Primijenjena matematika

1. Diferencijalne jednadžbe

2. Vjerojatnost i statistika

3. Numerička matematika

Literarutura:

1. Bogdanić N.: *Primijenjena matematika*, Split 1980.

2. Bradić, Pečarić, Roki, Strunje: *Matematika za tehnološke fakultete,* Element *1998.*

3. Pavlić I.: *Statistička teorija i primjena*, Tehnička knjiga Zagreb 1985.

4. Antunac-Majcen (grupa autora FSB-Zagreb): *Riješeni zadaci iz više matematike s kratkim repetitorijem definicija i teorema, sv. IV*, Školska knjiga Zagreb 1990.

5. Demidovič, B.P.: *Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke*, Tehnička knjiga Zagreb

6. Kopčenova, Maron: *Computational mathematics*, Mir publishers Moscow 1990.

7. N. Elezović, *Zbirka zadataka iz teorije vjerojatnosti*, Element, Zagreb 1995.;

I. Diferencijalne jednadžbe

1.1. Definicija diferencijalne jednadžbe

Glavni problem integralnog računa: Tražimo funkciju $y = y(x)$ za koju vrijedi

$$y' = f(x), \quad \frac{dy}{dx} = f(x), \quad dy = f(x)\,dx$$

na nekom intervalu I. Funkcija $y = y(x)$ je određena "do na konstantu", što smo zapisivali u obliku

$$y(x) = \int f(x)\,dx + c, \quad x \in I.$$

Primjer 1.1

$$y' = \cos x \implies y(x) = \int \cos x dx + c = \sin x + c$$

Slično bi riješili i problem $y'' = 0$. Uzastopnim integriranjem dobivamo:

$$y'(x) = c_1, \qquad y(x) = c_1 x + c_2.$$

Analogno, uzastopnim integriranjem, rješavamo i problem

$$y^{(n)}(x) = f(x).$$

Definicija 1.1: *Diferencijalnom jednadžbom* nazivamo bilo koju jednadžbu koja povezuje nepoznatu funkciju, nezavisnu varijablu (ili nezavisne varijable) i derivacije nepoznate funkcije.
Diferencijalna jednadžba naziva se *obična diferencijalna jednadžba* ako je u njoj nepoznata funkcija, funkcija samo jedne varijable.

Primjer 1.2

a) $y' - 2y = x - 3$ - obična diferencijalna jednadžba ($x-$nezavisna varijabla, $y = y(x)$ $-$nepoznata funkcija);

b) $y'' - 2ty' = t^2$ - obična diferencijalna jednadžba ($t-$nezavisna varijabla, $y = y(t)-$nepoznata funkcija),

c) $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = z$ - parcijalna diferencijalna jednadžba ($x, y-$nezavisne varijable, $z = z\left(x, y\right)-$nepoznata funkcija).

<u>*Opći oblik*</u> obične diferencijalne jednadžbe je

$$F(x,\ y,\ y',\ y'', ...,\ y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

ili

$$y^{(n)} = f\left(x,\ y,\ y',\ y'', ...,\ y^{(n-1)}\right)$$

<u>*Red*</u> obične diferencijalne jednadžbe je red najviše derivacije koja se nalazi u jednadžbi.

Napomena: Diferencijalna jednadžba (1) je diferencijalna jednadžba $n-$tog reda.

Primjer 1.3

a) $y' - 2y = x - 3$ - obična diferencijalna jednadžba prvog reda;

b) $y'' - 2ty' = t^2$ - obična diferencijalna jednadžba drugog reda.

<u>*Riješiti ili integrirati*</u> diferencijalnu jednadžbu (ili naći rješenje ili integral) znači odrediti sve funkcije (eksplicitno ili implicitno) koje, zajedno sa svojim derivacijama identički zadovoljavaju danu diferencijalnu jednadžbu.

Primjer 1.4 Dana je diferencijalna jednadžba

$$y'' + y = 0.$$

Provjerimo jesu li neke od funkcija: $y_1\left(x\right) = \cos x$, $y_2\left(x\right) = \sin x$, $y_3\left(x\right) = \sin x + \cos x$ rješenja gornje diferencijalne jednadžbe. Imamo:

a) $y_1\left(x\right) = \cos x \Longrightarrow y_1'\left(x\right) = -\sin x \Longrightarrow y_1''\left(x\right) = -\cos x$. Uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$\underbrace{-\cos x}_{y_1''(x)} + \underbrace{\cos x}_{y_1(x)} = 0 \Longleftrightarrow 0 = 0,$$

pa je $y_1\left(x\right) = \cos x$ rješenje.

Slično,

b) $y_2(x) = \sin x \Longrightarrow y_2'(x) = \cos x \Longrightarrow y_2''(x) = -\sin x$. Uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$\underbrace{-\sin x}_{y_2''(x)} + \underbrace{\sin x}_{y_2(x)} = 0 \Longleftrightarrow 0 = 0,$$

pa je $y_2(x) = \sin x$ rješenje.

c) $y_3(x) = \sin x - \cos x \Longrightarrow y_3'(x) = \cos x + \sin x \Longrightarrow y_3''(x) = -\sin x + \cos x$. Uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$\underbrace{-\sin x + \cos x}_{y_3''(x)} + \underbrace{\sin x - \cos x}_{y_3(x)} = 0 \Longleftrightarrow 0 = 0,$$

pa je $y_3(x) = \sin x - \cos x$ rješenje.

Pitanje: Kako naći sva rješenja ove diferencijalne jednadžbe? Odgovor ćemo dati kasnije (u Poglavlju 1.4).

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe (1) je obitelj funkcija

$$y = \varphi(x,\ c_1,\ c_2, ...,\ c_n)$$

gdje su c_1, c_2, ..., c_n realne konstante, koja diferencijalnu jednadžbu (1) zadovoljava identički.

Napomena: Oblik

$$\Phi(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0.$$

se naziva opći integral (ovim oblikom može biti zadano implicitno više općih rješenja).

Partikularno rješenje (ili *partikularni integral*) se dobiva iz općeg rješenja (ili integrala) za konkretne vrijednosti konstanti c_1, c_2, ..., c_n.

Primjer 1.5 Opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' + y = 0$ je

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Provjera: $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x \Longrightarrow y'(x) = c_1 \cos x - c_2 \sin x \Longrightarrow y''(x) = -c_1 \sin x - c_2 \cos x$. Uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$\underbrace{-c_1 \sin x - c_2 \cos x}_{y''(x)} + \underbrace{c_1 \sin x + c_2 \cos x}_{y(x)} = 0 \Longleftrightarrow 0 = 0,$$

pa je funkcija oblika $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ rješenje za sve vrijednosti konstanti c_1 i c_2.

a) Za $c_1 = 0$ i $c_2 = 1$ dobivamo partikularno rješenje $y_1(x) = \cos x$;

b) Za $c_1 = 1$ i $c_2 = 0$ dobivamo partikularno rješenje $y_2(x) = \sin x$;

c) Za $c_1 = 1$ i $c_2 = -1$ dobivamo partikularno rješenje $y_3(x) = \sin x - \cos x$;

Ponekad postoje rješenja diferencijalne jednadžbe koja se ne mogu dobiti iz općeg rješenja (za konkretne vrijednosti konstanti $c_1, c_2, ..., c_n$). Ta rješenja nazivamo *singularnim rješenjima.*

Primjer 1.6 Opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y^2 y'^2 + y^2 - 1 = 0$$

je $(x-c)^2 + y^2 = 1$ (provjerti da je to rješenje). Međutim postoje rješenja $y(x) = 1$ i $y(x) = -1$ (provjerti da su to rješenja) koja se ne mogu dobiti iz općeg za neku konkretnu vrijednost konstante c. Dakle, $y(x) = 1$ i $y(x) = -1$ su singularna rješenja.

Graf rješenja (paritikularnog ili općeg) se naziva *integralna krivulja* (ili obitelj *integralnih krivulja* - za opće rješenje).

Primjer 1.6 Opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' = \frac{2y}{x}$$

je $y(x) = cx^2$ (provjerti da je to rješenje). Graf općeg rješenja (integralne krivulje) je obitelj parabola $y = cx^2$ za $c \neq 0$ i pravac $y = 0$ za $c = 0$ (slika Fig 1).

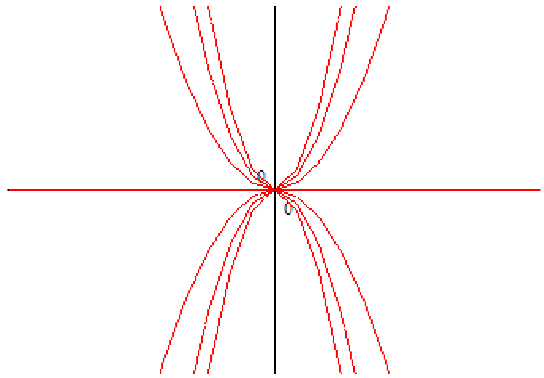


Figure 1: $y = cx^2$

Graf singularnog rješenja nazivamo *singularna* *integralna krivulja* i ona je *ovojnica* ili *anvelopa* obitelji integralnih krivulja danih općim rješenjem (integralom).

Ovojnica obitelji ravninskih krivulja $F(x, y, c) = 0$ je krivulja koja svaku krivulju iz obitelji krivulja $F(x, y, c) = 0$ dira i obrnuto, svaka točka te krivulje je diralište jedne krivulje iz obitelji $F(x, y, c) = 0$.

Napomena: Svaka krivulja je ovojnica svojih tangenti.

Primjer 1.8: Opće rješenje (integral) diferencijalne jednadžbe $y^2y'^2 + y^2 - 1 = 0$ je $(x - c)^2 + y^2 = 1$, a singularna rješenja $y(x) = 1$ i $y(x) = -1$. Graf općeg rješenja (integralne krivulje) je obitelj kružnica $(x - c)^2 + y^2 = 1$ radijusa 1 kojima centar "šeta" po osi x, a grafovi singularnih rješenja su pravci $y = 1$ i $y = -1$ (slika Fig 2)[1].

Tri važna pitanja:

- postojanje rješenja;
- nalaženje svih ili samo nekih rješenja;
- jedinstvenost rješenja uz dane početne uvjete.

[1] Svaka kružnica iz obitelji $(x - c)^2 + y^2 = 1$ dira pravac $y = 1$ ($y = -1$) i svaka točka pravca $y = 1$ ($y = -1$) je diralište jedne kružnice iz obitelji $(x - c)^2 + y^2 = 1$.

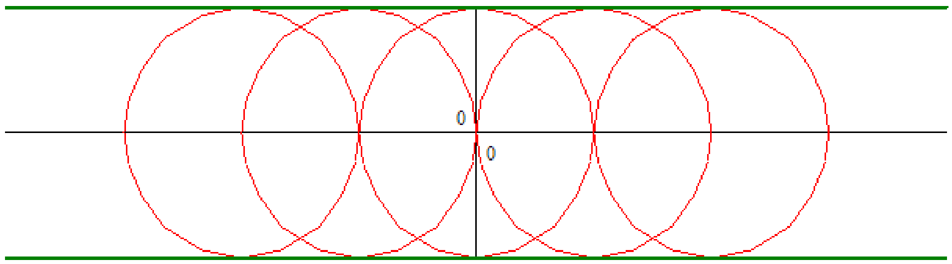


Figure 2: $(x-c)^2 + y^2 = 1$, $y = 1$, $y = -1$

Mi ćemo se baviti samo nekim tipovima običnih diferencijalnih jednadžbi do uključivo drugog reda, tj. diferencijalnim jednadžbama oblika

$$F(x,\ y,\ y') = 0 \qquad (\text{ili} \qquad y' = f(x,\ y))$$

i

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (\text{ili} \quad y'' = f(x, y, y')).$$

Za opisivanje fizikalnih (realnih) problema često koristimo matematičke modele (idealizacija) koji su često dani u obliku diferencijalnih jednadžbi. Pomoću diferencijalnih jednadžbi se opisuju problemi kod kojih, na temelju trenutnog stanja i načina kako se nešto mijenja, želimo "predvidjeti budućnost".

Primjer 1.8 (Problem rasta)

Model 1 U raznim situacijama se susrećemo s nekom veličinom čija je brzna promjene proporcionalna s njenom trenutnom vrijednošću. Npr. rast (pad) populacije proporcionalan je broju trenutne populacije, brzina raspada radioaktivne tvari proporcionalna je trenutnoj količini te tvari, dobit je proporcionalna količini uloženog novca,... .
Ovu zakonitost matematički formuliramo:

$$y' = \frac{dy}{dt} = ky. \qquad (\text{dif. jed. I. reda - } \underline{\text{populacijska jednadžba}})$$

Napomena: Ovdje je vrijeme t nezavisna varijabla, veličina populacije nepoznata funkcija $y(t)$, a $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ mjeri promjenu (rast ili pad) populacije u vremenu. Uočimo, ako je $k > 0$ onda je $\frac{dy}{dt} > 0$, što znači da populacija raste, a ako je $k < 0$ onda je $\frac{dy}{dt} < 0$ što znači da populacija pada.

Rješenje je

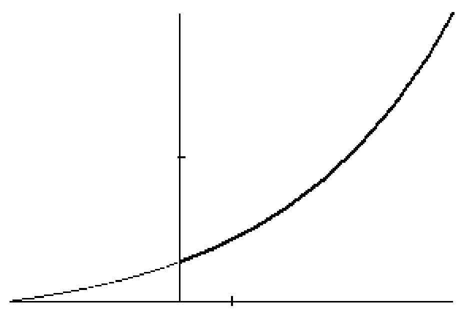
$$\frac{dy}{dt} = ky \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{y} = kdt$$

$$\Longrightarrow \quad \ln|y| = kt + c_1 \quad \Longrightarrow \quad y = ce^{kt} \qquad (c = \pm e^{c_1}).$$

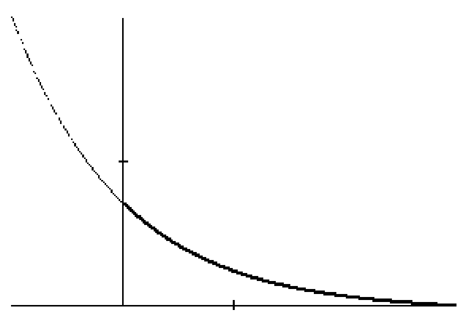
Konstantu c određujemo prema početnom stanju y_0, tj. veličini populacije u trenutku $t_0 = 0$. Budući je $y(0) = ce^0 = c$, rješenje je

$$y(t) = y_0 e^{kt}.$$

Graf ove funkcije je:



$y = y_0 e^{kt}$, $k > 0$



$y = y_0 e^{kt}$, $k < 0$

Pretpostavka da je rast (pad) populacije proporcionalan je broju trenutne populacije je dobra ako imamo idealne uvjete. Npr. ako se radi o populaciji bakterija ili životinja to znači da npr. životni prosor nije ograničen, nema prirodnih neprijatelja, ima dovoljno hrane,... .

Model 2 Pretpostavimo da je rast populacije proporcionalan je broju trenutne populacije, ali da veličina populacije počima opadati kad dosegne kapacitet K. Ove uvjete možemo opisati ovako:

- $\frac{dy}{dt} \approx ky$, za y dovoljno malen;
- $\frac{dy}{dt} < 0$, za $y > K$.

Matematički model:

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right), \; k > 0 \qquad (\underline{\text{logistička diferencijalna jednadžba}})$$

Naime, ako je

- $y << K$ (y dovoljno malen) onda je $\frac{y}{K} \approx 0$, tj. $1 - \frac{y}{K} \approx 1$, pa je $\frac{dy}{dt} \approx ky$;
- $y > K$ onda je $\frac{y}{K} > 1$, tj. $1 - \frac{y}{K} < 0$, pa je $\frac{dy}{dt} < 0$.

Opće rješenje logističke diferencijalne jednadžbe (dif. jed. sa sep. var. - kasnije) je

$$y(t) = \frac{K}{1 + ce^{-kt}}.$$

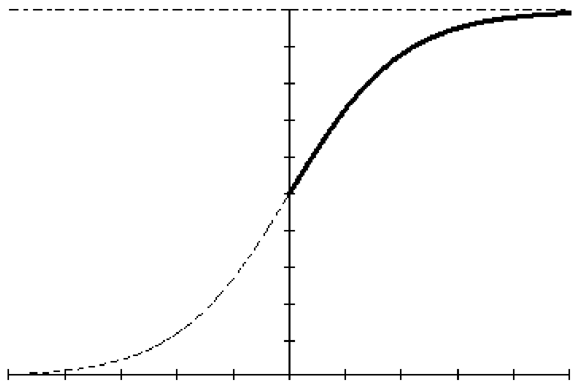
Konstantu c određujemo prema početnom stanju y_0, tj. količini u trenutku $t_0 = 0$. Budući je $y(0) = \frac{K}{1+c}$, imamo

$$\frac{K}{1 + c} = y_0,$$

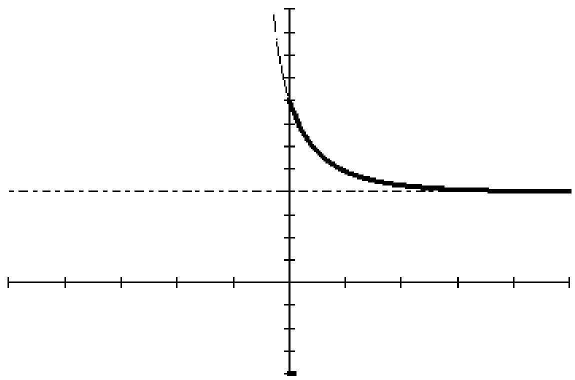
što povlači $c = \frac{K - y_0}{y_0}$, tj.

$$y(t) = \frac{K}{1 + \frac{K - y_0}{y_0} e^{-kt}}.$$

Graf ove funkcije je:



$y(t) = \frac{K}{1+\frac{K-y_0}{y_0}e^{-kt}}, \quad y_0 < K, \quad k > 0$



$y(t) = \frac{K}{1+\frac{K-y_0}{y_0}e^{-kt}}, \quad y_0 > K, \quad k > 0$

Model 3 Pretpostavimo da je rast populacije proporcionalan je broju trenutne populacije, ali da veličina populacije počima opadati kad dosegne kapacitet K, te počima izumirati kad je veličina populacije manja od m . Ove uvjete možemo opisati ovako:

- $\frac{dy}{dt} \approx ky$ za y nije prevelik niti premalen ($m << y << K$);
- $\frac{dy}{dt} < 0$ za $y > K$;
- $\frac{dy}{dt} < 0$ za $y < m$.

Matematički model:

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right)\left(1 - \frac{m}{y}\right), \quad k > 0$$

Naime, ako je

- $m << y << K$ onda je $\frac{y}{K} \approx 0$ i $\frac{m}{y} \approx 0$, tj. $1 - \frac{y}{K} \approx 1$ i $1 - \frac{m}{y} \approx 1$, pa je $\frac{dy}{dt} \approx ky$;
- $y > K$ onda je $\frac{y}{K} > 1$ i $\frac{m}{y} < 1$, tj. $1 - \frac{y}{K} < 0$, $1 - \frac{m}{y} > 0$, pa je $\frac{dy}{dt} < 0$;
- $y < m$ onda je $\frac{m}{y} > 1$ i $\frac{y}{K} < 1$, tj. $1 - \frac{y}{K} > 0$, $1 - \frac{m}{y} < 0$, pa je $\frac{dy}{dt} < 0$;

Primjer: Podaci o broju stanovnika u svijetu dani su tablicom (vidjeti dodatak). Uz pretpostavku da je rast broja stanovnika proporcionalan broju stanovnika, treba odrediti k i usporediti koliko se dobro model podudara s podacima.

Rješenje: Neka je $y(t)$ broj stanovnika. Tada je $y(t) = y_0 e^{kt}$.

- Ako odaberemo da je $t_0 = 0$ za 1900. godinu, onda je $y_0 = 1650$, tj. $y(t) = 1650e^{kt}$. Odredimo k iz podatka za 1910. godinu. Imamo

  $$y(10) = 1650 \cdot e^{k \cdot 10} = 1750.$$

  Ovo povlači $k = \frac{1}{10} \ln \frac{1750}{1650} = 0.005884$. Dakle,

  $$y(t) = 1650 \cdot e^{0.005884 \cdot t}.$$

  Po ovom modelu, imamo da je broj stanovnika 1990. godine trebao biti $y(90) = 1650 \cdot e^{0.005884 \cdot 90} = 2802$, što jako odstupa od stvarnih podataka.
  Ako k odredimo iz podatka za 1950. godinu. Imamo

  $$y(50) = 1650 \cdot e^{k \cdot 50} = 2520.$$

  Ovo povlači $k = \frac{1}{50} \ln \frac{2520}{1650} = 0.00847$ Dakle,

  $$y(t) = 1650 \cdot e^{0.00847 \cdot t}.$$

  Po ovom modelu, imamo da je broj stanovnika 1990. godine trebao biti $y(90) = 1650 \cdot e^{0.00847 \cdot 90} = 3536$, što dosta odstupa od stvarnih podataka, ali je bolje od predhodnog modela.

- Ako odaberemo da je $t_0 = 0$ za 1950. godinu, onda je $y_0 = 2520$, tj. $y(t) = 2520e^{kt}$. Odredimo k iz podatka za 1960. godinu. Imamo

  $$y(10) = 2520 \cdot e^{k \cdot 10} = 3020.$$

  Ovo povlači $k = \frac{1}{10} \ln \frac{3020}{2520} = 0.0181$. Dakle,

  $$y(t) = 2520 \cdot e^{0.0181 \cdot t}.$$

  Po ovom modelu, imamo da je broj stanovnika 1990. godine trebao biti $y(40) = 2520 \cdot e^{0.0181 \cdot 40} = 5198$, što se prilično dobro podudara sa stvarnim podacima. Na osnovi ovog modela broj stanovnika 2010. godine bi trebao biti 7465 milijuna.