Nehomogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima

Promatrajmo diferencijalnu jednadžbu oblika

$$y'' + ay' + by = f(x), \tag{1}$$

gdje su a, b realne konstante, a $f(x)$ funkcija zadana na nekom intervalu (ili uniji intervala). Opće rješenje diferencijalne jednadžbe (nldj) je dano u obliku

$$y = y_h + y_p,$$

gdje je y_h opće rješenje pripadne homogene diferencijalne jednadžbe

$$y'' + ay' + by = 0,$$

a y_p neko partikularno rješenje od nehomogene jednadžbe (1). Kao što smo prije vidjeli, y_h uvijek znamo odrediti (oblik ovisi o karakteru korijena karakteristične jednadžbe), to nam ostaje odrediti neko (bilo koje) partikularno rješenje y_p jednadžbe (1). Postoji više načina za određivanje y_p. Jedan od načina je korištenjem tzv. *Laplaceove transformacije.*

Osnovna ideja: Tražimo partikularno rješenje y_p diferencijalne jednadžbe (1) koje zadovoljava početne uvjete $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$. Koristeći Laplaceovu transformaciju problem traženja partikularnog rješenja y_p svodimo na rješavanje obične algebarske jednadžbe (izbjegnemo derivacije).

Shematski, plan je ovaj:

Početni problem:

$y''+ay'+by = f(t)$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$
$y(t) = ?$

$\overset{?}{\dashrightarrow}$

Rješenje početnog problema:

$y(t) = \varphi(t)$

$\downarrow$ $\mathcal{L}$ - Lap. trans.

$\uparrow$ $\mathcal{L}^{-1}$ - Inverz. Lap. trans.

Preslikani problem:

$\mathcal{L}(y(t)) = Y(p)$, $\mathcal{L}(y'(t)) = pY(p) + ...$
(derivacije se gube, ostaje algebarska jednadžba s jednom nepoz. $Y(p)$)

$\dashrightarrow$

Rješenje preslikanog problema:

$Y(p) = \Phi(p)$.

Laplaceova transformacija

Kod problema matematičke analize, napose kod rješevanja diferencijalnih jednadžbi, teškoće izviru iz operacija deriviranja i integriranja. Da se te teškoće smanje, često se primjenjuje princip funkcionalne transformacije, kod čega funkcijama s kojima baratamo, pridružujemo neke druge funkcije. Ako operacijama deriviranja i integriranja izvršenim na prvotnim funkcijama, odgovaraju neke jednostavnije, algebarske operacije nad transformiranim funkcijama, možemo se nadati, da ćemo pomoću te transformacije olakšati rješavanje danog problema samo ako znamo lako prelaziti iz jednog područja u drugo.
Među funkcionalnim transformacijama naročito je značajna *Laplaceova transformacija.* Budući da će nama Laplaceova transformacija poslužiti samo kao alat, dati ćemo samo osnovnu definiciju, te neka najosnovnija svojstva Laplaceove transformacije, bez ulaženja u puno dublju matematičku pozadinu.

Neka je zadana funkcija $F(t)$ definirana za $t \geq 0$. Tada funkciju

$$f(p) = \int_0^\infty e^{-pt} F(t)\, dt, \quad p \in \mathbb{C},$$

ako ovaj integral konvergira, nazivamo *Laplaceova transformacija od $F(t)$*. Pišemo

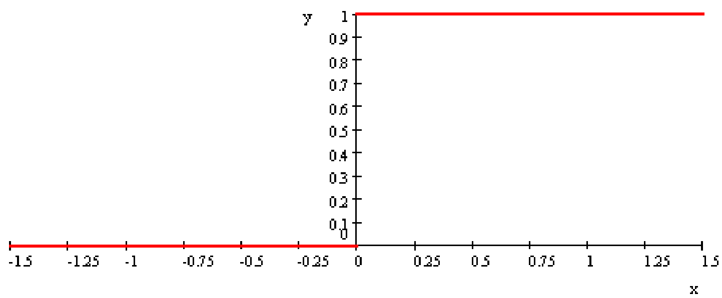
$$\mathcal{L}(F(t)) = f(p) \qquad \text{ili} \qquad F(t) \bigcirc - - - \bullet\, f(p)\,.$$

Tada je $F(t)$ *inverzna Laplaceova transformacija od $f(p)$*. Pišemo

$$\mathcal{L}^{-1}(f(p)) = F(t) \qquad \text{ili} \qquad f(p) \bullet - - - \bigcirc\, F(t)\,.$$

Funkcija $F(t)$ se naziva *original* ili *gornja funkcija*, a $f(p)$ *slika* ili *donja funkcija.*

Napomena: Funkciju $F(t)$ smatramo originalom ako je $F(t) = 0$ za $t < 0$. Dakle, ako je funkcija $F(t) = 1$ original, onda smatramo da je to funkcija

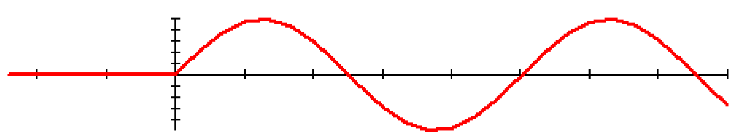


$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

Ovo funkciju obično označavamo sa $S(t)$, tj.

$$S(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

Slično, ako je funkcija $F(t) = \sin t$ original, onda smatramo da je to funkcija



$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \sin t & t \geq 0 \end{cases}$$

Original $F(t) = \sin t$ je ustvari funkcija $F(t) = \sin t \cdot S(t)$.
Dakle, kad govorimo o originalu, smatramo da je to funkcija $F(t) \cdot S(t)$, a pišemo samo $F(t)$.

Primjer 1.18 Odredimo Laplaceovu transformaciju funkcije $S(t) = 1$. Po definiciji imamo

$$
\begin{aligned}
f(p) &= \int_0^\infty e^{-pt}\cdot 1\,dt = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-pt}\,dt = \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)\Big|_0^a \\
&= \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{p}e^{-pa}+\frac{1}{p}e^{0}\right) = \frac{1}{p},
\end{aligned}
$$

tj.

$$
\mathcal{L}(1) = \frac{1}{p} \quad \text{ili} \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) = 1
$$

Slično, može se pokazati

	$F(t)$ - original	$f(p)$ - slika
1.	1	$\frac{1}{p}$
2.	t	$\frac{1}{p^2}$
3.	$t^n,\ n\in\mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}},\ n\in\mathbb{N}$
4.	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$
5.	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
6.	te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
7.	$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
8.	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
9.	$t\sin at$	$\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$
10.	$t\cos at$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
11.	$e^{-at}\sin bt$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$
12.	$e^{-at}\cos bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$

(2)

Svojstva Laplaceove transformacije:

1)

$$
\mathcal{L}(cF(t)) = c\mathcal{L}(F(t)),\ c\in\mathbb{R};
$$

2)

$$\mathcal{L}\left(F_1\left(t\right)+F_2\left(t\right)\right)=\mathcal{L}\left(F_1\left(t\right)\right)+\mathcal{L}(F_2\left(t\right)),\ c_1,c_2\in\mathbb{R};$$

Iz 1) i 2) slijedi

3)

$$\mathcal{L}\left(c_1F_1\left(t\right)+c_2F_2\left(t\right)\right)=c_1\mathcal{L}\left(F_1\left(t\right)\right)+c_2\mathcal{L}(F_2\left(t\right)),\ c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

(linearnost)

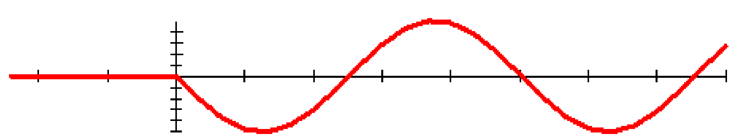
Ako je $\mathcal{L}\left(F\left(t\right)\right)=f\left(p\right)$ onda je:

4)

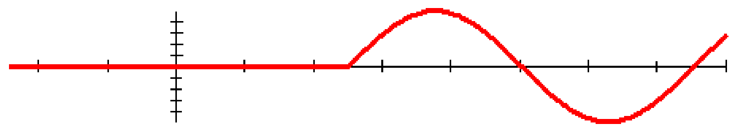
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(F'\left(t\right)\right) &= pf\left(p\right)-F\left(0\right),\\ \mathcal{L}\left(F''\left(t\right)\right) &= p^2f\left(p\right)-pF\left(0\right)-F'\left(0\right);\end{aligned}$$

5) $\mathcal{L}\left(F\left(t-a\right)S\left(t-a\right)\right)=e^{-ap}f\left(p\right),\ a\in\mathbb{R}$ (teorem pomaka).

Uočimo da se originali $F\left(t-a\right)$ i $F\left(t-a\right)S\left(t-a\right)$ razlikuju. Naprimjer, ako je $F\left(t\right)=\sin t$, onda je $F\left(t-\pi\right)=\sin\left(t-\pi\right)S\left(t\right)$, a $F\left(t-\pi\right)S\left(t-\pi\right)=\sin\left(t-\pi\right)S\left(t-\pi\right)$, a to su različite funkcije.



$F\left(t-\pi\right)=\sin\left(t-\pi\right)S\left(t\right)$



$$F(t-\pi) = \sin(t-\pi)\, S(t-\pi)$$

Svojstva inverzne Laplaceove transformacije:

Iz svojstava *Laplaceove transformacije slijedi:*

1') $\mathcal{L}^{-1}(cf(p)) = c\mathcal{L}^{-1}(f(p)), \;\; c \in \mathbb{R};$

2')
$$\mathcal{L}^{-1}(f_1(p) + f_2(p)) = \mathcal{L}^{-1}(f_1(p)) + \mathcal{L}^{-1}(f_2(p));$$

Iz 1') i 2') slijedi

3') $\mathcal{L}^{-1}(c_1 f_1(p) + c_2 f_2(p)) = c_1\mathcal{L}^{-1}(f_1(p)) + c_2\mathcal{L}^{-1}(f_2(p)), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$ (linearnost);

Ako je $\mathcal{L}^{-1}(f(p)) = F(t)$ onda je

5') $\mathcal{L}^{-1}(e^{-ap} f(p)) = F(t-a)\, S(t-a),\ a \in \mathbb{R}.$

Primjer 1.19 Odredite Laplaceovu transformaciju $f(p)$ originala

$$F(t) = 1 + 3t^3 - \sin 3t.$$

Rješenje: Primjenom svojstva Laplaceove transformacije 3) imamo

$$\mathcal{L}(F(t)) = \mathcal{L}\left(1 + 3t^3 - \sin 3t\right) = \mathcal{L}(1) + 3\mathcal{L}\left(t^3\right) - \mathcal{L}(\sin 3t),$$

pa iz tablice (2) slijedi

$$\mathcal{L}(F(t)) = \mathcal{L}(1) + 3\mathcal{L}\left(t^3\right) - \mathcal{L}(\sin 3t) =$$

$$= \frac{1}{p} + 3 \cdot \frac{3!}{p^3} - \frac{3}{p^2 + 3^3} = \frac{1}{p} + \frac{18}{p^3} - \frac{3}{p^2 + 9} = f(p)$$

Primjer 1.20 Odredite inverznu Laplaceovu transformaciju $F(t)$ slike

$$f(p) = \frac{3p^2+4}{p^2(p^2+4)}. \tag{3}$$

<u>*Rješenje*</u>: Budući da u trećem stupcu tablice (2) nema slike oblika (3), (pravu) racionalnu funkciju (3) rastavljamo na parcijalne razlomke. Imamo

$$\frac{3p^2+4}{p^2(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{Cp+D}{p^2+4},$$

što povlači

$$\frac{3p^2+4}{p^2(p^2+4)} = \frac{p^3(A+C)+p^2(B+D)+4Ap+4B}{p^2(p^2+4)}.$$

Dakle, dobivamo sustav

$$\begin{array}{rcl} A+C & = & 0 \\ B+D & = & 3 \\ 4A & = & 0 \\ 4B & = & 4 \end{array},$$

koji ima rješenja $A = C = 0$, $B = 1$, $D = 2$. Sada je

$$\mathcal{L}^{-1}(f(p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3p^2+4}{p^2(p^2+4)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{2}{p^2+4}\right),$$

pa primjenom svojstva 2') inverzne Laplaceove transformacije imamo

$$\mathcal{L}^{-1}(f(p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{p^2+2^2}\right).$$

Sada iz tablice (2) slijedi

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}(f(p)) = t + \sin 2t.$$

Primjer 1.21 Korištenjem Laplaceove transformacije nađite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' + 7y = 0 \tag{4}$$

koje zadovoljava početni uvjet $y(0) = 5$.

Rješenje: Početni problem: tražimo $y = y(t)$ tako da je $y' + 7y = 0$ i $y(0) = 5$. Djelujmo Laplaceovom transformacijom na jednadžbu (4). Imamo

$$\mathcal{L}(y' + 7y) = \mathcal{L}(0) \implies^{1} \mathcal{L}(y') + 7\mathcal{L}(y) = 0.$$

Pretpostavimo da je $\mathcal{L}(y(t)) = Y(p)$. Po svojstvu 4) je onda

$$\mathcal{L}(y') = pY(p) - y(0) = pY(p) - 5.$$

Sada je

$$\underbrace{pY(p) - 5}_{\mathcal{L}(y')} + 7\underbrace{Y(p)}_{\mathcal{L}(y)} = 0, \quad (\underline{\text{preslikani problem}})$$

što povlači

$$Y(p) = \frac{5}{p+7}, \quad (\underline{\text{rješenje preslikanog problema}}).$$

Sada je

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5}{s+7}\right) = 5e^{-7t}, \quad (\underline{\text{rješenje početnog problema}}).$$

Napomena: Rješenje početnog problema u ovom primjeru možemo naći i bez korištenja Laplaceove transformacije. Naime, tu tražimo partikularno rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda.

Pokažimo sada na sljedećem primjeru kako se traži partikularno (i opće) rješenje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima.

Primjer 1.22 Korištenjem Laplaceove transformacije nađite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y'' + y = t \tag{5}$$

koje zadovoljava početne uvjete $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe (5).

[1] Buduci je $\mathcal{L}(0) = \mathcal{L}(0 \cdot F(t))$, za bilo koji original $F(t)$, imamo, po svojstvu 1), $\mathcal{L}(0) = \mathcal{L}(0 \cdot F(t)) = 0 \cdot \mathcal{L}(F(t)) = 0$.

Rješenje: Početni problem: tražimo $y = y(t)$ tako da je $y'' + y = t$ i $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

Djelujmo Laplaceovom transformacijom na jednadžbu (5). Imamo

$$\mathcal{L}(y'' + y) = \mathcal{L}(t) \implies \mathcal{L}(y'') + \mathcal{L}(y) = \frac{1}{p^2}.$$

Pretpostavimo da je $\mathcal{L}(y(t)) = Y(p)$. Po svojstvu 4) je onda

$$\mathcal{L}(y'') = p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - p \cdot 1 - 2.$$

Sada je

$$\underbrace{p^2 Y(p) - p - 2}_{\mathcal{L}(y'')} + \underbrace{Y(p)}_{\mathcal{L}(y)} = \frac{1}{p^2}, \quad (\underline{\text{preslikani problem}})$$

što povlači

$$Y(p) = \frac{p^3 + 2p^2 + 1}{p^2(p^2+1)}, \quad (\underline{\text{rješenje preslikanog problema}}). \tag{6}$$

Rastavimo (6) na parcijalne razlomke

$$\frac{p^3 + 2p^2 + 1}{p^2(p^2+1)} = ... = \frac{1}{p^2} + \frac{p+1}{p^2+1}.$$

Sada je

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{p+1}{p^2+1}\right) =$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) = t + \cos t + \sin t.$$

Nađimo sada opće rješenje jednadžbe (5). Riješimo pripadnu homogenu jednadžbu

$$y'' + y = 0. \tag{7}$$

Njoj pridružena karakterističa nednadžba je $r^2 + 1 = 0$ koja ima korijene $r_{1,2} = 0 \pm i$, pa je opće rješenje diferencijalne jednadžbe (7) dano u obliku

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Sada je opće rješenje diferencijalne jednadžbe (5)

$$\begin{aligned} y\,(t) &= \underbrace{t+\cos t+\sin t}_{y_{p1}} + \underbrace{c_1 \cos x + c_2 \sin x}_{y_h} \\ &= \underbrace{\ t\ }_{y_{p2}} + \underbrace{c_1^* \cos x + c_2^* \sin x}_{y_h}, \quad c_1^* = c_1 + 1,\ \ c_2^* = c_2 + 1. \end{aligned}$$