.1 Pojam unitarnog prostora i osnovna svojstva

Definicija 5.1 Unitarni prostor je uređeni par (U, s), koji se sastoji od vektorskog prostora U nad poljem $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ (zajedno ih označavamo F) i preslikavanja $s : U \times U \longrightarrow F$ koje ima svojstva:

U1) Hermitska komutativnost

$$s(x, y) = \overline{s(y, x)}, \quad \forall x, y \in U;$$

U2) Aditivnost u odnosu na prvu vraijablu

$$s(x + y, z) = s(x, z) + s(y, z), \quad \forall x, y, z \in U;$$

U3) Homogenost u odnosu na prvu varijablu

$$s(\lambda x, y) = \lambda s(x, y), \ \forall x, y \in U, \ \forall \lambda \in F;$$

U4) Pozitivna definitnost

$$x \neq \Theta \ \Rightarrow \ s(x, x) > 0, \ \forall x \in U.$$

Preslikavanje s nazivamo **skalarnim produktom** i ovisno o polju F, govorimo o **realnom** ili **komplek- snom unitarnom prostoru** U.

Napomena:

- Skalarni produkt kraće ćemo označavati kao

$$s(x, y) = \langle x \mid y \rangle \quad \text{ili} \quad s(x, y) = (x, y);$$

- Za $F = \mathbb{R}$ svojstvo U1) je prava komutativnost

$$\text{U'1)} \quad \langle x \mid y \rangle = \langle y \mid x \rangle;$$

Lako se vidi da skalarni produkt ima sljedeća svojstva:

1. Homogenost u odnosu na drugu varijablu:

$$\langle x \mid \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x \mid y \rangle, \quad \forall \lambda \in F, \ \forall x, y \in U,$$

Naime, vrijedi:

$$\langle x \mid \lambda y \rangle = \overline{\langle \lambda y \mid x \rangle} = \overline{\lambda \langle y \mid x \rangle} = \overline{\lambda}\overline{\langle y \mid x \rangle} = \overline{\lambda} \langle x \mid y \rangle$$

2. Aditivnost u odnosu na drugu varijablu:

$$\langle x \mid y + z \rangle = \langle x \mid y \rangle + \langle x \mid z \rangle, \forall x, y, z \in U$$

Naime, vrijedi:

$$\langle x \mid y + z \rangle = \overline{\langle y + z \mid x \rangle} = \overline{\langle y \mid x \rangle + \langle z \mid x \rangle}$$

$$= \overline{\langle y \mid x \rangle} + \overline{\langle z \mid x \rangle} = \langle x \mid y \rangle + \langle x \mid z \rangle.$$

3. Iz $1.$i $2.$ slijedi:

$$\langle x \mid \lambda y + \mu z \rangle = \overline{\lambda} \langle x \mid y \rangle + \overline{\mu} \langle x \mid z \rangle, \ \forall x, y, z \in U, \ \forall \lambda, \mu \in F.$$

4.

$$\langle \Theta \mid x \rangle = \langle y \mid \Theta \rangle = 0, \ \ \forall x, y \in U.$$

Naime, vrijedi: $\langle \Theta \mid x \rangle = \langle 0 \cdot z \mid x \rangle = 0 \cdot \langle z \mid x \rangle = 0.$

5.

$$x = \Theta \ \Leftrightarrow \ \ \langle x \mid x \rangle = 0$$

Primjer

1. Neka su

$$x = (x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n \ \text{ i } \ y = (y_1, ...y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Definiramo

$$\langle x \mid y \rangle =: \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}.$$

Par $(\mathbb{R}^n, \langle \ \mid \ \rangle)$ je **standardni** n**-dimenzionalni realni unitarni prostor** (provjerite!) ili **euklidski prostor**.

2. Neka su

$$x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n \ \text{ i } \ y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Definiramo

$$\langle x \mid y \rangle =: \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i \in \mathbb{C}.$$

Par $(\mathbb{C}^n, \langle \ \mid \ \rangle)$ je **standardni** n**-dimenzionalni kompleksni unitarni prostor** (provjerite!).

Uz definiciju skalarnog produkta na $\mathbb{C}^n$ kao u prethodnom primjeru ne bi bilo moguće zadovoljiti uvjete pozitivne definitnosti. Npr, za

$$x = (1, i) \in \mathbb{C}^2,$$

imali bismo

$$x \neq (0,0) = \Theta \text{ i } \langle x \mid x \rangle = 1 + i^2 = 0.$$

Za

$$x = (1, i, i) \in \mathbb{C}^3$$

imali bi smo

$$\langle x \mid x \rangle = 1 + i^2 + i^2 = -1.$$

Definicija standardnog skalarnog produkta na $\mathbb{C}^n$ osigurava

$$\langle x \mid x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x}_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \geq 0,$$

a jednakost se dobiva samo u slučaju $x_i = 0, \forall i,$ tj. za $x = \Theta$.

Definicija 5.2 Za vektore $x, y \in U$ kažemo da su **ortogonalni** ako je $\langle x \mid y \rangle = 0$. Za skup vektora $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset U$ kažemo da je **ortogonalan** ako je $\langle x_i \mid x_j \rangle = 0, \forall i, j, i \neq j.$

<u>Napomena:</u> Jasno je da je nulvektor $\Theta \in U$ ortogonalan na svaki vektor iz U. Nadalje ćemo razumijevati da ortogonalni skup vektora ne sadrži nulvektor.

Definicija 5.3 Neka je $x \in U$. Nenegativan broj $\sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ nazivamo **normom** ili **duljinom** vektora x i označavamo s $\|x\|$.

Propozicija 5.1 Preslikavanje $\| \ \| : U \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ima svojstva:

N1) $\|x\| \geq 0, \forall x \in U;$

N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta;$

N3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \, , \forall x \in U, \forall \lambda \in F.$

<u>Dokaz:</u>

Definicija 5.4 Kažemo da je skup vektora $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset U$ **ortonormiran**, ako vrijedi

$$\langle x_i \mid x_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{za } i = j \\ 0 & \text{za } i \neq j \end{cases}$$

Vektor $x \in U$ sa svojstvom $\|x\| = 1$ naziva se **jedinični** ili **normirani** vektor.

Propozicija 5.2 Ako je skup vektora $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset U$ ortogonalan, onda je taj skup linearno nezavisan u U.

<u>Dokaz:</u>

<u>Napomena:</u> Tvrdnja specijalno vrijedi i za ortonormirani skup vektora iz U.

Specijalno, vektori

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), \ldots, e_n = (0, ..., 0, 1)$$

tvore ortonormiranu bazu u $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ (standardne baze).

Teorem 5.1 U svakom n-dimenzionalnom unitarnom prostoru U postoji ortonormirana baza.

Dokaz: Neka je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ proizvoljna baza od U, tj. skup od n linearno nezavisnih vektora.

Postupkom tzv. **Gram-Schmidtove ortogonalizacije** moguće je od njega formirati ortonormirani skup vektora $\{e_1, \ldots, e_n\}$ za koji vrijedi

$$[\{e_1, \ldots, e_n\}] = [\{x_1, \ldots, x_n\}] = U.$$

Skup $\{e_1, \ldots, e_n\}$ će biti tražena baza.

1. Definiramo
$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \text{ (jedinični vektor)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [e_1] = [x_1] \text{ (jer su vektori kolinearni).}$$

2. Pretpostavimo da smo formirali ortonormiran skup od $k < n$ vektora $\{e_1, \ldots, e_k\}$ sa svojstvom $[\{e_1, \ldots, e_k\}] = [\{x_1, \ldots, x_k\}]$.

Definiramo

$$y_{k+1} = x_{k+1} + \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k, \quad \alpha_j \in F.$$

Želimo $[\{e_1, \ldots, e_k, y_{k+1}\}] = [\{x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}\}]$.
Odredimo α_j, $j = 1, \ldots, k$ iz uvjeta

$$y_{k+1} \perp e_j, j = 1, \ldots, k.$$

Imamo

$$0 = \langle y_{k+1} \mid e_j \rangle = \langle x_{k+1} \mid e_j \rangle + \alpha_j \quad \Rightarrow$$

$$\alpha_j = -\langle x_{k+1} \mid e_j \rangle, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Dakle, vektor

$$y_{k+1} = x_{k+1} - \langle x_{k+1} \mid e_1 \rangle e_1 - \cdots - \langle x_{k+1} \mid e_k \rangle e_k$$

ima svojstvo $[e_1, \ldots, e_k, y_{k+1}] = [x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}]$ i $y_{k+1} \perp e_j, = 1, \ldots, k$.

3. Stavljamo

$$e_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|}.$$

4. Korake 3. i 4. ponavljamo dok konačno ne definiramo e_n. $\square$

Ortonormirana baza je svojstvena unitarnom prostoru i u velikoj je upotrebi u teoriji unitarnih prostora. Standardno se označava $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Ona pojednostavnjuje:

1. Prikaz proizvoljnog vektora u ortonormiranoj bazi:

$$x \in U,\ \ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \overset{/|e_j>}{\Rightarrow} x_j = \left\langle x \mid e_j \right\rangle \ \text{ tj. } x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle\, e_i;$$

2. Prikaz skalarnog produkta:

$$\langle x \mid y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \middle| \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \underset{=\overline{y_i}}{\left\langle e_i \mid \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right\rangle} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i;$$

3. Prikaz norme vektora:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \Rightarrow \|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle} \overset{2)}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x}_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}.$$

Definicija 5.5 Regularna kvadratna matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ je **unitarna** ako vrijedi

$$A^{-1} = \overline{A}^{T} = \text{(ozn.)} = A^*,$$

tj. $A \in M_n(\mathbb{C})$ je unitarna ako je

$$AA^* = A^*A = E.$$

Teorem 5.2 Neka su $(e) = \{e_1, ..., e_n\}$ i $(e') = \{e'_1, ..., e'_n\}$ ortonormirane baze unitarnog prostora U. Tada je matrica prijelaza $T_{ee'}$ unitarna.

Dokaz:

Napomena: Ako je U realni unitarni prostor, onda je $T_{ee'} \in M_n(\mathbb{R})$ pa je $(T_{ee'})^* = (T_{ee'})^T$, tj. $T_{ee'}$ je ortogonalna matrica.

Teorem 5.3 U unitarnom prostoru vrijedi nejednakost **Cauchy-Schwarz-Bunjakowskog**

$$|\langle x \mid y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\| \;\; \forall x, y \in U.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su x i y linearno zavisni vektori.

Dokaz:

Teorem 5.4 U svakom unitarnom prostoru U vrijedi

N4) Nejednakost trokuta

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in U,$$

i

$$|\, \|x\| - \|y\| \,| \leq \|x - y\|, \;\; \forall x, y \in U.$$

Dokaz:

Vektorski prostor L na kojem je definirana funkcija

$$\| \ \| : L \longrightarrow [0, \infty)$$

sa svojstvima N1) - N4) naziva se **normirani vektorski prostor**.

Iz provedenih razmatranja slijedi da je svaki unitarni prostor ujedno i normiran uz definiciju

$$\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}, \ \forall x \in U.$$

Obrat, međutim, općenito ne vrijedi, tako da je klasa normiranih vektorskih prostora šira od klase unitarnih vektorskih prostora. Vrijede inkluzije:

unitarni v.p. $\subset$ normirani v.p. $\subset$

metrički prostori $\subset$ topološki prostori.

U metričkom prostoru raspolažemo s pojmom "udaljenosti" dva elementa.
Svaki unitarni postor U je **metrički prostor** ako metriku (udaljenost) $d : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ definiramo sa

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y \mid x - y \rangle}, \ \forall x, y \in U.$$

Lako se provjeri da funcija d zadovoljava četiri svojstva da bi (U, d) bio metrički prostor.

Propozicija 5.3 (Pitagorin poučak) Za ortogonalni skup vektora $\{x_1, \ldots, x_k\}$ unitarnog prostora U vrijedi poopćenje pitagorinog poučka

$$\|x_1 + \cdots + x_k\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_k\|^2 .$$

<u>Dokaz:</u>

Vratimo se sada na nejednakost C-S-B

$$|\langle x \mid y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

tj.

$$\frac{|\langle x \mid y\rangle|}{\|x\| \, \|y\|} \leq 1$$

za sve ne-nul vektore iz U. U realnom unitarnom prostoru to znači:

$$-1 \leq \frac{\langle x \mid y\rangle}{\|x\| \, \|y\|} \leq 1$$

za sve nenul $x, y \in U$, što nas motivira za definiciju kuta između dva vektora.

Definicija 5.6 Neka su $x, y \neq \Theta$ elementi realnog unitarnog prostora U. Kut između ovih vektora, u oznaci $\measuredangle(x, y)$, $\measuredangle(x, y) \in [0, \pi]$ definiran je relacijom

$$\cos(\measuredangle(x, y)) = \frac{\langle x \mid y\rangle}{\|x\| \, \|y\|}.$$

Ova definicija je kompatibilna s definicijom ortogonalnosti dva vektora $\left(x \perp y \Rightarrow \measuredangle(x, y) = \frac{\pi}{2}\right)$.

Za proizvoljni vektor $x \neq \Theta$ realnog unitarnog prostora U označimo $\alpha_i = \measuredangle\left(x, e_i\right)$, gdje je $(e) = \{e_1, ..., e_n\}$ ortonormirana baza od U. Tada imamo

$$\cos\left(\measuredangle\left(x, e_i\right)\right) = \cos\alpha_i = \frac{\langle x \mid e_i \rangle}{\|x\|} = \frac{x_i}{\|x\|} \Bigg/^{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha_i = \frac{x_i^2}{\|x\|^2} \Rightarrow \cos^2\alpha_1 + \cdots + \cos^2\alpha_n =$$

$$= \frac{1}{\|x\|^2}\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right) = 1,$$

što je poopćenje poznate relacije iz geometrije na E^3, tj. klasične algebre vektora (u pridruženom) V^3.

5.2 Grammova determinanta

Neka je $S = \{x_1, \ldots, x_k\} \subset U$ podskup unitarnog prostora U. Linearna (ne)zavisnost skupa S povezana je s rješenjima jednadžbe

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k = \Theta \tag{1}$$

po nepoznanicama $\alpha_1, ..., \alpha_k \in F$:

- Ako je S linearno nezavisan onda jednadžba ima jedinstveno (trivijalno) rješenje $\alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$;
- Ako je S linearno zavisan onda jednadžba ima i netrivijalnih rješenja.

Množeći jednadžbu (1) skalarno s vektorima x_i, $i = 1, ..., k$ zdesna, dobivamo homogeni linearni sustav od k jednadžbi i k nepoznanica $\alpha_1, ..., \alpha_k$ s koeficijentima $\langle x_j \mid x_i \rangle \in F$:

$$\begin{array}{ccc} \langle x_1 \mid x_1 \rangle \, \alpha_1 + & \cdots & + \langle x_k \mid x_1 \rangle \, \alpha_k = 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x_1 \mid x_i \rangle \, \alpha_1 + & \cdots & + \langle x_k \mid x_i \rangle \, \alpha_k = 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x_1 \mid x_k \rangle \, \alpha_1 + & \cdots & + \langle x_k \mid x_k \rangle \, \alpha_k = 0 \end{array} . \tag{2}$$

Propozicija 5.4 *Neka je* $S = \{x_1, \ldots, x_k\} \subset U$ *podskup unitarnog prostora* U. *Uređena* $k-$*torka* $(\alpha_1^0, ..., \alpha_k^0) \in F^k$ *zadovoljava jednadžbu (1) ako i samo ako je ona rješenje sustava (2).*

Dokaz:

Definicija 5.7 *Neka je* $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ *podskup unitarnog prostora* U. *Tada matricu*

$$G(S) = G(\{x_1, \ldots, x_k\}) = \begin{bmatrix} \langle x_1 \mid x_1 \rangle & \cdots & \langle x_k \mid x_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x_1 \mid x_k \rangle & \cdots & \langle x_k \mid x_k \rangle \end{bmatrix}$$

nazivamo ***Grammovom matricom****, a njenu determinantu u oznaci* $\Gamma(S)$, ***Gramovom determinantom*** *skupa* S.

Dakle, rješavanje jednadžbe (1) ekvivalentno je rješavanju homogenog sustava (2) matrično zapisanog kao

$$G(S)\Lambda = 0,$$

gdje je $\Lambda = [\alpha_1, ..., \alpha_k]^T$. Iz ovoga i Propozicije 4.2 (Korolara 4.3) direkto slijedi:

Teorem 5.5 *Neka je $S \subset U$ konačni podskup unitarnog prostora U. Taj skup je:*

- *linearno nezavisan ako i samo ako je $\Gamma(S) \neq 0$;*
- *linearno zavisan ako i samo ako je $\Gamma(S) = 0$.*

<u>Dokaz:</u>

Primjetimo da ovaj teorem daje brojčani kriterij za određivanje je li neki skup vektora linearno (ne)zavisan u unitarnom prostoru U.

Može se pokazati da vrijedi:

Teorem 5.6 *Ako je $S = \{x_1, \ldots, x_k\} \subset U$ linearno nezavisni podskup unitarnog prostora U, onda je* $\Gamma(S) > 0$.

- Na osnovi prethodna dva teorema zaključujemo da je $\Gamma(\{x_1, \ldots, x_k\}) \geq 0$ za svaki izbor vektora $x_1, \ldots, x_k \in U$.
- Gramova determinanta ima veliku ulogu u računanju volumena konveksnih tijela.

5.3 Ortogonalni komplement. Projektor

Definicija 5.8 *Neka S i T neprazni podkupovi unitarnog prostora U. Kažemo da su S i T* ***ortogonalni*** *i pišemo $S \perp T$, ako je $\langle x \mid y \rangle = 0$ za svaki $x \in S$ i $y \in T$.*

Napomena: Skup $\{\Theta\}$ je ortogonalan na svaki podskup od U. Posebno, $\{\Theta\} \perp U$.

Propozicija 5.5 *Ako su S i T neprazni podkupovi unitarnog prostora U koji su ortogonalni, onda je njihov presjek prazan ili sadrži samo nul-vektor Θ.*

Dokaz:

Korolar 5.1 *Ako su potprostori L i M unitarnog prostora U ortogonalni, onda je njihova suma direktna.*

Dokaz:

Definicija 5.9 *Neka je $S \neq \emptyset$ podskup unitarnog prostora U. Skup*

$$S^{\perp} = \{x \in U : \langle x \mid y \rangle = 0, \forall y \in S\}$$

naziva se ***ortogonalni komplement*** *skupa S.*

Napomena:

- $S^{\perp} = \{x \in U : \{x\} \perp S\}$;

- Lako se pokaže da je $S^{\perp} < U$ (podprostor) bez obzira što se na S ne zahtijeva nikakva struktura.

Propozicija 5.6 *Neka je $L < U$ potprostor unitarnog prostora U dimenzije r. Tada je*

$$U = L \oplus L^{\perp}$$

i

$$\dim L^{\perp} = n - r.$$

<u>Dokaz:</u>

Na osnovi prethodne propozicije zaključujemo: Ako je L potprostori unitarnog prostora U, tada svaki $x \in U = L \oplus L^{\perp}$ ima jedinstveni prikaz oblika

$$x = x_1 + x_2, \ \ x_1 \in L, \ x_2 \in L^{\perp},$$

pa je dobro definiran operator $p : U \to U$ relacijom

$$p\,(x) = p\,(x_1 + x_2) : = x_1.$$

Operator p nazivamo **ortogonalnim projektorom** prostora U na podprostor L. Očito je $Im\,(p) = L$.

Teorem 5.7 *Ortogonalni projektor $p : U \to U$ unitarnog prostora U na podprostor L je linearno preslikavanje sa svojstvima:*

i) $p\,|_L = id_L$;

ii) **(idempotentnost)** $p^2 = p$;

iii) (**hermitičnost)**

$$\langle p(x) \mid y \rangle = \langle x \mid p(y) \rangle, \ \forall x, y \in U. \qquad (3)$$

Dokaz:

Linearni operator $p : U \to U$ na unitarnom prostoru U koji ima svojstvo (3) naziva se **hermitski**.

Ortogonalni projektor $p : U \to U$ unitarnog prostora U na podprostor L, gdje je U realan unitarni prostor, ima i ova dva važna svojstva:

P1)

$$\langle p(x) \mid x \rangle = \langle x_1 \mid x_1 + x_2 \rangle = \langle x_1 \mid x_1 \rangle$$

$$= \langle p(x) \mid p(x) \rangle = \|px\|^2 \geq 0, \forall x \in U;$$

P2)

$$\cos \measuredangle (x, p(x)) = \frac{\langle x \mid p(x) \rangle}{\|x\| \, \|px\|} \overset{P1)}{\underset{3)}{=}}$$

$$= \frac{\|p(x)\|^2}{\|x\| \, \|p(x)\|} = \frac{\|p(x)\|}{\|x\|} \geq 0, \forall x \in U \setminus \{\Theta\},$$

Propozicija 5.7 Neka su L i M potprostori unitarnog prostora U. Tada vrijedi:

i) $\left(L^{\perp}\right)^{\perp} = L$;

ii) $(L+M)^{\perp} = L^{\perp} \cap M^{\perp}$;

iii) $(L \cap M)^{\perp} = L^{\perp} + M^{\perp}$.

5.4 Unitarni operatori

Definicija 5.10 *Neka je U i V unitarni prostori nad istim poljem F. Operator $u : U \longrightarrow V$ nazivamo* ***unitarnim operatorom*** *ako je linearan operator i ako čuva salarni produkt, tj. ako vrijedi*

$$\langle u(x) \mid u(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle , \; \forall x, y \in U. \tag{4}$$

Specijalno, ako je $F = \mathbb{R}$, u nazivamo još i ***ortogonalni operator****.*

Napomena: U gornjoj definiciji možemo izostaviti uvjet linearnosti jer to slijedi iz svojstva (4). Naime, imamo:

Teorem 5.8 *Neka je U i V unitarni prostori nad istim poljem F i neka operator $u : U \longrightarrow V$ ima svojstvo (4). Tada je l linearan (unitaran) operator.*

Može se pokazati:

- Unitarni operator **čuva normu** (i **udaljenost)** vektora (izometrički operator!).
- Ortogonalni operator **čuva kut** među vektorima.
- Unitarni operator prevodi ortonormiranu bazu u ortonormirani skup vektora.
- Unitarni operator je uvijek **injektivan** ($J(u) = \{\Theta\}$).
- Kompozicija unitarnih operatora je unitarni operator.

Definicija 5.11 *Za unitarne prostore U i V nad istim poljem F kažemo da su* ***unitarno izomorfni*** *ako postoji bar jedan unitarni operator $u : U \longrightarrow V$ koji je bijekcija. Tada pišemo $U \overset{u}{\simeq} V$, a u nazivamo* ***izomorfizmom unitarnih prostora****.*

Teorem 5.9 *Unitarni prostori U i V nad istim poljem su unitarno izomorfni ako i samo ako vrijedi $dimU = dimV$.*

Dokaz:

Napomena:

- Dakle je svaki $n-$dimenzionalni unitarni prostor je unitarno izomorfan s $\mathbb{R}^n$ ili $\mathbb{C}^n$.
- Unitarni operator $u : U \longrightarrow U$ je automorfizam.

Karakterizacije unitarnog operatora

Navest ćemo (bez dokaza) nekoliko nužnih i dovoljnih uvjeta za prepoznavanje unitarnih operatora - alternativne definicije unitarnog operatora.

Teorem 5.10 *Linearni operator $u : U \longrightarrow V$ je unitaran ako i samo ako čuva normu.*

Teorem 5.11 *Linearni operator $u : U \longrightarrow V$ je unitaran ako i samo ako svaki jedinični vektor iz U preslikava u jedinični vektor iz V.*

Teorem 5.12 *Linearni operator $u : U \longrightarrow V$ je unitaran ako i samo ako bar jednu ortonormiranu bazu prostora U preslikava u ortonormirani skup vektora iz prostora V.*

5.5 Unitarni operatori $u : U \longrightarrow U$

Već smo vidjeli da su unitarni operatori s danog prostora u samog sebe su uvijek automorfizmi odnosno regularni operatori.

Teorem 5.13 *Skup $\mathcal{U}(U)$ $(\mathcal{O}(U))$ svih unitarnih (ortogonalnih) operatora na unitarnom prostoru U tvori grupu u odnosu na kompoziciju.*

Dokaz:

Grupu $\mathcal{U}(U)$ $(\mathcal{O}(U))$ iz predhodnog teorema nazivamo **grupa unitarnih (ortogonalnih) operatora.**

Prisjetimo se: Kompleksna kvadratna matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$ je **unitarna** ako je

$$AA^* = A^*A = E, \tag{5}$$

gdje $A^* = \overline{A}^T$ označava hermitski konjugiranu (adjungiranu) matricu od A (tj. ako je $A^{-1} = A^*$).

Uočimo: Iz Binet-Cauchyjeva teorema slijedi

$$\det(AA^*) = \det A \cdot \det A^* = \det A \cdot \overline{\det A} = |\det A|^2,$$

a iz (5) dobivamo

$$\det(AA^*) = \det E = 1.$$

Dakle, ako je A unitarna onda je $|\det A| = 1.$

Propozicija 5.8 *Neka je* $A = [\alpha_{ik}]$ *unitarna matrica reda* n *. Onda za sve* $i, k = 1, ..., n$ *vrijedi:*

i) $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\overline{\alpha}_{kj} = \delta_{ik};$

ii) $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}\overline{\alpha}_{jk} = \delta_{ik}.$

Obratno, ako je za matricu A *ispunjen bilo koji od uvjeta i) ili ii), ta je matrica unitarna.*

<u>Dokaz:</u> Analogan dokazu Propozicije 2.4.

Uvjetima i) i ii) iskazana je tzv. **hermitska ortonormiranost** redaka, odnosno stupaca unitarne matrice. Svaki od tih uvjeta karakterizira unitarnu matricu.

Teorem 5.14 *Skup* $U(n)$ *svih unitarnih matrica iz* $M_n(\mathbb{C})$ *je grupa u odnosu na množenje matrica.*

<u>Dokaz:</u>

Grupu $U(n)$ nazivamo **unitarna grupa** (matr. reda n).

<u>Uočimo:</u> Ako je matrica $A \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$ realna, definicijska relacija (5) postaje

$$AA^T = A^T A = E,$$

a matricu s tim svojstvom nazivali smo **ortogonalna matrica**.

Analogne tvrdnje o ortonormiranosti redaka i stupaca ortogonalne matrice te tvrdnju da skup $O(n)$ svih ortogonalnih matrica tvori grupu smo već dokazali. Grupu $O(n)$ smo nazvali **ortogonalna grupa.**

Neka je $A(e)$ matrični zapis unitarnog operatorg $u : U \longrightarrow U$ u nekoj ortonormiranoj bazi $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ od U :

$$u(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} e_i, \ k = 1, \ldots, n \ \Rightarrow$$

$$A(e) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix},$$

onda je ta matrica zapravo matrica prijelaza iz ortonormirane baze $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ u ortonormiranu bazu $(e') = \{u(e_1), \ldots, u(e_n)\}$ od U.

Naime, budući da je u unitaran ($\langle u(e_i) \mid u(e_k) \rangle = \langle e_i \mid e_k \rangle = \delta_{ik}$), onda je $\{u(e_1), \ldots, u(e_n)\}$ je ortonormiran skup, a po Propoziciji 5.2 je onda i linearno nezavisan, dakle baza od U.

Po Teoremu 5.2, je onda matrica $A(e) = T_{ee'}$ unitarna (ortogonalna), tj. $A(e)^{-1} = A(e)^*$.

Obratno:

Propozicija 5.9 *Ako je matrični zapis linearnog operatora $u : U \longrightarrow U$ u nekoj ortonormiranoj bazi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ od U unitarna matrica, onda je u unitaran operator.*

Dokaz:

Uočimo: Ako je linearni operator

$$u : U \longrightarrow U$$

reprezentiran u nekoj ortonormiranoj bazi (e) unitarnom matricom $A = A(e)$, onda je on u svakoj ortonormiranoj bazi (e') predočen takvom matricom jer je veza matričnih zapisa u raznim bazama dana sa

$$B = T^{-1}AT,$$

gdje je $T = T_{ee'}$ matrica prijelaza iz jedne ortonormirane baze u drugu. Dakle, $B = B(e')$ unitarna matrica jer je produkt unitarnih matrica (budući je $U(n)$ grupa).

Dakle, vrijedi:

Teorem 5.15 *Operator $u : U \longrightarrow U$ je unitaran ako i samo ako je njegov matrični zapis $A(e)$ u svakoj ortonormiranoj bazi (e) od U unitarna matrica.*

Iz gornjeg teorema slijedi:

Teorem 5.16 *Neka je U kompleksan unitaran prostor dimenzije n. Onda je grupa unitarnih operatora $\mathcal{U}(U)$ izomorfna s unitarnom grupom $U(n)$.*

<u>Dokaz:</u>

Analogno, grupa $\mathcal{O}(U)$ je izomorfna s $O(n)$.

Primjeri

- **Rotacija** $r : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ za kut φ dana sa

$$r(x, y) = (x \cos \varphi - y \sin \varphi,\ x \sin \varphi + y \cos \varphi)$$

je unitaran (ortogonalan) operator čiji je matrični zapis u standardnoj ortonormiranoj bazi od $\mathbb{R}^2$ dan sa

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

- **Zrcaljenja** na koordinatnim osima $z_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ i $z_y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ te zrcaljenje $z_s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ na pravcu $y = x$ dana sa

$$z_x(x, y) = (x, -y), \quad z_y(x, y) = (-x, y) \quad \text{i} \quad z_s(x, y) = (y, x)$$

  su unitarani (ortogonalani) operatori čiji su matrični zapis u standardnoj ortonormiranoj bazi od $\mathbb{R}^2$ dani sa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{, redom.}$$

- **Centralna simetrija** $c : U \longrightarrow U$ dana sa

$$c(x) = -x$$

  je unitaran operator čiji je matrični zapis u proizvoljnoj bazi jednak $-E$.

  Posebno, za $U = \mathbb{R}^2$ imamo

$$c : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad c(x, y) = (-x, -y),$$

  a matrični zapis u standardnoj ortonormiranoj bazi od $\mathbb{R}^2$ je dan sa

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -E,$$

  što možemo shvatiti kao rotaciju $r : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ za kut $\varphi = \pi$.

Dijagonalizabilnost unitarnog operatora

Propozicija 5.10 *Ako je* $u : U \longrightarrow U$ *unitaran*, *onda je* $|\lambda| = 1$ *za svaku svojstvenu vrijednost* λ *operatora* u.

Dokaz:

Napomena: U slučaju realnog unitarnog prostora U i ortogonalnog operatora $u : U \longrightarrow U$, ovo znači da su $\lambda = \pm 1$ sve svojstvene vrijednosti od u.

Propozicija 5.11 *Svojstveni vektori unitarnog operatora* $u : U \longrightarrow U$ *koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima su međusobno ortogonalni.*

Dokaz:

Uočimo: Kako je $\mathbb{C}$ algebarski zatvoreno polje, operator u koji djeluje na kompleksnom unitarnom prostoru U dimenzije n uvijek će imati n svojstvenih vrijednosti, ne nužno različitih.

Teorem 5.17 *Neka je U kompleksan unitaran prostor dimenzije n i $u : U \longrightarrow U$ unitaran operator. Tada u dopušta dijagonalizaciju. Preciznije, postoji ortonormirana baza (e) od U, sastavljena od svojstvenih vektora operatora u, s obzirom na koju matrični zapis $A(e)$ od u ima oblik*

$$A(e) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

gdje su λ_i, $i = 1, ..., n$ svojstvene vrijednosti od u i za njih vrijedi $|\lambda_i| = 1$, za sve $i = 1, ..., n$.

<u>Dokaz:</u>

<u>Uočimo:</u>

- Sve nultočke λ_i, $i = 1, ..., n$, karakterističnog polinoma $k_u(\lambda)$ (svojstvene vrijednosti) unitaranog operatora $u : U \longrightarrow U$ na kompleksnom unitarnom prostoru dimenzije n su oblika

$$\lambda_i = e^{i\varphi_i} = \cos\varphi_i + i\sin\varphi_i, \quad \varphi_i \in [0, 2\pi).$$

Teorem 5.18 *Za svaki ortogonalni operator* $u : U \longrightarrow U$ *na* n*-dimenzionalnom realnom unitarnom prostoru* U *postoji ortonormirana baza* $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *od* U *s obzirom na koju je matrični zapis* $A(e)$ *od* u *dijagonalna blok matrica oblika*

$$A(e) = \begin{bmatrix} R_{\varphi_1} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & & \\ & & R_{\varphi_s} & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & -1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

gdje je

$$R_{\varphi_i} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{bmatrix}, \ \varphi_i \in \langle 0, 2\pi\rangle \backslash \{\pi\}, \forall i = 1, \ldots, s.$$

Matricu $A(e)$ oblika (3) obično nazivamo **normalna forma** matrične reprezentacije unitarnog (ortogonalnog) operatora n-dimenzionalnom realnom unitarnom prostoru U.

Uočimo:

- U (6) je moguće blokove

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

uključiti u rotacijske blokove za $\alpha = \pi$. Na taj se način u kanonskoj matrici ortogonalnog operatora -1 ne pojavljuje ili se pojavljuje točno jednom.

- U prvom slučaju je $\det A(e) = 1$ a djelovanje operatora u možemo shvatiti kao niz istovremenih rotacija u međusobno okomitim 2-dimenzionalnim potprostorima od U, kombinirano s identitetom u ostalim smjerovima. Tada operator u nazivamo **rotacijom**.

- U drugom slučaju je $\det A(e) = -1$, a $A(e)$ možemo zapisati pisati kao

$$A(e) = A_1 A_2$$

gdje je A_2 dobivena iz $A(e)$ zamjenom (jedinog) -1 u $A(e)$ s 1, a A_1 je matrica

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

odnosno

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\varphi_i} & & & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & I_{\varphi_s} & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & I_\pi & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & \\ & 0 & & & & & & & I_\pi & & \\ & & & & & & & & & 1 & \end{bmatrix}.$$

Ovo znači da se djelovanje operatora u može shvatiti kao kompoziciju rotacije i jedne simetrije (zrcaljenja) u odnosu na podprostor $[e_1, \ldots, e_{n-1}] < U$ koja se u danoj bazi opisuje s

$$[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n]^T \mapsto [x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n]^T .$$

Tada operator u nazivamo **simetrijom (zrcaljenjem)**.

- U matričnom zapisu od u oblika (6) broj 1, odnosno -1, se pojavljuju u A točno toliko puta, kolika je njihova algebarska kratnost kao svojstvenih vrijednosti od u, dok su $\varphi_1 \ , ..., \varphi_s$ takvi da su $\cos\varphi_i \pm i \sin\varphi_i$, $i = 1, ..., s$ nultočke karakterističnog polinoma od u u $\mathbb{C}$, različite od ± 1, i svaki se blok R_{φ_i} u A ponavlja toliko puta, kolika je kratnost korijena $\cos\varphi_i + i \sin\varphi_i$.

Primjer U realnom unitarnom prostoru U, $\dim U = 3$, za svaki ortogonalni operator $u : U \longrightarrow U$ moguće naći ortonormiranu bazu $(e) = \{e_1, e_2, e_3\}$ u kojoj taj operator ima jedan od sljedećih zapisa:

- $k_u(\lambda) = (\lambda - 1)^3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  Geometrijski: u je jedinični operator (identiteta). U standardnom trodimenzionalnom realnom unitarnom prostoru $\mathbb{R}^3$ i standardoj bazi to je opearator $e : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dan sa

$$e(x, y, z) = (x, y, z)$$

- $k_u(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

  Geometrijski: u je zrcaljenje na ravnini $[\{e_1, e_2\}]$. Za $U = \mathbb{R}^3$ i standardoj bazi to je opearator $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dan sa

$$u(x, y, z) = (x, y, -z)$$

- $k_u(\lambda) = (\lambda+1)^2 (\lambda-1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Geometrijski: u je zrcaljenje na pravcu $[\{e_1\}]$.
Za $U = \mathbb{R}^3$ i standardoj bazi to je opearator $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dan sa

$$u(x, y, z) = (x, -y, -z).$$

- $k_u(\lambda) = (\lambda-1)^3$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Geometrijski: u je centralna simetrija.
Za $U = \mathbb{R}^3$ i standardoj bazi to je opearator $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dan sa

$$u(x, y, z) = (-x, -y, -z).$$

- $k_u(\lambda) = (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - 2\cos\varphi\lambda + 1\right)$

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  Geometrijski: u je rotacija oko pravca $[\{e_3\}]$ za kut φ.
  Za $U = \mathbb{R}^3$ i standardoj bazi to je opearator $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dan sa

$$u(x, y, z) = (x\cos\varphi - y\sin\varphi,\ x\sin\varphi + y\cos\varphi, z).$$

- $k_u(\lambda) = (\lambda + 1)\left(\lambda^2 - 2\cos\varphi\lambda + 1\right)$

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

  Geometrijski: u je kompozicija rotacije oko pravca $[\{e_3\}]$ za kut φ i zrcaljenje na ravnini $[\{e_1, e_2\}]$.
  Za $U = \mathbb{R}^3$ i standardoj bazi to je opearator $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dan sa

$$u(x, y, z) = (x\cos\varphi - y\sin\varphi,\ x\sin\varphi + y\cos\varphi, -z).$$

Prva četiri slučaja mogu se shvatiti kao specijalni slučajevi posljednja dva, za $\varphi = 0$ i $\varphi = \pi$.

Drugi primjer je realni unitarni prostor $U = V^3$ (klase orjentiranih dužina $\overrightarrow{a}$). Naime, to je vektorski prostor dimenzije $\dim V^3 = 3$ nad $\mathbb{R}$ uz operacije zbrajanja vektora i množenje vektora sa skalarom, a ima i strukturu realnog unitarnog prostora ako definiramo skalarni produkt kao

$$\left\langle \overrightarrow{a} \mid \overrightarrow{b} \right\rangle = |\overrightarrow{a}| \left|\overrightarrow{b}\right| \cos \measuredangle \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right).$$