2. Diferenciranje skalarnih funkcija

2.1 Parcijalne derivacije

Uočimo:

- formalno poopće derivabilnosti u točki (vektoru)

$$T_0 \equiv \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0\right) \in D_f$$

za skalarne funkcije ($m \geq 2$) nije moguće, jer

$$\frac{\Delta f\,(T)}{\Delta T} \quad \text{(?)}$$

nema smisla ("vektor dijeli broj").

- Međutim, promatramo li suženja

$$f_{T_0,i}, \quad i = 1, ..., m$$

(definiciju vidjeti u pogl. 1.1), koja su, zapravo, funkcije jedne varijable, možemo govoriti o derivabilnosti.

Promatrajmo funkciju $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ i po volji odabranu točku $T_0 = (x_0, y_0) \in D$. Označimo ravnine

$$\Pi_{y_0} ... y = y_0 \quad \text{i} \quad \Pi_{x_0} ... x = x_0.$$

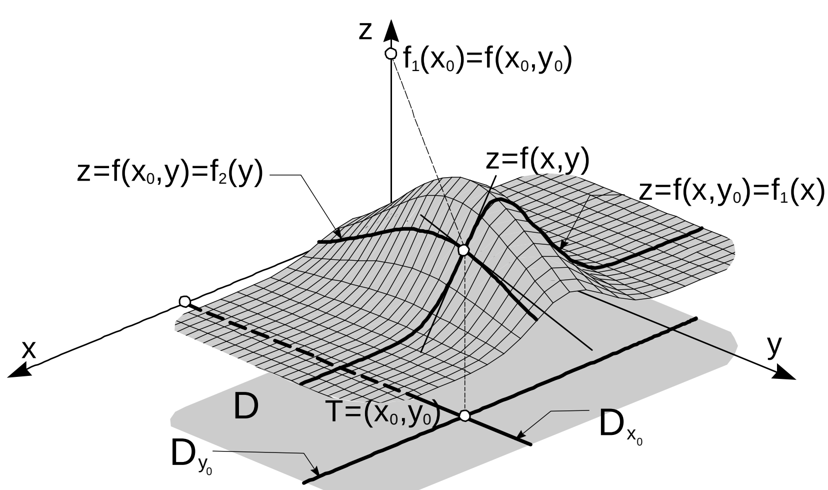
Nadalje, neka je

$$D_{y_0} = \Pi_{y_0} \cap D \subseteq D \quad \text{i} \quad D_{x_0} = \Pi_{x_0} \cap D \subseteq D$$

Očito je $D_{y_0} \neq \emptyset$, $D_{x_0} \neq \emptyset$, jer sadrže barem točku T_0. Suženja

$$f|_{D_{y_0}} \equiv f_1 : D_{y_0} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = f(x, y_0)$$
$$f|_{D_{x_0}} \equiv f_2 : D_{x_0} \to \mathbb{R}, \quad f_2(y) = f(x_0, y)$$

smijemo smatrati funkcijom jedne varijable, jer se mijenja samo koordinata x, odnosno y, redom.



Ako postoji limes

$$\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overbrace{f(x_0+\Delta x,y_0)}^{f_1(x_0+\Delta x)}-\overbrace{f(x_0,y_0)}^{f_1(x_0)}}{\Delta x}}_{f_1'(x_0)}=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)$$

onda $f_x'(x_0,y_0)$ nazivamo prva parcijalna derivacija po x funkcije f u točki (x_0,y_0). Ako postoji limes

$$\underbrace{\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\overbrace{f(x_0,y_0+\Delta y)}^{f_2(y_0+\Delta y)}-\overbrace{f(x_0,y_0)}^{f_2(y_0)}}{\Delta y}}_{f_2'(y_0)}=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)$$

onda $f_y'(x_0,y_0)$ nazivamo prva parcijalna derivacija po y funkcije f u točki (x_0,y_0).

Napomena Graf $z{=}f(x,y)$ funkcije je ploha. Presiječemo li tu plohu ravninom $x=x_0$, odnosno, $y=y_0$, dobit ćemo ravninske krivulje Γ_2, odnosno Γ_1, redom.

Geometrijska interpretacija parcijalnih derivacija $f_x(x_0,y_0)$ i $f_y(x_0,y_0)$: to su koeficijenti smjera tangente na Γ_1, odnosno Γ_2 u točki $T_0\,(x_0,\ y_0,\ z_0{=}f(x_0,y_0))$.

Neka je dana funkcija $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ i neka točka $T_0 \equiv \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0\right) \in D$. Promotrimo skupove

$$D_{T_0,i} = \{T \equiv (x_1, x_2, ..., x_m) \in D \mid x_j = x_j^0,\ i \neq j\} \subseteq D$$

$i = 1, 2, ..., m$. Uočimo da je u $D_{T_0,i}$ promjenjiva samo jedna koordinata, pa ga možemo smatrati podskupom od $\mathbb{R}$. Suženje

$$f\ |_{D_{T_0,i}} \equiv f_{T_0,i} : D_{T_0,i} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tada smijemo smatrati funkcijom jedne varijable.

Definicija 2.1 Neka je dana funkcija $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ i neka točka $T_0 \equiv \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0\right) \in D$. Neka je dan skup $D_{T_0,i}$ i suženje $f_{T_0,i}$ za neki $i = 1, 2, ..., m$.

Ako postoji derivacija funkcije $f_{T_0,i}$ u točki $x_i^0 (\in D_{T_0,i} \subseteq D)$ reći ćemo da funkcija f ima (prvu) **parcijalnu derivaciju po varijabli x_i u točki T_0**.

Derivaciju $(f_{T_0,i})' \left(x_i^0\right)$ tada nazivamo (prvom) **parcijalnom derivacijom funkcije f po varijabli x_i u točki** T_0 i označujemo sa $\frac{\partial f}{\partial x_i}(T_0) = f'_{x_i}(T_0)$.

Dakle, po definiciji je

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f((x_1^0, ..., x_{i-1}^0, x_i^0 + \Delta x_i, x_{i+1}^0 .., x_m^0)) - f((x_1^0, ..., x_m^0))}{\Delta x_i}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(T_0) = f'_{x_i}(T_0).$$

Ako funkcija f ima u točki T_0 parcijalnu derivaciju po svakoj varijabli onda kažemo da je funkcija f **derivabilna u točki** T_0.
Ako je f derivabilna u svakoj točki $T \in D$, nazivamo ju **derivabilnom funkcijom**.

Neka je $A_i \subseteq D$ skup svih točaka $T \in D$ u kojima $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ima parcijalnu derivaciju po varijabli x_i. Tada dobivamo m funkcija svaka od m varijabli:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \;:\; A_i \longrightarrow \mathbb{R},\; i = 1, 2, ..., m$$

$$T \in A_i \xrightarrow{\frac{\partial f}{\partial x_i}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(T) \in \mathbb{R}.$$

Funkciju $\frac{\partial f}{\partial x_i} : A_i \longrightarrow \mathbb{R}$ tada nazivamo (prva) **parcijalna derivacija od f po** x_i (na A_i).

Napomena: Ako želimo naći $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, tada f treba derivirati po x_i tako da sve preostale varijable tretiramo kao konstante.

Uočimo: f je derivabilna akko je $A_i = D$ za svaki $i = 1, 2, ..., m$;

- Ako je $A = \bigcap_{i=1}^{m} A_i \subseteq D$, $A \neq \emptyset$ (tada su na A definirane sve $\frac{\partial f}{\partial x_i}$), onda je f **derivabilna na skupu** $A \subseteq D$ (i svakom skupu $B \subseteq A$);

- Ako je $\frac{\partial f}{\partial x_i} : A_i \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija u točki $T_0 \in A_i$, onda kažemo da je f **neprekidno parcijalno derivabilna po varijabli** x_i u točki $T_0 \in A_i$;

- Ako su sve $\frac{\partial f}{\partial x_i} : A_i \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., m$ neprekidne funkcije u točki $T_0 \in A = \bigcap_{i=1}^{m} A_i \subseteq D$ (na skupu $B \subseteq A$), onda kažemo da je f **neprekidno derivabilna** u točki $T_0 \in A$ (na skupu $B \subseteq A$);

Primjer 2.1 Ispitajte derivabilnost funkcije dane pravilom

$$f(x,y,z) = y + \ln\left(xy + \sqrt{z}\right).$$

Imamo: $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, gdje je

$$D_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy + \sqrt{z} > 0 \ \wedge \ z \geq 0\right\}.$$

Deriviranjem dobivamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{y}{xy+\sqrt{z}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} : A_x \longrightarrow \mathbb{R}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= 1 + \frac{x}{xy+\sqrt{z}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} : A_y \longrightarrow \mathbb{R}, \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{1}{2\sqrt{z}\,(xy+\sqrt{z})}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} : A_z \longrightarrow \mathbb{R},
\end{aligned}$$

gdje je

$$\begin{aligned}
A_x &= D_f \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy + \sqrt{z} \neq 0\right\} = D_f \\
A_y &= D_f \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy + \sqrt{z} \neq 0\right\} = D_f \\
A_z &= D_f \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2\sqrt{z}\left(xy + \sqrt{z}\right) \neq 0\right\} \neq D_f.
\end{aligned}$$

Dakle, $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ nije derivabilana ($A_z \neq D_f$), ali je (neprekidno) derivabilna na

$$
\begin{aligned}
A &= A_x \cap A_y \cap A_z = \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy + \sqrt{z} > 0 \ \wedge \ z > 0 \right\}.
\end{aligned}
$$

Sjetimo se da za realne funkcije jedne varijable *derivabilnost povlači neprekidnost*. Sada ćemo pokazati da za funkcije više varijabla to, općenito, *ne vrijedi*.

Primjer Pokazali smo da je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadana propisom

$$
f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}
$$

prekidna u točki $(0,0)$ ($\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ne postoji).

Ona je, međutim, derivabilna u točki $(0,0)$. Naime

$$
\begin{aligned}
f'_x(0,0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(\Delta x)\cdot 0}{(\Delta x)^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = 0,
\end{aligned}
$$

a slično se pokaže da je i $f'_y(0,0) = 0$.

Dakle: $f'_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} y\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i $f'_y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2.2 Diferencijabilnost

Prisjetimo se funkcije jedne varijable:

- Definirali smo

$$\triangle f(x) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f(x)}{\triangle x}.$$

- Ako je f derivabilna u x_0 ($\exists f'(x_0)$), onda je

$$\lim_{\triangle x \to 0} \left(\frac{\triangle f(x) - f'(x_0)\triangle x}{\triangle x} \right) = \tag{1}$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \left(\frac{\triangle f(x)}{\triangle x} - f'(x_0) \right) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

Označimo $r\,(\triangle x) = \triangle f(x) - f'(x_0)\triangle x$. Iz relacije (1) vidimo da $r\,(\triangle x)$ "brže" teži u 0 nego $\triangle x$.

To znači da za derivabilnu (diferencijabilnu) funkciju f u točki x_0 vrijedi

$$\begin{aligned} \triangle f(x) &= f'(x_0)\triangle x + r\,(\triangle x) = f'(x_0)dx + r\,(\triangle x) = \\ &= df(x) + r\,(\triangle x) \end{aligned}$$

gdje je $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \frac{r(\triangle x)}{\triangle x} = 0.$

Funkcija $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ će biti diferencijabilana funkcija u točki $(x_0, y_0) \in D$ ako se prirast

$$\begin{aligned} \triangle f(x,y) &= f(x,y) - f(x_0,y_0) \\ &= f\left(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right) \end{aligned}$$

dade zapisati u obliku

$$\triangle f(x,y) =$$

$$= f_x'(x_0,y_0)\left(x - x_0\right) + f_y'(x_0,y_0)\left(y - y_0\right) + r\left(\triangle x, \triangle y\right) =$$

$$= f_x'(x_0,y_0)\triangle x + f_y'(x_0,y_0)\triangle y + r\left(\triangle x, \triangle y\right)$$

gdje $\lim\limits_{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)} \frac{r(\triangle x,\triangle y)}{\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}} = 0.$

Poopćimo ovo.

Promatrajmo funkciju $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ i po volji odabranu točku $T_0 \equiv \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0\right) \in D$. Neka je $T \equiv (x_1, x_2, ..., x_m) \in D$ bilo koja točka. Uvedimo oznake:

$$x_i - x_i^0 = \triangle x_i, \quad i = 1, 2, ..., m,$$

Za bilo koji i promatrajmo pripadnu funkciju (jedne varijable) $f_{T_0,i} : D_{T_0,i} \longrightarrow \mathbb{R}$. Ako je ta funkcija derivabilna (diferencijabilna) u točki x_i^0, onda pripadni diferencijal

$$df_{T_0,i}(x_i^0) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$df_{T_0,i}(x_i^0)(x_i) \equiv df_{T_0,i}(x_i) = f'_{T_0,i}(x_i^0)\triangle x_i =$$

$$= f'_{T_0,i}(x_i^0)dx_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}(T_0)dx_i$$

nazivamo **parcijalnim diferencijalom funkcije f po varijabli** x_i u točki T_0.

Definicija 2.2 Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ **diferencijabilna u točki** $T_0 \in D$, ako postoji linearan funkcional L takav da je

$$\triangle f(T) = f(T) - f(T_0) = L\left(T - T_0\right) + r\left(T - T_0\right) \quad (2)$$

pri čemu funkcija $T - T_0 \xrightarrow{r} r\left(T - T_0\right) \in \mathbb{R}$ ima svojstvo

$$\lim_{T \to T_0} \frac{r\left(T - T_0\right)}{\|T - T_0\|} = 0.$$

Napomena: U gornjoj definiciji je

$$\|T - T_0\| = d\left(T, T_0\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2}.$$

Linearan funkcional je funkcija $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ oblika

$$\begin{aligned} L\left(T\right) &= L\left(\left(x_1, x_2, ..., x_m\right)\right) = \\ &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_m x_m = A \cdot T \end{aligned}$$

gdje je $A \equiv \left(a_1, a_2, ..., a_m\right)$ vektor, a $A \cdot T$ oznaka za skalarni produkt vektora[1].

Može se pokazati da je linearan funkcional L u Definiciji 2.2, ako postoji, jedinstven.
Tada L označujemo s $df\left(T_0\right)$ i nazivamo **diferencijalom funkcije** f u točki T_0.
Može se pokazati da je tada

$$L\left(T - T_0\right) \equiv df\left(T_0\right)\left(T\right) = \tag{3}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(T_0\right) \triangle x_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(T_0\right) dx_i.$$

Dakle, diferencijal funkcije f u točki T_0 je potpuno određen parcijalnim diferencijalima funkcije f po

---

[1] $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ je unitaran prostor nad $\mathbb{R}$, pa za svaki linearan funkcional $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ postoji jedinstven vektor $A \in \mathbb{R}^n$ tako da je $L\left(T\right) = T \cdot A$.

varijabli x_i^0, tj. s parcijalnim derivacijama $\frac{\partial f}{\partial x_i}(T_0)$, $i = 1, 2, ..., m.$
Kraća oznaka:

$$df(T_0)(T) \equiv df(T).$$

Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ **diferencijabilna na skupu** $B \subseteq D$, ako je diferencijabilana u svakoj točki $T \in B$.

U slučaju $B = D$ govorimo o **diferencijabilnoj funkciji.**

Napomena:

- Iz Definicije 2.2 slijedi da se funkcijski prirast $\triangle f(T)$ u točki $T = T_0 + dT$, $dT \equiv (\triangle x_1, \triangle x_2, ..., \triangle x_m) = (dx_1, dx_2, ..., dx_m)$, diferencijabilne funkcije u točki T_0 može, po volji dobro aproksimirati vrijednošću $df(T)$, ako su $\triangle x_i = dx_i$ dovoljno mali.
- Nadalje, diferencijabilnost povlači derivabilnost, dok obrat općenito ne vrijedi (Za $m = 1$ to su ekvivalentna svojstva).

Primjer 2.2 Funkcija

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2},$$

ima u točki $(0,0)$ graničnu vrijednost 0, $\lim\limits_{(0,0)} f(x,y) = 0$. (Vidjeti Primjer 1.5)

Dakle funkcija

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

je neprekidna u $(0,0)$. Ispitajmo njenu derivabilnost u $(0,0)$. Imamo

$$\begin{aligned} g_x'(0,0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g\left(0+\Delta x, 0\right) - g(0,0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(\Delta x)^2 \cdot 0}{(\Delta x)^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = 0, \end{aligned}$$

a slično se pokaže da je i $g_y'(0,0) = 0$, pa je derivabilna u $(0,0)$.

Pokažimo sada da **nije** diferencijabilna u $(0,0)$. Dakle, treba pokazati da **ne vrijedi**

$$\lim_{(\triangle x, \triangle y) \to (0,0)} \frac{r\left(\triangle x, \triangle y\right)}{\sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}} = 0.$$

Iz (2) i (3) imamo

$$\lim_{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)} \frac{r\left(\triangle x,\triangle y\right)}{\sqrt{\left(\triangle x\right)^2+\left(\triangle y\right)^2}} =$$

$$= \lim_{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)} \frac{\triangle g(x,y)-\left[g_x'(0,0)\triangle x+g_y'(0,0)\triangle y\right]}{\sqrt{\left(\triangle x\right)^2+\left(\triangle y\right)^2}} =$$

$$\left[\begin{array}{c} \triangle x = x-0 = x, \\ \triangle y = y-0 = y \\ \triangle g(x,y) = g\left(0+\triangle x, 0+\triangle y\right)-g\left(0,0\right) = g(x,y) \end{array}\right]$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)-[0\cdot x+0\cdot y]}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^2y}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pokažimo da ovaj limes ne postoji:

$$\lim_{\substack{(0,0)\\ y=kx}} \frac{x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot kx}{\left(x^2+\left(kx\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k}{\left(1+k^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

pa funkcija $\frac{r(\triangle x,\triangle y)}{\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}}$ nema limes u $(0,0)$.