Matematika 1

1. **Osnove matematike**
2. **Realne funkcije realne varijable**
3. **Derivacije i primjene**
4. **Nizovi i redovi**
5. **Linearna algebra**
6. **Vektorska algebra**
7. **Analitička geometrija**

Literatura:

- Slapničar, I.: *Matematika I*, Sveučilište u Splitu, Split, 2002.
- Pilot projekt *"Matematika 1"*, http://www.fesb.hr/mat1, FESB, Split, 1998.-2002.
- Slapničar, I.; Krešić-Jurić, S.; Barić, J.; Matić, M.: *Matematika 1 – vježbe*, FESB, Split, 2002.

- Javor, P.: *Matematička analiza 1*, Element, Zagreb, 1999.
- Elezović, N.: *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 2001.
- Elezović, N. ; Aglić, A.: *Linearna algebra – zbirka zadataka*, Element, Zagreb.
- Krnić, L. ; Šikić, Z.: *Račun diferencijalni i integralni*, I. Dio, Školska knjiga, Zagreb, 1993.
- Pavasović S.; Radelja, T.; Banić, S.; Milišić, P.: *Matematika – riješeni zadaci*, Građevinski fakultet, Split, 1999.
- Demidovič, B. P.: *Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1980.

Obveze:

- predavanja ($\geq 70\%$)
- vježbe ($\geq 70\%$)

Provjere znanja:

- *tri kolokvija (parcijalna ispita):*

- sva tri pozitivna
- zadaci ($\geq 50\%$) i teoretska pitanja ($\geq 50\%$)
- pismeni i usmeni.

- *završni ispit:*

- zadaci ($\geq 50\%$) i teoretska pitanja ($\geq 50\%$)

1. SKUPOVI BROJEVA

1.1. Prirodni brojevi

- prvi pojam broja (izražavanje količine elemenata nekog skupa)

Skup prirodnih brojeva uzimamo kao osnovni skup, a označavamo ga sa

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\} .$$

Operacije zbrajanja i množenja u skupu $\mathbb{N}$ su uvijek izvedive, tj.

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) \quad m + n \in \mathbb{N}$$

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) \quad m \cdot n \in \mathbb{N}$$

Za svaki $m, n, r \in \mathbb{N}$ vrijede sljedeća svojstva:

i) *komutativnost*

$$m + n = n + m \qquad m \cdot n = n \cdot m$$

ii) *asocijativnost*

$$(m + n) + r = m + (n + r) \qquad (m \cdot n) \cdot r = m \cdot (n \cdot r)$$

iii) *distributivnost*

$$(m + n) \cdot r = m \cdot r + n \cdot r \qquad r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n$$

Neka su $m, n \in \mathbb{N}$.

Kažemo da je *m manji od n* i pišemo $m < n$ ako i samo ako postoji $p \in \mathbb{N}$ tako da je

$$m + p = n.$$

Kažemo da je *m manji ili jednak n* i pišemo $m \leq n$ ako i samo ako je

$$m < n \ \vee \ m = n.$$

Neka svojstva:

- $(\mathbb{N}, \leq)$ je *(potpuno) uređen skup*.
- $(\mathbb{N}, \leq)$ je *diskretno uređen skup*, tj. za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\{p \in \mathbb{N} \mid n < p < n+1\} = \emptyset.$$

• Za skup X kažemo da je *prebrojiv* ili *prebrojivo beskonačan* ako je ekvipotentan sa $\mathbb{N}$.
Pišemo $cardX = \aleph_0$ (alef nula).

Za skup X kažemo da *ima n elemenata* ako je ekvipotentan sa skupom $\{1, 2, 3, ...n\}$.
Pišemo $cardX = n$.

Neka su $m, n \in \mathbb{N}$.

Kažemo da je m *manji od* n i pišemo $m < n$ ako i samo ako postoji $p \in \mathbb{N}$ tako da je

$$m + p = n.$$

Kažemo da je m *manji ili jednak* n i pišemo $m \leq n$ ako i samo ako je

$$m < n \ \vee \ m = n.$$

Napomena: Skup $\mathbb{N}$ je na jedinstven način definiran tzv. Peanovim aksiomima P1. - P4.

Aksiom P4., kojeg još nazivamo princip matematičke indukcije, glasi:

Ako je $M \subseteq \mathbb{N}$ i ako vrijedi:

i) $1 \in M$,

ii) $n \in M \Longrightarrow n + 1 \in M$

tada je $M = \mathbb{N}$.

Aksiom P4. koristimo za dokazivanje raznih tvrdnji.

Primjer: Treba pokazati da formula

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (F)$$

vrijedi za svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$.

<u>Dokaz:</u>
Neka je $M \subseteq \mathbb{N}$ skup svih prirodnih brojeva za koje formula (F) vrijedi. Treba (pomoću P4.) dokazati da je $M = \mathbb{N}$.

<u>*Baza indukcije.*</u> (Dokazujemo da je $1 \in M$)

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

<u>*Pretpostavka indukcije.*</u> (Pretpostavimo da je $n \in M$)

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + ... + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

<u>*Korak indukcije.*</u> (Pokazujemo da je $n+1 \in M$)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i &= 1 + 2 + ... + n + (n+1) \overset{P.I.}{=} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}
\end{aligned}$$

Binomni poučak

Poopćenje:

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2\\ (x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\end{aligned}$$

Tražimo:

$$(x+y)^n = ? \text{ za bilo koji } n \in \mathbb{N}$$

Neke oznake:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad n! \stackrel{def}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \qquad (n \text{ faktorijela})$$

$$0! \stackrel{def}{=} 1$$

Primjer:

$$\begin{aligned}1! &= 1\\ 2! &= 1\cdot 2 = 2\\ 3! &= 1\cdot 2\cdot 3 = 6\\ 4! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24\\ 5! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120\end{aligned}$$

Vrijedi:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

Primjer:

$$6! = 5! \cdot 6 = 120 \cdot 6 = 720$$

Neka su $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $k \leq n$, definiramo binomni koeficijent:

$$\binom{n}{k} \stackrel{def}{=} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad (n \text{ povrh } k).$$

Napomena: binomni koeficijent je uvijek prirodan broj, tj

$$\binom{n}{k} \in \mathbb{N}.$$

Primjer:

$$\begin{aligned}
\binom{4}{0} &= \frac{4!}{0!\,(4-0)!} = \frac{4!}{4!} = 1 \\
\binom{4}{1} &= \frac{4!}{1!\,(4-1)!} = \frac{4!}{3!} = \frac{3! \cdot 4}{3!} = 4 \\
\binom{4}{2} &= \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4}{2! \cdot 2} = 6 \\
\binom{4}{3} &= \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{3! \cdot 4}{3!} = 4 \\
\binom{4}{4} &= \frac{4!}{4!\,(4-4)!} = \frac{4!}{4! \cdot 0!} = 1
\end{aligned}$$

Svojstva:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

2. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

4. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Pascalov trokut

$$
\begin{array}{c||cccccc||cccccc}
n=0 & \binom{0}{0} & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & 1 & 1 & & & & \\
n=2 & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & 1 & 2 & 1 & & & \\
n=3 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
n=4 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
n=5 & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Iz svojstva 4. slijedi npr.

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \binom{6}{4} = 15$$

Teorem 1.2 (Binomni poučak)

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Dokaz. Matematičkom indukcijom.

Raspis:

$$\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} x^{n-k} y^k = \tbinom{n}{0} x^{n-0} y^0 + \tbinom{n}{1} x^{n-1} y^1 + ... +$$
$$+ \tbinom{n}{n-1} x^{n-(n-1)} y^{n-1} + \tbinom{n}{n} x^{n-n} y^n =$$
$$= x^n + n x^{n-1} y + ... + n x y^{n-1} + y^n$$

Primjer:

$$\begin{aligned} (x+y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\ (x+y)^5 &= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^2 + y^4 \end{aligned}$$

Domaći rad:

- $(x+y)^6 =?$
- $(x-y)^6 =?$
- $(x-y)^n \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \tbinom{n}{k} x^{n-k} y^k = x^n - n x^{n-1} y + \tbinom{n}{2} x^{n-2} y^2 - \tbinom{n}{3} x^{n-3} y^3 + ... + (-1)^n y^n$

Cijeli brojevi

Motivacija: Svaka jednadžba oblika

$$m + x = n,$$

gdje su $m, n \in \mathbb{N}$, nema rješenje u skupu $\mathbb{N}$.

Primjer: Jednadžba

$$7 + x = 3$$

nema rješenje u skupu $\mathbb{N}$.

Proširujemo skup $\mathbb{N}$ skupom

$$\mathbb{Z} = \{..., -n, ... - 2, -1, 0, 1, 2, , ..., n, ...\} .$$

kojeg nazivamo skup cijelih brojeva.

Operacije zbrajanja i množenja proširujemo na skup $\mathbb{Z}$. U skupu $\mathbb{Z}$ te operacije su uvijek izvedive, tj.

$$(\forall m, n \in \mathbb{Z}) \quad m + n \in \mathbb{Z}$$
$$(\forall m, n \in \mathbb{Z}) \quad m \cdot n \in \mathbb{Z}$$

i za njih vrijede svojstva komutativnosti, asocija-

tivnosti i distributivnosti.
Sada jednadžba $m + x = n$ ima rješenje za svaki $m, n \in \mathbb{Z}$, tj.

$$x = n + (-m) \overset{def}{=} n - m.$$

Na ovaj način je definirano oduzimanje u skupu $\mathbb{Z}$.

Neka svojstva:

- $(\mathbb{Z}, \leq)$ je *(potpuno) uređen skup*.
- $(\mathbb{Z}, \leq)$ je *diskretno uređen skup*, tj. za svaki $m \in \mathbb{Z}$ vrijedi
$$\{p \in \mathbb{Z} \mid m < p < m + 1\} = \emptyset.$$
- Za skup $\mathbb{Z}$ je *prebrojiv*, tj. ekvipotentan je sa $\mathbb{N}$. Pišemo $card\mathbb{Z} = \aleph_0$ (alef nula).

  Napomena: postoji bijekcija $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, dana sa

$f(1) = 0,\ f(2) = 1,\ f(3) = -1,\ f(4) = 2,\ f(5) = -2, ...$

Racionalni brojevi

Motivacija: Svaka jednadžba oblika

$$m \cdot x = n,$$

gdje su $m, n \in \mathbb{Z}$, nema rješenje u skupu $\mathbb{Z}$.

Primjer: Jednadžba

$$7 \cdot x = -3$$

nema rješenje u skupu $\mathbb{Z}$.

Proširujemo skup $\mathbb{Z}$ skupom

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \ \wedge \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

kojeg nazivamo skup racionalnih brojeva.

Napomena Podrazumijevamo da je

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \iff m_1 \cdot n_2 = m_2 \cdot n_1$$

Dakle,

$$\frac{16}{12} = \frac{8}{6} = \frac{3}{2}.$$

Isto tako vrijedi dogovor da je, npr.

$$\frac{-3}{5} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}.$$

Operacije zbrajanja i množenja proširujemo na skup $\mathbb{Q}$. U skupu $\mathbb{Q}$ te operacije su uvijek izvedive, tj.

$$\left(\forall\, \frac{m_1}{n_1},\ \frac{m_2}{n_2} \in \mathbb{Q}\right) \quad \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} \;=\; \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2} \in \mathbb{Q}$$

$$\left(\forall\, \frac{m_1}{n_1},\ \frac{m_2}{n_2} \in \mathbb{Q}\right) \quad \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} \;=\; \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} \in \mathbb{Q}$$

Na skupu $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ se definira i dijeljenje

$$\left(\forall\, \frac{m_1}{n_1},\ \frac{m_2}{n_2} \in \mathbb{Q} \wedge m_2 \neq 0\right) \quad \frac{m_1}{n_1} : \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot m_2} \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{m_1}{n_1} \leq \frac{m_2}{n_2} \iff m_1 \cdot n_2 \leq m_2 \cdot n_1.$$

Neka svojstva:

- $(\mathbb{Q}, \leq)$ je *(potpuno) uređen skup*.
- $(\mathbb{Q}, \leq)$ je *svuda gust*, tj. između svaka dva racionalna broja postoji barem jedan racionalan broj (a to znači i beskonačno njih).
- Za skup $\mathbb{Q}$ je *prebrojiv*, tj. ekvipotentan je sa $\mathbb{N}$. Pišemo $card\mathbb{Q} = \aleph_0$ (alef nula).

  Napomena: postoji bijekcija $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ (zadana beskonačnom shemom).

Realni brojevi

Motivacija: Neke jednadžbe, kao što su

$$x^2 = 2, \quad x^3 = 5, ...$$

nemaju rješenje u skupu $\mathbb{Q}$.

Kad racionalne brojeve nanosimo na brojevni pravac, oni ne popune čitav pravac, iako je $\mathbb{Q}$ gust. Te ”rupice” na pravcu popunjavamo tzv. *iracionalnim brojevima*.

Skup svih iracionalnih brojeva označavamo sa $\mathbb{I}$, a skup

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

nazivamo *skup realnih brojeva*.

- Svaki racionalan broj može se prikazati kao konačan decimalan broj ili kao beskonačan periodičan decimalan broj.
- Svaki iracionalan broj može se prikazati kao beskonačan neperiodičan decimalan broj.

  Primjer:

$$\frac{1}{4} = 0.25 \qquad \frac{1}{3} = 0.\dot{3} = 0.3333...$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1.4121356237.... \\ e &= 2.718\,3.... \\ \pi &= 3.141\,6.... \end{aligned}$$

Neka svojstva:

- Na skupu $\mathbb{R}$ su uvijek izvedive opracije $"+"$, $"\cdot"$.
  Na skupu $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ je uvijek izvediva operacija $":"$.

- $(\mathbb{R}, \leq)$ je *(potpuno) uređen skup*.

- $\mathbb{R}$ je *svuda gust*, tj. između svaka dva realna broja postoji barem jedan realan broj.

- $\mathbb{Q}$ je *gust u* $\mathbb{R}$, tj. između svaka dva realna broja postoji barem jedan racionalan broj.

- Skup $\mathbb{I}$ je *neprebrojiv* ili *neprebrojivo beskonačan.*

  Skup $\mathbb{R}$ je *neprebrojiv* ili *neprebrojivo beskonačan.*

Kompleksni brojevi

Motivacija: neke jednadžbe kao što je

$$x^2 = -1$$

nemaju rješenje u skupu $\mathbb{R}$.

Uvodimo novi objekt, kojeg označavamo sa i, tako da je

$$i^2 = -1.$$

Formalno, definiramo

$$i \stackrel{def}{=} \sqrt{-1}.$$

Definicija 1.14 *Skup kompleksnih brojeva* je skup

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Za svaki $z = x + iy \in \mathbb{C}$, realni broj

$$x = \operatorname{Re} z$$

nazivamo *realni dio od z*, a realni broj

$$y = \operatorname{Im} z$$

nazivamo *imaginarni dio od z*.

Napomena: Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\subset \mathbb{C} \\ i\mathbb{R} &= \{iy \mid y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C} \end{aligned}$$

Skup $i\mathbb{R}$ se naziva *skup imaginarnih brojeva*.

Za $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ kažemo da su *jednaki* ako i samo ako su im jednaki realni i imaginarni djelovi, tj.

$$x_1 + iy_1 = x_1 + iy_1 \iff x_1 = x_2 \ \wedge \ y_1 = y_2.$$

Za svaki $z = x + iy \in \mathbb{C}$, definiramo pripadni *konjugirano kompleksni broj*

$$\overline{z} = x - iy \quad \in \quad \mathbb{C}.$$

Za svaki $z = x + iy \in \mathbb{C}$, definiramo *modul* ili *apsolutnu vrijednost* kompleksnog broja z kao nenegativni realni broj

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \in \quad \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\,.$$

Primjer

$$z_1 = 2 - i = 2 + (-1) \cdot i \implies \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = 2, \quad \operatorname{Im} z_1 = -1, \\ \bar{z}_1 = 2 - (-1) \cdot i = 2 + i, \\ |z_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$z_2 = -2 = -2 + 0 \cdot i \implies \begin{cases} \operatorname{Re} z_2 = -2, \quad \operatorname{Im} z_2 = 0, \\ \bar{z}_2 = -2 - 0 \cdot i = -2, \\ |z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2} = \sqrt{4} = 2 \end{cases}$$

$$z_3 = 3i = 0 + 3i \implies \begin{cases} \operatorname{Re} z_3 = 0, \quad \operatorname{Im} z_3 = 3, \\ \bar{z}_3 = 0 - 3 \cdot i = -3i, \\ |z_3| = \sqrt{(0)^2 + (3)^2} = \sqrt{9} = 3 \end{cases}$$

Računske operacije s kompleksnim brojevima

Neka su $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$, definiramo:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i\left(y_1 + y_2\right),$$
$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i\left(y_1 - y_2\right),$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \left(x_1 + iy_1\right)\left(x_2 + iy_2\right) = \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \overset{i^2=-1}{=} \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + \left(x_1y_2 + y_1x_2\right)i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \cdot \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \\ &= \frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + iy_1x_2 - y_1y_2i^2}{x_2^2 - y_2^2i^2} \overset{i^2=-1}{=} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1x_2 - y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \cdot i \quad \text{za} \quad z_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Svojstva: Za sve $z,\, z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$ vrijedi:

1. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$,

2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z}_2$,

3. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$, za $z_2 \neq 0$.

4. $\overline{\overline{z}} = z$,

5. $z = \overline{z} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$,

6. $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$,

7. $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$,

8. $z \cdot \overline{z} = \overline{z} \cdot z = |z|^2$,

9. $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$

10. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (nejednakost trokuta)

Geometrijski prikaz kompleksnog broja

Svakom kompleksnom broju $z = x + iy$ jednoznačno je pridružen uređeni par $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, odnosno točka $T = (x, y)$ u koordinatnoj ravnini i obratno. Ravninu u kojoj kompleksne brojeve predočujemo kao točke (na gore opisan način) nazivamo *brojevna* ili *Gaussova ravnina*.

Svaki kompleksni broj $z = x + iy$ u Gaussovoj ravnini jednoznačno je određen udaljenošću $r \in [0, \infty)$ od ishodišta $0 = (0, 0)$ točke $T = (x, y)$, te kutem $\varphi \in [0, 2\pi)$ kojeg dužina $\overline{OT}$ zatvara s pozitivnim smijerom $x-$ osi. Kut

$$\varphi = \arg\ z$$

nazivamo *argument kompleksnog broja z*.

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Budući je

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Re} z = r\cos\varphi \\ y &= \operatorname{Im} z = r\sin\varphi. \end{aligned}$$

onda je

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

trigonometrijski oblik kompleksnog broja, gdje je

$$\begin{aligned} r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\ \varphi &= tg\left(\arg\ z\right) = \frac{y}{x} \text{ (oprez !).} \end{aligned}$$

Primjer Prikažite kompleksni broj $z = -1 - i$ u trigonometrijskom obliku.

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$tg\varphi = \frac{-1}{-1} = 1 \Longrightarrow \varphi = \frac{5\pi}{4},$$

pa je

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

Primjer Prikažite kompleksni broj $z = -i$ u trigonometrijskom obliku.

$$r = |z| = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = 1,$$

$$tg\varphi = \frac{-1}{0} \Longrightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2},$$

pa je

$$z = 1 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

Računske operacije s kompleksnim brojevima zadanim u trigonometrijskom obliku

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja omogućuje jednostavno izvođenje nekih računskih operacija.

Neka su $z_1 = r_1 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = r_2 (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ dva kompleksna broja. Tada je

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2 (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$\begin{aligned} &= r_1 r_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \\ &\quad + i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + \\ &\quad + i (\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)] \\ &\overset{a.t.}{=} r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) . \end{aligned}$$

Slično, za $z_2 \neq 0$, vrijedi

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2 (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) .$$

Matematičkom indukcijom može se pokazati

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = \left(\prod_{k=1}^{n} r_k\right)\left(\cos\left(\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\right) + i\sin\left(\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\right)\right)$$

Specijalno, za $z_1 = z_2 = ... = z_n = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, dobivamo tzv. *Moivreovu formulu* za potenciranje s prirodnim brojem n

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja posebno je pogodan za potenciranje s racionalnom eksponentom $q = \frac{m}{n}$. Dakle, treba izračunati potenciju $z^{\frac{1}{n}}$, gdje je $n \in \mathbb{N}$, koju označavamo $\sqrt[n]{z}$ i nazivamo *$n-$ti korijen iz kompleksnog broja z*.

Vrijedi, $w = \sqrt[n]{z}$ točno onda kad je $w^n = z$. Ako je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, onda $n-$ti korijen iz kompleksnog broja z ima n međusobno različitih vrijednosti $w = z_0, z_1, ..., z_{n-1}$ koje su dane sa

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Svi ovi brojevi leže na centralnoj kružnici radijusa $\sqrt[n]{r}$ i dijele tu kružnicu na n jednakih djelova.

Primjer Neka su $z_1 = -1 - i$ i $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Tada je

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1,$$

$$tg\varphi_2 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \Longrightarrow \varphi_2 = \frac{2\pi}{3},$$

pa je

$$z_2 = 1 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Sada je

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \sqrt{2} \cdot 1 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{23}{12}\pi + i\sin\frac{23}{12}\pi\right) \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{1}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$$

$$z_1^5 = \left(\sqrt{2}\right)^5\left(\cos\frac{5\cdot 5\pi}{4}+i\sin\frac{5\cdot 5\pi}{4}\right) =$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{25\pi}{4}+i\sin\frac{25\pi}{4}\right) =$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{(24+1)\,\pi}{4}+i\sin\frac{(24+1)\,\pi}{4}\right) =$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+3\cdot 2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+3\cdot 2\pi\right)\right) =$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4+4i$$

Primjer Riješite jednadžbu $z^6 = 1$.
Trigonometrijski oblik:

$$1 = 1 + 0i \Longrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 \\ tg\varphi = \frac{0}{1} \Longrightarrow \varphi = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0),$$

Rješenja jednadžbe su dana sa $z = \sqrt[6]{1} = z_k$, gdje je

$$z_k = \sqrt[6]{1} \left(\cos \frac{0 + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{6} \right), \quad k = 0, 1, ..., 5.$$

Specijalno

$$\begin{aligned}
z_0 &= 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = 1 \\
z_1 &= 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\
z_2 &= 1 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\
z_3 &= 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi) = -1 \\
z_4 &= 1 \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \\
z_5 &= 1 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i
\end{aligned}$$

Eksponencijalni ili Eulerov oblik kompleksnog broja

Može se pokazati da je

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Sada iz trigonometrijskog oblika kompleksnog broja $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ slijedi

$$z = re^{i\varphi}.$$

Ovaj oblik nazivamo *eksponencijalni* ili *Eulerov oblik* kompleksnog broja z.

Računske operacije:

Ako su $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$, $z = re^{i\varphi}$ kompleksni brojevi, onda je

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \quad \text{za } z_2 \neq 0 \\ z^n &= \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^ne^{in\varphi} \end{aligned}$$