# 2.3 Slučajne varijable

Statistički podaci imaju "slučajan karakter", tj. distriburani su po određenoj (statističkoj) zakonitosti. Za matematičko (apstraktno) opisivanje tih zakonitosti potrebno je definirati slučajnu varijablu kojoj pripada određena razdioba vjerojatnosti. Slučajna varijabla je matematički model za statističko obilježje. Razlikujemo:

- diskretne slučajne varijable;
- kontinuirane slučajne varijable.

## Diskretna slučajna varijabla

**Diskretna (ili diskontinuirana) slučajna varijabla** $X$ je varijabla (promjenjiva veličina) koja poprima (konačan ili beskonačan) niz vrijednosti $x_1$, $x_2$, ... $x_n$, ... s vjerojatnostima $p(x_1)$, $p(x_2)$, ... $p(x_n)$, ... tako da je

$$p(x_1) + p(x_2) + ... + p(x_n) + ... = \sum_{i=1} p(x_i) = 1.$$

Dakle, diskretna slučajna varijabla $X$ je zadana sa:

- $R(X) = \{x_1, x_2, ...x_n, ...\}$ (skup svih vrijednosti koje $X$ može poprimiti);
- $\{p(x_i) : i = 1, 2, ...\}$ (skup tim vrijednostima pripadnih vjerojatnosti).

Kraće, diskretna slučajna varijabla $X$ je zadana skupom

$$\{x_i,\ p(x_i)\}, \quad i = 1, 2, ...$$

koji se naziva **razdioba (distribucija) vjerojatnosti** diskretne slučajne varijable $X$. Funkciju $p : x_i \longrightarrow p(x_i)$ nazivamo **zakon vjerojatnosti**. Razdiobu obično zadajemo tablično

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & ... & p(x_n) \end{pmatrix}$$

ili

$$X : \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & ... & x_n \\ \hline p(x_1) & p(x_2) & ... & p(x_n) \end{array}$$

Razdiobu možemo zadati i grafički (analogno crtanju pologona relativnih frekvencija).

Funkciju $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$,

$$F(x) = \sum_{x_i \le x} p(x_i) = \mathcal{P}\{X \le x\}$$

nazivamo **funkcija distribucije diskretne slučajne varijable** $X$. Vrijedi:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0;$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1;$
- $x_1 < x_2 \Longrightarrow F(x_1) \le F(x_2)$.

**Numeričke karakteristike diskretne slučajne varijable**

Prije smo imali (za diskretno statističko obilježje)

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} a_j f_j = \sum_{j=1}^{r} a_j \frac{f_j}{n} = \sum_{j=1}^{r} a_j r_j,$$

sada, za diskretnu slučajnu varijablu zadanu s $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \\ p_1 & p_2 & ... & p_n \end{pmatrix}$, definiramo

$$\mu = E[X] = \sum_{j=1}^{n} x_j p_j,$$

kao **matematičko očekivanje** ili **nadu**.

Napomena: ako je $R(X) = \{x_1, x_2, ...x_n, ...\}$ beskonačan skup $E[X]$ može biti i $\infty$.

Usporedimo:

| **Statistika** | | **Vjerojatnost** |
|---|---|---|
| Diskretno statističko obilježje | $\longrightarrow$ | Diskretna slučajna varijabla |
| Razdioba relativnih frekvencija | $\longrightarrow$ | Razdioba vjerojatnosti |
| Aritmetička sredina | $\longrightarrow$ | Matematičko očekivanje |

**Varijanca** ili **disperzija** se definira formulom

$$V[X] = D[X] = \sum_{j=1}^{n} (x_j - E[X])^2 p_j,$$

tj.

$$V[X] = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 p_j - (E[X])^2 .$$

**Standardna devijacija** ili **standardno odstupanje** se definira kao

$$\sigma = \sqrt{V[X]}.$$

**Primjer 2.14** Neka je diskretna slučajna varijabla $X$ zadana s

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 12 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Odredimo $E[X]$, $V[X]$ i $\sigma$.

Uočimo da je gornjom tablicom dobro zadana diskretna slučajna varijabla jer je

$$p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) + p(x_4) = 0.1 + 0.4 + 0.2 + 0.3 = 1.$$

Imamo

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{j=1}^{4} x_j p_j = 1 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.4 + 8 \cdot 0.2 + 12 \cdot 0.3 = 6.5 \\ V[X] &= \sum_{j=1}^{4} x_j^2 p_j - (E[X])^2 = \\ &= 1^2 \cdot 0.1 + 2^2 \cdot 0.4 + 8^2 \cdot 0.2 + 12^2 \cdot 0.3 - (6.5)^2 = 15.45 \\ \sigma &= \sqrt{V[X]} = \sqrt{15.45} = 3.9306. \end{aligned}$$

**Binomna (Bernoullijeva) razdioba**

Promatramo niz (seriju) od $n$ pokusa, takvih da se u svakom pokusu može pojaviti događaj $A$ s vjerojatnošću $p$ ili njegov protivni događaj $\bar{A}$ s vjerojatnošću $q = 1 - p$. Pretpostavljamo da se pokusi ponavljaju pod idealno jednakim uvjeima, pa je vjerojatnost da se dogodi događaj $A$ stalna i jednaka $p$. Događaj $A$ nazivamo **Bernoullijev događaj**.

Rezultati ovih $n$ pokusa mogu se predočiti nizovima kao što je

$$\underbrace{A,\ \bar{A},\ \bar{A},\ A,\ ...,\ A,\ \bar{A}}_{n}.$$

Neka je (diskretna) slučajna varijabla $X$ broj pojavljivanja događaja $A$ u nizu od $n$ pokusa. Sada je

$$R(X) = \{0, 1, 2, ..., n\}. \tag{1}$$

Vjerojatnost da se $A$ pojavi $x$ puta u seriji od $n$ pokusa je

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \qquad \text{(zakon vjerojatnosti)}. \tag{2}$$

Budući je

$$\sum_{x=0}^{n} p(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \stackrel{B.t.}{=} (p+q)^n = 1,$$

slučajna varijabla $X$ je dobro definirana i ima tzv. **Binomnu (Bernoulli-jevu) razdiobu.** Ona je potpuno određena parametrima $n$ i $p$. Pišemo

$$X : B(n,p).$$

Specijalno vrijedi:

1. Vjerojatnost da se $A$ neće pojaviti je

$$p(0) = \binom{n}{0} p^0 q^{n-0} = q^n$$

2. Vjerojatnost da se $A$ pojavi $n$ puta je

$$p(n) = \binom{n}{n} p^n q^{n-n} = p^n$$

3. Vjerojatnost da se $A$ pojavi barem jednom je

$$\sum_{x=1}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = 1 - p(0) = 1 - q^n$$

Vrijedi rekurzivna formula

$$p(x) = \frac{n-x+1}{x} \cdot \frac{p}{q} \cdot p(x-1), \quad x = 1, 2, ...., \quad p(0) = q^n.$$

Za $X : B(n,p)$ vrijedi

$$E[X] = \sum_{x=0}^{n} x \cdot p(x) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = np \qquad \text{(očekivanje)}$$

$$V[X] = npq \qquad \text{(varijanca)}$$

**Primjer 2.15** Diskretna slučajna varijabla ima Binomnu razdiobu $X : B(5,\ 0.2)$. Odredimo: $\mathcal{P}\{X=0\}$, $\mathcal{P}\{X=1\}$, $\mathcal{P}\{X=5\}$, $\mathcal{P}\{X\geq 2\}$, $E[X]$, $V[X]$.

Rješenje Imamo $n=5$, $p=0.2$, pa je $q=1-p=0.8$. Dakle,

$$R(X)=\{0,1,2,3,4,5\} \quad \text{i } p(x)=\binom{5}{x}(0.2)^x(0.8)^{5-x}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} E[X] &= np = 5\cdot 0.2 = 1; \\ V[X] &= npq = 5\cdot 0.2\cdot 0.8 = 0.8. \end{aligned}$$

Tražene vjerojatnosti možemo, u ovom slučaju, odrediti na tri načina:

1. I način (direktno)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\{X=0\} &= p(0)=\binom{5}{0}(0.2)^0(0.8)^{5-0}=(0.8)^5=0.327\,68 \\ \mathcal{P}\{X=1\} &= p(1)=\binom{5}{1}(0.2)^1(0.8)^{5-1}=5\cdot 0.2\cdot 0.8^4=0.409\,6 \\ \mathcal{P}\{X=5\} &= p(5)=\binom{5}{5}(0.2)^5(0.8)^{5-5}=(0.2)^5=0.000\,32 \\ \mathcal{P}\{X\geq 2\} &= 1-\mathcal{P}\{X<2\}=1-[p(0)+p(1)]= \\ &= 1-(0.327\,68+0.409\,6)=0.262\,72 \end{aligned}$$

2. II način (pomoću tablica) $\quad n=5,\ p=0.2,\ p(0)=0.3277, ...$

3. III način (koristeći rekurzivnu formulu). Vrijedi

$$p(x)=\frac{n-x+1}{x}\cdot\frac{p}{q}\cdot p(x-1)=\frac{5-x+1}{x}\cdot\frac{0.2}{0.8}\cdot p(x-1), \qquad \text{i}$$

$$p(0)=q^n=(0.8)^5=0.3277.$$

   Sada je $p(1)=\frac{5}{1}\cdot 0.25\cdot 0.3277=0.409\,6$, $\ p(2)=\frac{4}{2}\cdot 0.25\cdot 0.409\,6=0.2048, ...$, tj.

| $x$ | $\frac{n-x+1}{x}$ | $\frac{p}{q}$ | $p(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $-$ | 0.25 | 0.3277 |
| 1 | $\frac{5}{1}$ | 0.25 | 0.409 6 |
| 2 | $\frac{4}{2}$ | 0.25 | 0.2048 |
| 3 | $\frac{3}{3}$ | 0.25 | 0.0512 |
| 4 | $\frac{2}{4}$ | 0.25 | 0.0064 |
| 5 | $\frac{1}{5}$ | 0.25 | 0.0003 |

**Primjer 2.16** Bacamo kocku 7 puta.

a) Kolika je vjerojatnost da je broj 5 pao točno jednom?

b) Kolika je vjerojatnost da je broj 5 najviše 2 puta?

c) Kolika je vjerojatnost da je broj 5 pao barem 2 puta?

Rješenje: Definirajmo događaj $A$ : pao broj 5 (u jednom bacanju). Onda je $\bar{A}$ : nije pao broj 5 (u jednom bacanju). Sada, sedam bacanja kocke možemo opisati nizom kao

$$A\bar{A}\bar{A}\bar{A}A\bar{A}\bar{A}.$$

Definirajmo slučajnu varijablu $X$ : broj pojavljivanja broja 5 u 7 bacanja. Onda je $X : B\left(7,\ \frac{1}{6}\right)$. Budući je $n = 7,\ \ p = \frac{1}{6}$ i $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ imamo

a) $\mathcal{P}\left\{X = 1\right\} = p(1) = \binom{7}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{7-1} = 0.390\,71$

b) $\mathcal{P}\left\{X \leq 2\right\} = p(0) + p(1) + p(2) = \left(\frac{5}{6}\right)^7 + 0.390\,71 + \binom{7}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{7-2} = 0.904\,22$

c) $\mathcal{P}\left\{X \geq 2\right\} = 1 - \mathcal{P}\left\{X < 2\right\} = 1 - (p(0) + p(1)) = 1 - \left(\left(\frac{5}{6}\right)^7 + 0.390\,71\right) = 0.330\,21.$

**Poissonova razdioba**

Do Poissonove razdiobe razdiobe dolazimo graničnim prijelazom na Binomnoj razdiobi, ako pustimo da $n$ raste u beskonačnost uz uvjet da produkt $np$ ostane konstantan. Uz ove uvjete može se pokazati da je

$$\lim_{\substack{n\longrightarrow\infty \\ np=con.}} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{m^x}{x!} e^{-m},$$

gdje je $m = np$.
Dakle, razdiobu diskretne slučajne varijable $X$ za koju je

$$R(X) = \{0, 1, 2, 3, ...\}.$$

a zakon vjerojatnosti je dan sa

$$p(x) = \frac{m^x}{x!} e^{-m}$$

nazivamo **Poissonova razdioba** i pišemo $X : P_m$. Može se pokazati da je

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{m^x}{x!} e^{-m} = m \qquad \text{(očekivanje)}$$

$$V[X] = m \qquad \text{(varijanca)}$$

Vrijedi i rekurzivna formula

$$p(x) = \frac{m}{x} p(x-1), \quad x = 1, 2, ...., \quad p(0) = e^{-m}.$$

**Primjer 2.17** Diskretna slučajna varijabla ima Poissonovu razdiobu s parametrom $m = 2$. Odredite vjerojatnosti koje pripadaju vrijednostima $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Rješenje: Tražene vjerojatnosti možemo, u ovom slučaju, odrediti na tri načina:

1. <u>I način</u> (direktno)

$$\begin{aligned}
p(0) &= \frac{2^0}{0!}e^{-2} = e^{-2} = 0.135\,34 \\
p(1) &= \frac{2^1}{1!}e^{-2} = 2e^{-2} = 0.270\,67 \\
p(2) &= \frac{2^2}{2!}e^{-2} = 2e^{-2} = 0.270\,67 \\
p(3) &= \frac{2^3}{3!}e^{-2} = \frac{8}{6}e^{-2} = 0.180\,45 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

2. <u>II način</u> (pomoću tablica) $m = 2$, $p(0) = 0.135\,34, p(1) = 0.270\,67, ....$

3. <u>III način</u> (koristeći rekurzivnu formulu). Vrijedi

$$p(x) = \frac{m}{x} \cdot p(x-1) = \frac{2}{x} \cdot p(x-1), \qquad \text{i}$$

$$p(0) = e^{-m} = e^{-2} = 0.135\,34.$$

Sada je $p(1) = \frac{2}{1} \cdot p(0) = 2 \cdot\ 0.135\,34 = 0.270\,68$, $p(2) = \frac{2}{2} \cdot p(1) = 0.270\,67, ...,$ tj.

| $x$ | $\frac{m}{x}$ | $p(x)$ |
|---|---|---|
| 0 | $-$ | 0.135 34 |
| 1 | $\frac{2}{1}$ | 0.270 67 |
| 2 | $\frac{2}{2}$ | 0.270 67 |
| 3 | $\frac{2}{3}$ | 0.180 45 |
| 4 | $\frac{2}{4}$ | 0.090225 |
| 5 | $\frac{2}{5}$ | 0.036 09 |
| 6 | $\frac{2}{6}$ | 0.012 03 |
| 7 | $\frac{2}{7}$ | 0.003437 |

**Aproksimacija Binomne razdiobe Poissonovom**

Ako je $X : B(n, p)$ i $p < 0.1$, $n > 50$ i $np < 5$ onda možemo aproksimirati

$$B(n, p) \sim P_{np}$$

tj. možemo uzesti da je $X : P_{np}$.

**Primjer 2.18** Proizvodi jedne velike serije, koja sadrži 0.7% škarta, pakiraju se u kutije po 100 komada. Koliki će postotak kutija biti bez ijednog škarta, a koliki s barem dva škarta?

Rješenje: Uočimo da je tražiti postotak kutija sa $x$ proizvoda koji su škart ekvivalentno kao tražiti vjerojatnost da u nasumice odabranoj kutiji bude $x$ proizvoda koji su škart.
Definirajmo događaj $A$ : proizvod (u kutiji) je škart. Onda je $\bar{A}$ : proizvod (u kutiji) nije škart. Sada, sadržaj kutije možemo opisati nizom kao

$$\underbrace{A,\ \bar{A},\ \bar{A},\ A,\ ...,\ A,\ \bar{A}}_{100}$$

Imamo $\mathcal{P}(A) = p = 0.007$. Definirajmo slučajnu varijablu $X$ : broj proizvoda u kutiji koji su škart. Onda je $X : B(100,\ 0.007)$. Budući je $n = 100$, $p = 0.007$ i $q = 1 - 0.007 = 0.993$, onda je vjerojatnost da u kutiji nema škarta jednaka

$$\mathcal{P}_B\{X = 0\} = q^n = (0.993)^{100} = 0.495\,36,$$

a vjerojatnost da u kutiji budu barem dva proizvioda škart jednaka

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_B\{X \geq 2\} &= 1 - \mathcal{P}_B\{X < 2\} = 1 - \mathcal{P}_B\{X \leq 1\} = 1 - [p(0) + p(1)] \\ &= 1 - \left(0.495\,36 + \binom{100}{1}(0.007)^1(0.993)^{100-1}\right) = 0.155\,44 \end{aligned}$$

Ove vjerojatnosti (lakše) možemo (približno) računati na sljedeći način. Aproksimirajmo Binomnu razdiobu Poissonovom. Aproksimacija će biti dobra jer je

$$n = 100 > 50, \quad p = 0.007 < 0.1 \ \text{ i } \ np = 0.7 < 5.$$

Dakle,

$$B(100, 0.007) \sim P_{0.7}.$$

Sada je:

1. $\mathcal{P}_B\{X=0\} \approx \mathcal{P}_P\{X=0\} = \frac{(0.7)^0}{0!}e^{-0.7} = 0.496\,59;$

2. $\mathcal{P}_B\{X \geq 2\} \approx \mathcal{P}_P\{X \geq 2\} = 1 - \mathcal{P}_P\{X < 2\} = 1 - \mathcal{P}_P\{X \leq 1\} = 1 - (\mathcal{P}_P\{X=0\} + \mathcal{P}_P\{X=1\}) = 1 - \left(0.496\,59 + \frac{(0.7)^1}{1!}e^{-0.7}\right) = 0.155\,8.$

Dakle, približno 49.5% kutija će biti bez ijednog škarta, a s barem dva škarta približno 15.5% kutija.

## Kontinuirana slučajna varijabla

Kontinuirana slučajna varijabla $X$, za razliku od diskretne, može poprimiti svaku vrijednost iz nekog intervala (često i čitavog skupa $\mathbb{R}$). Kod diskretne slučajne varijable smo vjerojatnost pridruživali točkama, dok ćemo kod kontinuirane slučajne varijable vjerojatnost pridruživati intervalima, dok će točkama pripada vjerojatnost 0.
Pretpostavimo da je čitav brojevni pravac $\mathbb{R}$ područje mogućih vrijednosti kontinuirane slučajne varijable $X$, a $(x_1, x_2)$ bilo koji interval na brojevnom pravcu. Vjerojatnost $\mathcal{P}\{x_1 < X < x_2\}$ koja pripada intervalu $(x_1, x_2)$ definirat ćemo pomoću funkcije $f(x)$, dane sljedećom definicijom.

**Definicija Funkcija gustoće vjerojatnosti** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinuirane slučajne varijable $X$ je funkcija sa svojstvima

1. $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$;

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1;$

3. $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \mathcal{P}\{x_1 < X < x_2\}.$

Napomena: Geometrijska interpretacija svojstava funkcije gustoće:

1. Graf funkcije $f$ se nalazi iznad osi $x$;
2. Površina između krivulje $y = f(x)$ i osi $x$ je jednaka 1;
3. $\mathcal{P}\{x_1 < X < x_2\}$ je jednaka površini ispod krivulje $y = f(x)$ između $x_1$ i $x_2$. Uočimo da je i iz geometrijskih razloga očito da je

$$\mathcal{P}\{x_1 < X < x_2\} = \mathcal{P}\{x_1 \leq X < x_2\} = \mathcal{P}\{x_1 < X \leq x_2\} = \mathcal{P}\{x_1 \leq X \leq x_2\}.$$

Ako područje vrijednosti kontinuirane slučajne varijable $X$ nije čitav skup $\mathbb{R}$, nego samo jedan njegov dio, npr. interval $[a, b]$, onda pretpostavljamo da je $f(x) = 0$ za isve vrijednosti od $X$ izvan tog intervala, tj.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx = 1$$

**Primjer 2.19** Odredite konstantu $c$ tako da funkcija $f(x) = cx$ bude funkcija gustoće vjerojatnosti kontinuirane slučajne varijable $X$ koja poprima vrijednosti iz intervala $[0, 4]$. S kolikom vjerojatnošću $X$ poprima vrijednosti iz intervala $(1, 3)$?

Rješenje Imamo

$$f(x) = \begin{cases} cx, & x \in [0,4] \\ 0, & \textit{inače} \end{cases}.$$

Mora vrijediti

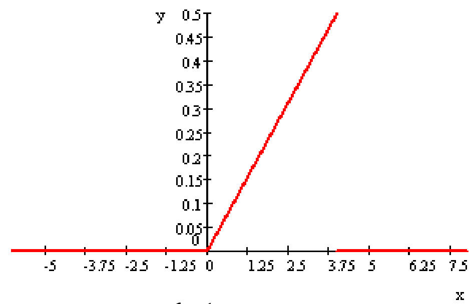
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Ovo povlači

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{4} cxdx + \int_{4}^{+\infty} 0dx =$$

$$= 0 + c\int_{0}^{4} xdx + 0 = c\frac{x^2}{2}\,\Big|_0^4 = 8c = 1 \implies c = \frac{1}{8}.$$

Dakle,



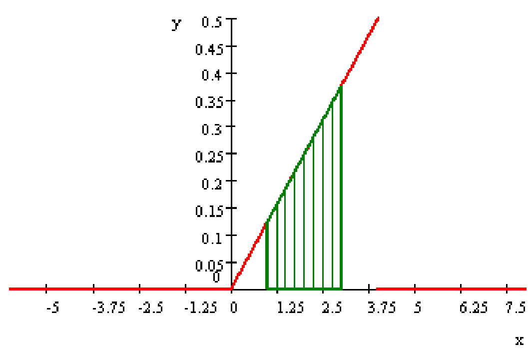

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x, & x \in [0,4] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Sada je

$$\mathcal{P}\{1 < X < 3\} = \int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 \frac{1}{8}x dx = \frac{1}{2}$$

Vrijedi

$$\mathcal{P}\{1 < X < 3\} = \mathcal{P}\{1 \le X < 3\} = \mathcal{P}\{1 < X \le 3\} = \mathcal{P}\{1 \le X \le 3\} = \frac{1}{2}.$$




$\mathcal{P}\{1 < X < 3\}$

**Definicija** Funkciju
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$
nazivamo **funkcija razdiobe** ili **funkcija distribucije** vjerojatnosti kontinuirane slučajne varijable $X$, gdje je $f(x)$ funkcija gustoće vjerojatnosti od $X$.

Napomena: Vrijedi
$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\{X < x\} &= F(x), \\
\mathcal{P}\{x_1 < X < x_2\} &= F(x_2) - F(x_1) \\
\mathcal{P}\{X > x\} &= 1 - F(x)
\end{aligned}$$

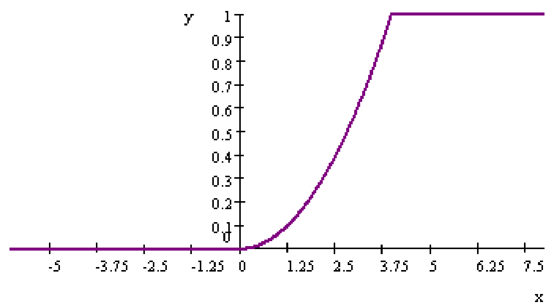
**Primjer 2.20** Nađite funkciju distribucije vjerojatnosti kontinuirane slučajne varijable $X$ ako je
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x, & x \in [0,4] \\ 0, & \textit{inače} \end{cases}.$$

Nadalje, nađite $\mathcal{P}\{X < 2\}$, $\mathcal{P}\{1 < X \leq 3\}$ i $\mathcal{P}\{X > 3\}$.
Za $x < 0$ imamo
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0.$$

Za $0 \leq x \leq 4$ imamo
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} \frac{1}{8}xdx = 0 + \frac{1}{8}\frac{x^2}{2}\,|_0^x = \frac{x^2}{16},$$

te za $4 < x$
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{4} \frac{1}{8}xdx + \int_{4}^{x} 0dx = 1.$$

Dakle,




$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{16}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 1, & 4 < x \end{cases}$$

Sada je

$$\mathcal{P}\{X < 2\} = F(2) = \frac{1}{16} \cdot 2^2 = \frac{1}{4},$$

$$\mathcal{P}\{1 < X \leq 3\} = F(3) - F(1) = \frac{1}{16} \cdot 3^2 - \frac{1}{16} \cdot 1^2 = \frac{1}{2},$$

$$\mathcal{P}\{X > 3\} = 1 - \mathcal{P}\{X < 3\} = 1 - F(3) = 1 - \frac{1}{16} \cdot 3^2 = \frac{7}{16}.$$

## Očekivanje i varijanca

Za kontinuiranu slučajnu varijablu $X$ **očekivanje** je

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx,$$

**varijanca** ili **disperzija**

$$D[X] = V[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x)\, dx,$$

te **standardna devijacija**

$$\sigma = \sqrt{V[X]}.$$

**Primjer 2.21** Nađite očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju kontinuirane slučajne varijable $X$ ako je funkcija gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x, & x \in [0,4] \\ 0, & inače \end{cases}$$

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{4} x \cdot \frac{1}{8} x \cdot dx + \int_{4}^{+\infty} 0 \cdot dx = 0 + \frac{1}{8} \cdot \frac{x^3}{3} \mid_0^4 + 0 = \frac{8}{3}$$

$$D[X] = V[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx = \int_{0}^{4} \left(x - \frac{8}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{8} x \cdot dx = \ ... \ = \frac{8}{9}$$

$$\sigma = \sqrt{V[X]} = \sqrt{\frac{8}{9}} = 0.942\,81$$