3. DERIVACIJE I PRIMJENE

1. Derivacija

- diferencijalni ili infinitezimalni račun - jedan od najvažnijih djelova matematičke analize;

- velika primjena u tehnici;

- derivacija - mjera promjene;

- pojam derivacije - 17 st. (I. Newton - problem određivanja trenutne brzine i G.W. Leibnitz - problem određivanja tangente u bilo kojoj točki krivulje)

Definicija 1.1 Kažemo da je funkcija $: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna u točki $x_0 \in A$ ako postoji limes

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0). \tag{(1)}$$

Broj $f'(x_0)$ nazivamo derivacija funkcije f u točki x_0.

Za funkciju $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je derivabilna na skupu $B \subseteq A$ ako je derivabilna u svakoj točki tog skupa.

Za funkciju $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, kažemo da je derivabilna ako je derivabilna na cijelom području definicije A (tj. ako je $B = A$).

Ako je $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ derivabilna na skupu $B \subseteq A$ onda postoji funkcija

$$f'|_B : B \to \mathbb{R}, \quad x \to f'(x),$$

koju nazivamo derivacija funkcije f na skupu B.

Ako je $B = A$ onda govorimo o derivaciji $f' : A \to \mathbb{R}$ funkcije $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

Derivabilnu funkciju $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ kojoj je derivacija $f' : A \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija nazivamo neprekidno derivabilna funkcija ili glatka funkcija.

Napomena: Ako je $x_0 \in A$ izolirana točka ($\exists \delta > 0$, $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \cap (A \backslash \{x_0\}) = \emptyset$), onda derivacija $f'(x_0)$ ne postoji, premda je funkcija definirana u toj točki.

Uvedimo oznake:

$$x - x_0 = \Delta x$$ - prirast nezavisne varijable

$$f(x) - f(x_0) = \Delta f(x) = \Delta y$$ - prirast funkcije f u točki x_0.

Budući $x \to x_0$ ako i samo ako $\Delta x \to 0$, onda je

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{ili}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \quad \text{ili} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Primjer

- Ispitajmo derivabilnost funkcije $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.
  ($f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i nema izoliranih točaka).
  Neka je $x_0 \in \mathbb{R} = D_f$ (bilo koja točka). Tada je

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

Dakle, za svaki $x \in \mathbb{R}$ je $f'(x) = 0$, pa je derivacija ove funkcije $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$. Kraće: $(c)' = 0$.

- Ispitajmo derivabilnost funkcije $f(x) = x^2$.
  ($f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i nema izoliranih točaka).
  Neka je $x_0 \in \mathbb{R} = D_f$ (bilo koja točka). Tada je

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - (x_0)^2}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x (2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.
\end{aligned}
$$

  Dakle za svaki $x \in \mathbb{R}$ je $f'(x) = 2x$, pa derivacija ove funkcije $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.
  Kraće: $\left(x^2\right)' = 2x$.

- Ispitati derivabilnost funkcije $f(x) = \sin x$.
  (sami - knjiga I.Slapničar, str.164.). ($\forall x \in \mathbb{R}$, $(\sin x)' = \cos x$)

- Ispitati derivabilnost funkcije $f(x) = \cos x$. ($\forall x \in \mathbb{R}$, $(\cos x)' = -\sin x$)

- Ispitati derivabilnost funkcije $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.
  ($\forall x \in \mathbb{R}$, $(x^n)' = nx^{n-1}$). (Uputa: koristiti binomni teorem!)

- Ispitati derivabilnost funkcije $f(x) = a^x$. (sami - knjiga I.Slapničar, str.172.) ($\forall x \in \mathbb{R}$, $(a^x)' = a^x \ln a$).

Specijalno: $(e^x)' = e^x \ln e = e^x$

Uočimo: Ako je $f(x) = x^2$ (funkcija), onda je $f'(x) = 2x$ (funkcija). Sada je

$$f(1) = 1^2 = 1 \text{ (broj)} \quad \text{i} \quad f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 \text{ (broj)}.$$

S druge strane vrijedi

$$(f(1))' = (1)' = 0 \;\; \text{(derivacija konstante)},$$

Dakle,

$$2 = f'(1) \neq (f(1))' = 0,$$

ili općenito

$$f'(x_0) \neq (f(x_0))'.$$

Geometrijska interpretacija derivacije - problem tangente (Leibnitzov pristup)

Neka je jednadžbom $y = f(x)$ u ravnini zadan graf funkcije (krivulje), pri čemu je $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilna funkcija.

Problem: Tražimo algebarsku jednadžbu tangente u nekoj točki dane krivulje.

Neka je x, $x_0 \in A$ i $x \neq x_0$. Točkama $D(x_0, f(x_0))$ i $T(x, f(x))$ je određena sekanta (pravac) s_T. Koeficijent smjera sekante s_T je

$$k_{s_T} = tg(\alpha_{s_T}) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ako točku D fiksiramo, a točka T se (po grafu) "približava" (teži) točki D, tj. ako $x \to x_0$, onda se sekanta s_T približava tangenti t u točki D. Dakle,

$$k_t = \lim_{T \to D} k_{s_T} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

tj. koeficijent smjera tangente t na graf funkcije f u točki $D(x_0, f(x_0))$ jedanak je derivaciji funkcije f u točki x_0.

Jednadžba tangente sada glasi

$$t \; .... \; y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Točku $D\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ nazivamo diralište.

Normala n u točki $D\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ na graf funkcije f je pravac kroz D okomit na tangentu t. Jednadžba normale glasi

$$n \text{ .... } y - f\left(x_0\right) = -\frac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x - x_0\right), \quad \left(f'\left(x_0\right) \neq 0\right).$$

Primjer Odredite jednadžbu tangente i normale na parabolu $y = x^2$ u točki s apscisom $x_0 = -1$.

$$f\left(x\right) = x^2 \implies f'\left(x\right) = 2x$$

Sada je

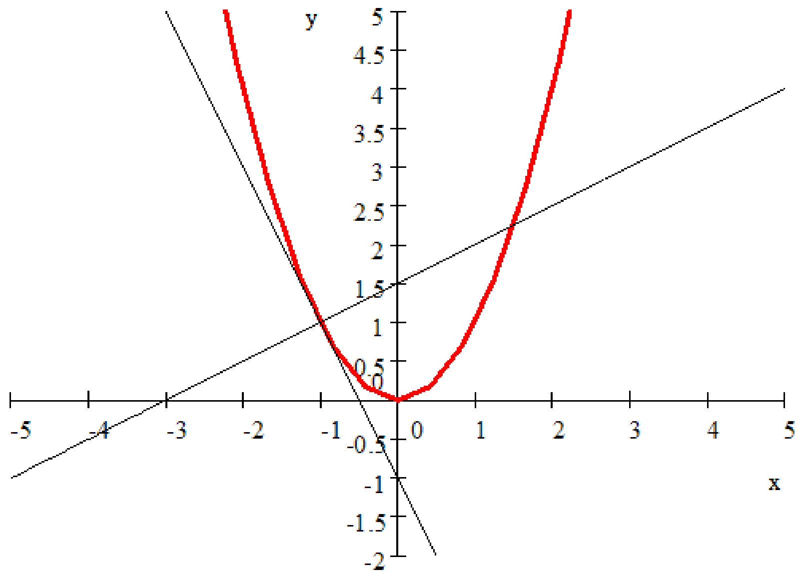
$$\begin{aligned} f\left(-1\right) &= \left(-1\right)^2 = 1, \\ f'\left(-1\right) &= 2 \cdot \left(-1\right) = -2, \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} t \text{ .... } y - 1 &= -2\left(x - \left(-1\right)\right), \\ n \text{ ....} y - 1 &= -\frac{1}{-2}\left(x - \left(-1\right)\right), \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} t \text{ .... } y &= -2x - 1 \\ n \text{ .... } y &= \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{aligned}$$



$$y = x^2, \quad t \text{ .... } y = -2x - 1, \;\; n \text{ .... } y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Teorem 1.2 Ako je funkcija $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ derivabilna u točki $x_0 \in A$, onda je i neprekidna u toj točki.

<u>Dokaz:</u> Budući je funkcija f derivabilna u točki $x_0 \in A$, onda je

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \overset{der.}{=} f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Dakle, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pa je f neprekidna u x_0.

Obrat ovog teorema općenito ne vrijedi.

Teorem 1.2:

$$f \text{ deriv. u } x_0 \;\Rightarrow\; f \text{ nepr. u } x_0 \quad (P \Rightarrow Q)\,,$$

ili ekvivalentno

$$f \text{ nije nepr. u } x_0 \;\Rightarrow\; f \text{ nije deriv. u } x_0 \quad (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

Obrat Teorema 1.2 ne vrijedi:

$$f \text{ nepr. u } x_0 \;\not\Rightarrow\; f \text{ deriv. u } x_0 \quad (Q \not\Rightarrow P)\,,$$

ili ekvivalentno

$$f \text{ nije deriv. u } x_0 \;\not\Rightarrow\; f \text{ nije nepr. u } x_0 \quad (\neg P \not\Rightarrow \neg Q)$$

Dakle, postoje funkcije koje su neprekidne u nekoj točki domene, ali nisu derivabilne u toj točki.

Primjer - kasnije.

Pomoću limesa slijeva i zdesna definiramo:

Definicija 1.3 Kažemo da je $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$,

- <u>derivabilna slijeva u točki</u> $x_0 \in A$ ako postoji limes
$$\lim_{\Delta x \to 0^{-0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_{-0}(x_0).$$
Broj $f'_{-0}(x_0)$ nazivamo <u>derivacija slijeva funkcije f u točki x_0</u>

- <u>derivabilna zdesna u točki</u> $x_0 \in A$ ako postoji limes
$$\lim_{\Delta x \to 0^{+0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_{+0}(x_0).$$
Broj $f'_{+0}(x_0)$ nazivamo <u>derivacija zdesna funkcije f u točki x_0</u>

Dakle, funkcija f je derivabilna u točki $x_0 \in A$ ako i samo ako je f derivabilna slijeva i zdesna u točki x_0 i ako je $f'_{-0}(x_0) = f'_{+0}(x_0)$.

Definiramo lijevu i desnu tangentu u točki $D\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ na graf funkcije f :

$$t_l \text{ .... } y - f\left(x_0\right) = f'_{-0}\left(x_0\right)\left(x - x_0\right),$$

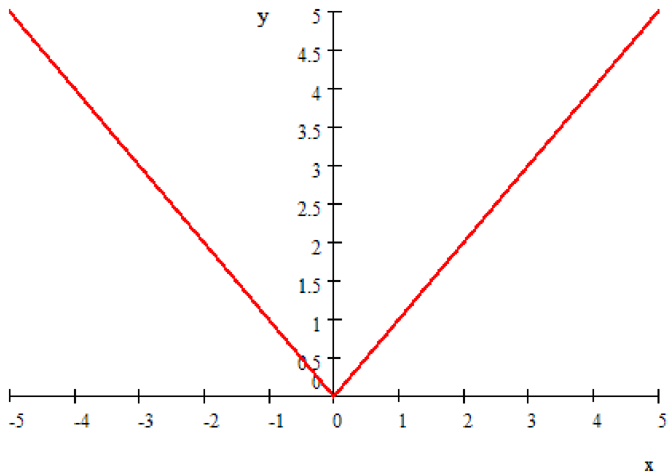
$$t_d \text{ .... } y - f\left(x_0\right) = f'_{+0}\left(x_0\right)\left(x - x_0\right).$$

Primjer Ispitajmo derivabilnost funkcije $f\left(x\right) = \left|x\right|$ u točki $x_0 = 0$. ($f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i nema izoliranih točaka).

$$\begin{aligned} f'_{-0}\left(0\right) &= \lim_{\Delta x \to 0^{-0}} \frac{f\left(0 + \Delta x\right) - f\left(0\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^{-0}} \frac{\left|0 + \Delta x\right| - \left|0\right|}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^{-0}} \frac{\left|\Delta x\right|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^{-0}} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^{-0}} -1 = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_{+0}\left(0\right) &= \lim_{\Delta x \to 0^{+0}} \frac{f\left(0 + \Delta x\right) - f\left(0\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^{+0}} \frac{\left|0 + \Delta x\right| - \left|0\right|}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0^{+0}} \frac{\left|\Delta x\right|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^{+0}} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^{-0}} 1 = 1. \end{aligned}$$

Dakle, f je derivabilna i slijeva i zdesna u točki $x_0 = 0$ ($\exists\ f'_{-0}\left(0\right)$ i $\exists\ f'_{+0}\left(0\right)$), ali je $f'_{-0}\left(0\right) \neq f'_{+0}\left(0\right)$, pa f nije derivabilna u $x_0 = 0$ (ne postoji $f'\left(0\right)$).



$$y = |x|$$

<u>Uočimo:</u>

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0),$$

pa je f neprekidna u točki $x_0 = 0$. Ovo je primjer funkcije za koju ne vrijedi obrat Teorema 1.2 u točki $x_0 = 0$.

Lijeva i desna tangenta u točki $D(0,0)$ na graf funkcije $f(x) = |x|$:

$$t_l \; .... \; y - 0 \; = \; (-1) \cdot (x - 0) \;\; \Longrightarrow \;\; y = -x,$$

$$t_d \; .... \; y - 0 \; = \; 1 \cdot (x - 0) \;\; \Longrightarrow \;\; y = x.$$

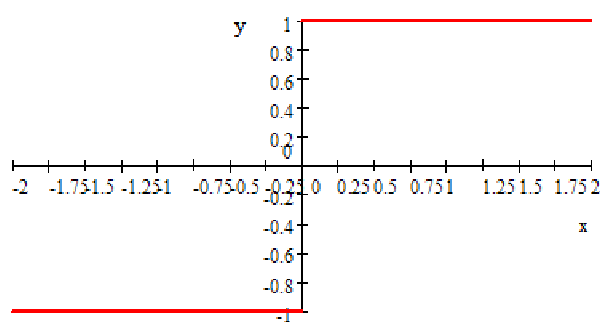
<u>Uočimo:</u> Restrikcije $f|_{(-\infty,0)}$ i $f|_{(0,\infty)}$ su derivabilne funkcije. Naime, vrijedi

$$\left(f|_{(-\infty,0)}\right)'(x) = (-x)' = -1, \quad \forall x < 0,$$

$$\left(f|_{(0,\infty)}\right)'(x) = (x)' = 1, \quad \forall x > 0.$$

Dakle,

$$f'(x) = |x|' = \left\{ \begin{array}{cc} -1, & x < 0, \\ \text{ne postoji,} & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{array} \right\} = sgn(x)$$



$$y = sgn(x)$$

2. Pravila deriviranja

Teorema 2.1 (pravila deriviranja) Neka su funkcje $f, g :: A \longrightarrow \mathbb{R}$, derivabilne na skupu $B \subseteq A$. Tada za svaki $x \in B$ vrijedi

i) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;

ii) $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$;

iii) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;

iv) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, \; g(x) \neq 0.$

Dokaz:

i) sami;

ii) sami;

iv) sami - knjiga I.Slapničar, str.167.

iii) Neka je $x_0 \in B$ (bilo koja točka). Tada je

$$(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f \cdot g)(x_0 + \Delta x) - (f \cdot g)(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [\frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cdot g(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} +$$

$$+ \frac{f(x_0) \cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{\Delta x}]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} g(x_0 + \Delta x) +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} f(x_0) =$$

$$= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

iii)' Specijalno:

$$(cf)'(x) = c' \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = 0 + c \cdot f'(x) = cf'(x), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Primjer

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \cos x \neq 0$$

Slično:

$$(ctgx)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = ... = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad \sin x \neq 0$$

Teorem 2.2 (derivacija kompozicije) Ako je funkcija f derivabilna u točki $x_0 \in D_f$ i funkcija g derivabilna u točki $y_0 = f(x_0) \in D_g$, tada je kompozicija $h = g \circ f$ derivabilna u točki x_0 i vrijedi

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Primjer 1 Treba naći $h'(x)$, ako je $h(x) = \cos(\sin x)$.
Imamo

$$h(x) = (g \circ f)(x), \quad f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x$$

Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ (bilo koja točka) i $\sin x_0 = y_0$. Tada je, po Teoremu 1.3,

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= \cos y_0 \cdot (-\sin x_0) = \\ &= \cos(\sin x_0) \cdot (-\sin x_0) = -\cos(\sin x_0) \cdot \sin x_0, \end{aligned}$$

tj.

$$(\cos(\sin x))' = -\cos(\sin x) \cdot \sin x.$$

Primjer 2

$$(shx)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' \overset{T2.1,\, iii)\prime}{=} \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)' \overset{T1.2,\, ii)}{=}$$

$$\frac{1}{2}\left[(e^x)' - \left(e^{-x}\right)'\right] \overset{T1.2}{=} \frac{1}{2}\left[e^x - (-1)\left(e^{-x}\right)\right]$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$$

Teorem 2.3 (derivacija inverzne funkcije) Neka je $f : A \longrightarrow B$ bijekcija, neka je f derivabilna u točki $x_0 \in A$ i $f(x_0) \neq 0$. Ako je pripadna inverzna funkcija $f^{-1} : B \longrightarrow A$ neprekidna u točki $y_0 = f(x_0) \in B$, tada je

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Primjer 1 Funkcija

$$f(x) = x^2, \qquad f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$$

je bijekcija i f je derivabilna ($f'(x) = 2x, \forall x \geq 0$). Budući je

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}, \qquad f^{-1} : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty),$$

onda je za $x \in [0, \infty)$

$$x^2 = y \iff x = \sqrt{y}.$$

Iz Teorema 1.4 slijedi

$$(\sqrt{y})' = \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad y > 0,$$

pa je

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

Primjer 2 Funkcija

$$f\left(x\right)=\sin x,\quad f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\longrightarrow\left[-1,1\right]$$

je bijekcija i f je derivabilna ($f'\left(x\right)=\cos x$, $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$).

Budući je

$$f^{-1}\left(x\right)=\arcsin x,\quad f^{-1}:\left[-1,1\right]\longrightarrow\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],$$

onda je za $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$$\sin x=y\iff x=\arcsin y$$

Iz Teorema 1.4 slijedi

$$\left(\arcsin y\right)'=\left(f^{-1}\right)'\left(y\right)=\frac{1}{f'\left(x\right)}=\frac{1}{\cos x}\overset{x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}{=}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^{2}x}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^{2}}},\quad y\in\left(-1,1\right),$$

pa je

$$\left(\arcsin x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}},\quad x\in\left(-1,1\right).$$

Slično:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \qquad x > 0$$

Deriviranje implicitno zadane funkcije

Neka je funkcija $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, zadana implicitno sa $F(x,y) = 0$ i neka je f derivabilna u točki $x \in A$. Tražimo $f'(x)$. Uvedimo oznake:

$$y = f(x) \quad \text{i} \quad y' = f'(x).$$

Postupak: formalno deriviramo $F(x,y) = 0$ i koristimo teorem o derivaciji kompozicije.

Primjer 1 Jednadžbom

$$2^y - xy + x^2 - 2 = 0$$

je zadana jedna (ili više) funkcija f. Tražimo f' i $f'(0)$. Uvedimo oznake:

$$y = f(x) \quad \text{i} \quad y' = f'(x).$$

Sada imamo:

$$\left(2^y - xy + x^2 - 2\right)' = 0' \implies$$

$$2^y \ln 2 \cdot y' - y - xy' + 2x + 0 = 0 \implies$$

$$y' \left(2^y \ln 2 - x\right) = -2x + y \implies$$

$$y' = \frac{-2x + y}{2^y \ln 2 - x}.$$

Ako je $y_0 = f\left(0\right)$, onda je

$$2^{y_0} - 0 \cdot y_0 + 0^2 - 2 = 0 \implies$$

$$2^{y_0} = 2 \implies y_0 = 1.$$

Ako je $y_0' = f'\left(0\right)$, tada je

$$y_0' = \frac{-2 \cdot 0 + y_0}{2^{y_0} \ln 2 - 0},$$

tj.

$$f'\left(0\right) = \frac{-2 \cdot 0 + 1}{2^1 \ln 2 - 0} = \frac{1}{2 \ln 2} = \frac{1}{\ln 4}.$$

Primjer 2 Treba odrediti jednadžbu tangente na elipsu

$$4\left(x-1\right)^2+3y^2=12 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\left(x-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

u točki $T(1, y_0 < 0)$.

Dakle, treba naći $y\left(1\right)$ i $y'\left(1\right)$. Imamo:

$$\left(4\left(x-1\right)^2+3y^2\right)'=\left(12\right)' \quad\Longrightarrow$$

$$8\left(x-1\right)+6yy'=0 \quad\Longrightarrow$$

$$y'=-\frac{8\left(x-1\right)}{6y}.$$

Imamo

$$4\left(1-1\right)^2+3y_0^2=12 \quad\Longrightarrow$$

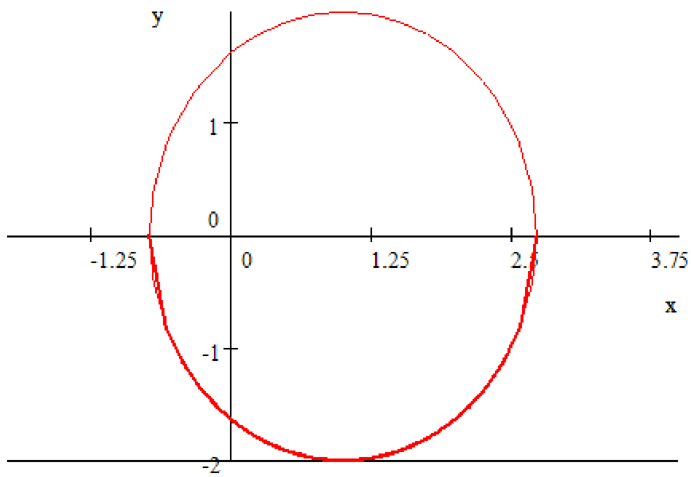
$$y_0^2=4 \quad\Longrightarrow\quad y_0=\pm 2,$$

Dakle, $T(1,-2)$. Sada je

$$y_0'=-\frac{8\left(1-1\right)}{6y_0}=-\frac{8\left(1-1\right)}{6\cdot\left(-2\right)}=0,$$

pa je jednadžba tangente

$$t \;....\; y-\left(-2\right)=0\cdot\left(x-1\right) \;\Longrightarrow\; y=-2.$$



$$\frac{(x-1)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}+\frac{y^2}{2^2}=1, \quad y=-2,$$

Primjer 3 Treba naći $f'(x)$, ako je $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Imamo

$$(x^r)' = \left(e^{r\ln x}\right)' \overset{T.2.2}{=} e^{r\ln x}\cdot(r\ln x)' = x^r\cdot r\cdot\frac{1}{x} = r\cdot x^{r-1}$$

Prisjetimo se: Prirodno područje definicije funkcije $f(x) = x^r$ ovisi o realnom broju $r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

- Ako je $r \in \mathbb{N}$, onda je $D_f = \mathbb{R}$;
- Ako je $r \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$, onda je $D_f = \mathbb{R}$ ili $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ili $D_f = (0,\infty)$ ili $D_f = [0,\infty)$;
- Ako je $r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, onda uzimamo $D_f = (0,\infty)$ za $r<0$ i $D_f = [0,\infty)$ za $r>0$.

Logaritamsko deriviranje

Tražimo $h'(x)$, ako je $h(x)$ funkcija oblika

$$h(x) = (f(x))^{g(x)}.$$

Postupak:

- Uvedemo oznaku
$$y = (f(x))^{g(x)};$$

- Logaritmiramo gornji izraz i dobivamo
$$\ln y = g(x) \cdot \ln f(x);$$

- Deriviramo (vodeći računa da je $\ln y$ složena funkcija - kompozicija)
$$\frac{y'}{y} = g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x);$$

- Dobivamo
$$y' = y\left(g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)\right) \quad \Longrightarrow$$

$$h'(x) = (f(x))^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

Primjer 2 Tražimo $h'(x)$, ako je $h(x)$ funkcija oblika

$$h(x) = (\sin x)^{\cos x}.$$

Uvedemo oznaku

$$y = (\sin x)^{\cos x};$$

Logaritmiramo gornji izraz i dobivamo

$$\ln y = \cos x \cdot \ln \sin x;$$

Deriviramo

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \cdot \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x;$$

Dobivamo

$$y' = y \cdot \left(-\sin x \cdot \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) \implies$$

$$h'(x) = (\sin x)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right)$$

Derivacije elementarnih funkcija

U sljedećeoj tablici, sve derivacije elementarnih funkcija definirane su tamo gdje i funkcije. U slučajevima gdje to ne vrijedi dano je područje definicije derivacije.

$$(c)' = 0,$$ (po definiciji)

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$ (po definiciji)

$$(x^r)' = rx^{r-1}, \ r \in \mathbb{R},$$ (po Trm 2.2)

$$(a^x)' = a^x \ln a,$$ (po definiciji)

$$(e^x)' = e^x,$$ (po definiciji)

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$$ (po Trm 2.3)

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$ (po Trm 2.3)

$$(\sin x)' = \cos x \ ,$$ (po definiciji)

$$(\cos x)' = -\sin x \ ,$$ (po definiciji)

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$ (po Trm 2.1)

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$ (po Trm 2.1)

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1),$$ (po Trm 2.3)

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1),$$ (po Trm 2.3)

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$ (po Trm 2.3)

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$$ (po Trm 2.3)

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,$$ (po Trm 2.1 i Trm 2.2)

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$ (po Trm 2.1 i Trm 2.2)

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$ (po Trm 2.1)

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x},$$ (po Trm 2.1)

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$ (po Trm 2.3)

$$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1,$$ (po Trm 2.3)

$$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2},$$ (po Trm 2.3)

$$(\operatorname{arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2},$$ (po Trm 2.3)