II. VJEROJATNOST I SATISTIKA

2.1 Vjerojatnost

- Teorija vjerojatnosti kao matematička disciplina razvila se iz matematičke teorije slučajnih događaja, koja opet ima začetke u teoriji igara na sreću.
- Osnivačima teorije vjerojatnosti smatraju se **Pascal i Fermat** (1654)[1].
- Mnogi rezultati teorije vjerojatnosti koriste se u matematičkoj obradi empiričkih podataka (matematička statistika).
- Osnovni pojmovi teorije vjerojatnosti su "slučajni događaj" i "vjerojatnost slučajnog događaja".

Slučajan pokus (**eksperiment**) je pokus čiji **ishod** (**rezultat**) nije jednoznačno određen uvjetima u kojim se izvodi. Rezultate slučajnih pokusa nazivamo **slučajni događaji** (kraće događaji). Budući postoji analogija između događaja i skupova i događaje ćemo označavati velikim slovima: A, B,... .

Primjer 2.1

a) Bacanje novčića je slučajan pokus.

- P: palo "pismo" - slučajni događaj;
- G : pala "glava" - slučajni događaj;

b) Bacanje kocke je slučajan pokus.

- A: pao broj 2 - slučajni događaj;
- B: pao neparan broj - slučajni događaj;

[1] Godine 1654. francuski plemić Chevalier de Méré postavio je pitanje svom prijatelju matematičaru Blaisu Pascalu, koliko puta treba baciti dvije kocke da bi, s vjerojatnošću najmanje $\frac{1}{2}$, mogli tvrditi da ćemo barem jedanput na obje kocke imati isti broj 4. Pascal je ovo pitanje proslijedio matematičaru Pierre de Fermatu. Iz prijepiske i istraživanja Pascala i Fermata, a zahvaljujući raznim kockarskim situacijama, razvila se teorija vjerojatnosti, a godina 1654. se smatra godinom njenog rođenja.

c) Bacanje dvije kocke je slučajan pokus.

- A: na obje kocke pao isti broj - slučajni događaj;
- B: zbroj brojeva na kockama je 7 - slučajni događaj;

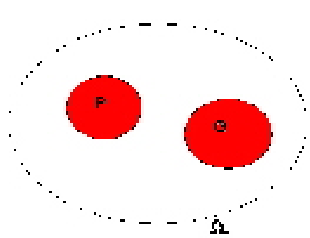
Razlikujemo **složene** (**razložive**) događaje i **elementarne** (**nerazložive**) događaje. Svaki mogući ishod slučajnog pokusa nazivamo **elementarni događaj**. Dva elementarna događaja ne mogu se dogoditi istodobno (analogija s elementima skupa). Skup svih elementarnih događaja nekog pokusa nazivamo **prostor elementarnih događaja** i označavamo sa $\mathbf{\Omega}$. **Složeni događaj** realizira više elementarnih događaja, tj. svaki složeni događaj na jednožnačan način možemo razložiti na elementarne događaje. Za dva događaja kažemo da se **međusobno isključuju** ako se ne mogu istovremeno dogoditi, tj. nemaju ni jednog zajedničkog ishoda (elementarnog događaja koji ih realizira). Dakle, elementarni događaji se međusobno isključuju.

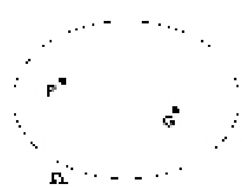
Primjer 2.2

a) Ako je slučajan pokus bacanje novčića, onda su elementarni događaji:

- P: palo "pismo";
- G: pala "glava".

Dakle, prostor elementarnih događaja je $\Omega = \{P, G\}$ ili grafički





ili

b) Ako je slučajan pokus bacanje kocke, onda su elementarni događaji:

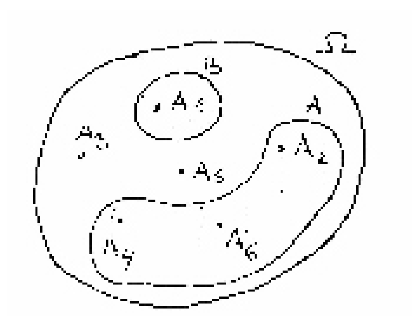
- A_1: pao broj 1;
- A_2: pao broj 2;
- A_3: pao broj 3;
- A_4: pao broj 4;
- A_5: pao broj 5;
- A_6: pao broj 6.

Dakle, prostor elementarnih događaja je $\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$.

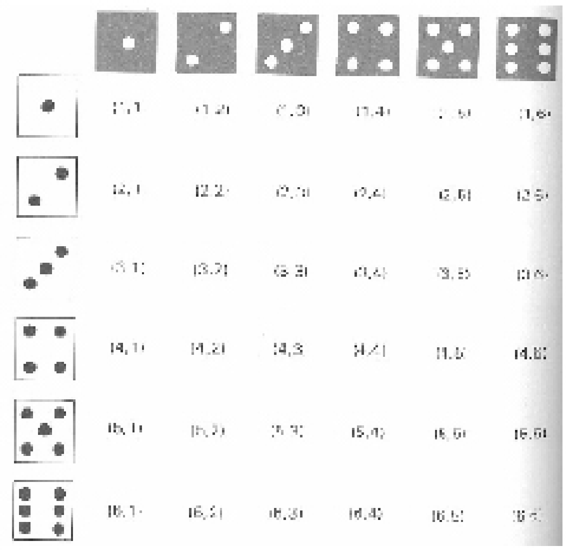
Definirajmo događaje:

- A: pao paran broj;
- B: pao broj manji od 2;

Događaj A realiziraju elementarni događaji A_2, A_4, A_6, a događaj B realizira elementarni događaj A_1. Budući da nema niti jednog zajedničkog elementarnog događaja koji realizira i A i B, oni se međusobno isključuju. Grafički:



c) Ako je slučajan pokus bacanje dvije kocke, onda elementarne događaje možemo opisati na sljedeći način:



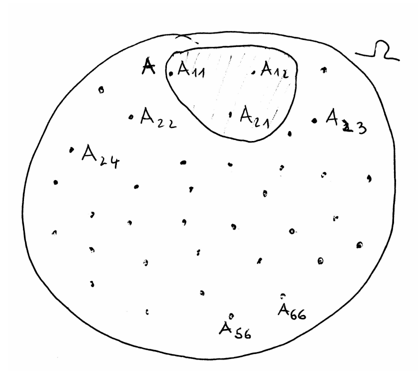
Dakle, imamo 36 elementarnih događaja i to:

- A_{11}: na prvoj kocki 1 i na drugoj kocki 1;
- A_{12}: na prvoj kocki 1 i na drugoj kocki 2;
- A_{13}: na prvoj kocki 1 i na drugoj kocki 3;

  $\vdots$

- A_{56}: na prvoj kocki 5 i na drugoj kocki 6;
- A_{66}: na prvoj kocki 6 i na drugoj kocki 6;

Definirajmo događaj: A: zbroj brojeva na kockama jemanji ili jednak 3. Događaj A realiziraju elementarni događaji A_{11}, A_{12}, A_{21}. Grafički,



Pretpostavimo da je $\Omega = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ skup svih elementarnih događaja (ishoda) nekog pokusa. Pri tome podrazumijevamo da su svi ishodi su jednakomogući (npr. kod bacanja kocke podrazumijevamo da je kocka idealna, da ne padne na brid,...)

Neka je $m(A)$ broj elementarnih događaja koji realiziraju događaj A, tada se **vjerojatnost događaja** A definira kao

$$\mathcal{P}(A) = \frac{m(A)}{n}$$ **Klasična ili Laplaceova definicija vjerojatnosti**

Dakle, to je omjer broja povoljnih ishoda i broja svih mogućih ishoda. Budući je $0 \leq m(A) \leq n$, vrijedi

$$0 \leq \mathcal{P}(A) \leq 1.$$

Ako niti jedan elementaran događaj ne realizira događaj A, tj. ako je $m(A) = 0$ i stoga $\mathcal{P}(A) = 0$, onda A nazivamo **nemoguć događaj**.
Naprotiv, ako je $m(A) = n$, tj. svaki elementaran događaj realizira događaj A i stoga $\mathcal{P}(A) = 1$, onda A nazivamo **siguran događaj.**
Primjer 2.3 Bacamo dvije kocke. Definirajmo događaje:

- A: suma brojeva na kockama je jednaka 1;
- B: suma brojeva na kockama je barem 12;

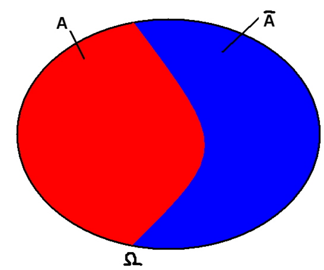
Budući da niti jedan elementaran događaj ne realizira događaj A, onda je A nemoguć događaj, a budući da svi elementarni događaji realiziraju događaj B, onda je siguran događaj.

Vjerojatnost protivnog događaja

Nenastupanje događaja A je opet jedan događaj; taj događaj nazivamo **protivan događaj događaju** A i označavamo $\bar{\mathbf{A}}$ (čitamo "ne A" ili "non A"). Ako je $\mathcal{P}(A) = p$, tada je

$$\mathcal{P}\left(\bar{A}\right) = \frac{n - m(A)}{n} = 1 - \frac{m(A)}{n} = 1 - \mathcal{P}(A) = 1 - p = q,$$

pa vrijedi $p + q = 1$.



Primjer 2.4 Bacamo kocku. Definirajmo događaj A: pao broj manji od 5. Tada je događaj $\bar{A}$: nije pao broj manji od 5, tj. pao broj veći ili jednak 5. Događaj A realiziraju elementarni događaji A_1, A_2, A_3, A_4, pa je $m(A) = 4$. Sada je

$$\mathcal{P}(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \implies \mathcal{P}\left(\bar{A}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ili direktno. Budući da događaj $\bar{A}$ realiziraju elementarni događaji A_5, A_6, onda je $m\left(\bar{A}\right) = 2$. Sada je

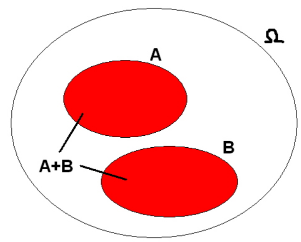
$$\mathcal{P}\left(\bar{A}\right) = \frac{m\left(\bar{A}\right)}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Vjerojatnost nekih složenih događaja

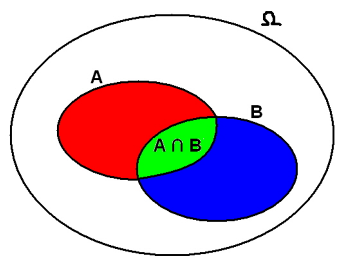
Neka su A i B dva događaja.

1. Ako se A i B međusobno isključuju definiramo novi događaj $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (čita se A ili B) kao događaj koji se realizira ako se realizira A ili ako se realizira B (disjunktna unija) i vrijedi

$$\mathcal{P}(A + B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B).$$



2. Ako se A i B međusobno neisključuju definiramo novi događaj $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ kao događaj koji se realizira ako se realizira A i ako se realizira B (presjek).



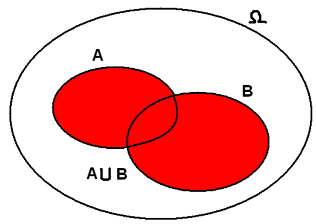
Ako vrijedi

$$\mathcal{P}\left(A \cap B\right) = \mathcal{P}\left(A\right) \cdot \mathcal{P}\left(B\right).$$

kažemo da su događaji A i B **nezavisni**.

3. Ako se A i B međusobno neisključuju definiramo novi događaj $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ (čita se opet A ili B), kao događaj koji se realizira ako se realizira barem jedan od događaja A i B (unija), tj. ako se realizira ili A ili B ili oba. Vrijedi

$$\mathcal{P}\left(A \cup B\right) = \mathcal{P}\left(A\right) + \mathcal{P}\left(B\right) - \mathcal{P}\left(A \cap B\right).$$



Ako su A i B nezavisni događaji onda je:

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B).$$

Primjer 2.5 Bacamo dvije kocke. Definirajmo događaje:

- A: suma brojeva na kockama je najviše 3;
- B: suma brojeva na kockama je djeljiva s 4.

Događaj A realiziraju događaji A_{11}, A_{12}, A_{21}, pa je $m(A) = 3$. Događaj B realiziraju događaji A_{13}, A_{31}, A_{22}, A_{26}, A_{62}, A_{35}, A_{53}, A_{44}, A_{66},pa je $m(B) = 9$. Budući da nema niti jednog zajedničkog elementarnog događaja koji realizira i A i B, oni se međusobno isključuju.

Sada je dobro definiran događaj $A + B$: suma brojeva na kockama je najviše 3 ili je djeljiva s 4 i vrijedi

$$\mathcal{P}(A + B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) = \frac{m(A)}{n} + \frac{m(B)}{n} = \frac{3}{36} + \frac{9}{36} = \frac{1}{3}.$$

Primjer 2.6 Bacamo kocku. Definirajmo događaje

- A : pao paran broj;
- B : pao broj djeljiv s 3.

Događaj A realiziraju elementarni događaji A_2, A_4, A_6, pa je $m(A) = 3$. Sada je

$$\mathcal{P}(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Događaj B realiziraju elementarni događaji A_3, A_6, pa je $m(A) = 2$. Sada je

$$\mathcal{P}(B) = \frac{m(B)}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Budući da je A_6 elementarni događaj koji realizira i A i B, oni se neisključuju. Sada su dobro definirani događaji

- $A \cap B$: pao paran broj i broj djeljiv s 3
- $A \cup B$: pao paran broj ili broj djeljiv s 3

Događaj $A \cap B$ realizira elementarni događaj A_6, pa je $m(A \cap B) = 1$. Sada je

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \frac{m(A \cap B)}{n} = \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

Dakle, vrijedi

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B),$$

pa su A i B nezavisni.
Sada je vjerojatnost

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

Ili direktno. Budući da događaj $A \cup B$ realiziraju elementarni događaji A_2, A_3, A_4, A_6 onda je $m(A \cup B) = 4$. Sada je

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \frac{m(A \cup B)}{n} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Statistička definicija vjerojatnosti

U klasičnoj definiciji vjerojatnosti, vjerojatnost nekog događaja A ($\mathcal{P}(A) = \frac{m(A)}{n}$) je moguće odrediti i prije izvođenja pokusa (**vjerojatnost a priori -** "prije iskustva").

Statistička definicija vjerojatnosti se zasniva na ispitivanju rezultata velikog broja pokusa.

Promatramo niz od n pokusa, koji se svi vrše pod jednakim uvjetima i u svakom od njih se može pojaviti događaj A.Ako se, u nizu od n pokusa, događaj A pojavio m puta, onda je **relativna frekvencija** pojavljivanja događaja A

$$p_r = \frac{m}{n}.$$

Ako ovo ponavljamo, i to tako da svaki put uzimamo veći broj pokusa n_i, dobivamo niz

$$\frac{m_1}{n_1}, \ \frac{m_2}{n_2}, \ \frac{m_3}{n_3}, ... \qquad n_1 < n_2 < n_3 < \ ... \ .$$

Ako se relativne frekvencije $p_{r_i} = \frac{m_i}{n_i}$ grupiraju oko nekog realnog broja p (tj. $\frac{m_i}{n_i} \longrightarrow p, \ \ 0 \leq p \leq 1$), definiramo **statističku vjerojatnost događaja** A kao

$$\mathcal{P}(A) = p.$$

Ova vjerojatnost se još naziva **vjerojatnost a posteriori** ("nakon iskustva")**.**

Primjer 2.7 Bacamo novčić. Tražimo vjerojatnost događaja A : palo pismo.

Klasična vjerojatnost: $\quad \mathcal{P}(A) = \frac{1}{2} \quad (A-$ elementarni događaj).

Statistička vjerojatnost:

i.	Br. bacanja n_i	Br. pisama m_i	Rel. frek. $p_{ri} = \frac{m_i}{n_i}$
1.	10	4	0.4
2.	100	52	0.52
3.	500	245	0.49
4.	1000	509	0.509
5.	10000	4989	0.498 9

Budući $\frac{m_i}{n_i} \longrightarrow 0.5 = \frac{1}{2}$, definiramo

$$\mathcal{P}(A) = \frac{1}{2}.$$

Zadatak Kako bi odredili koliko posto nespravnih proizvoda daje neki stroj, ili ekvivalentno, kako bi odredili kolika je vjerojatnost da je proizvod koji je proizveo taj stroj neispravan? (Uputa: koristiti statističku definiciju vjerojatnosti).