2. REALNE FUNKCIJE REALNE VARIJABLE

1. Funkcije

Definicija 1.1 Funkcija *ili* preslikavanje *je svaka uređena trojka*

$$(A,\ f,\ B)\,,$$

pri čemu su A *i* B *skupovi, a* f *bilo koje pravilo po kojem se* svakom *elementu* $x \in A$ *pridružuje* točno jedan *element* $y \in B$.

Oznaka: $f : A \longrightarrow B$ ili $x \longrightarrow y = f(x)$;

- skup A - područje definicije ili domena;
- skup B - područje vrijednosti ili kodomena;
- x - nezavisna varijabla ili argument;
- y - zavisna varijabla;
- $y = f(x)$ - vrijednost (na elementu x) funkcije f;
- Skup

$$f(A) = \{y \in B : (\exists x \in A)(y = f(x))\}$$

nazivamo slika funkcije f.

Uočimo: Funkcija je potpuno definirana s tri podatka:

- domenom;
- kodomenom;
- pravilom f.

Važna napomena: Realne funkcije realne varijable, tj. $f : A \longrightarrow B$ gdje su $A, B \subseteq \mathbb{R}$, obično zadajemo samo pravilom (analitičkim izrazom), npr.

$$f(x) = 2x, \qquad g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, \qquad h(x) = \sqrt{x}.$$

Pri tome podrazumijevamo (ako se drugačije ne naglasi) da je:

▲ domena - maksimalan podskup skupa $\mathbb{R}$ za koji taj izraz ima smisla. Taj skup nazivamo prirodno područje definicije i označujemo sa D_f ili $D(f)$;

▲ kodomena - cijeli skup $\mathbb{R}$.

Dakle (za gornje funkcije):

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g : \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Definicija 1.2. Za funkcije $f : A_1 \longrightarrow B_1$ i $g : A_2 \longrightarrow B_2$ kažemo da su jednake i pišemo $f = g$, ako je $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$ i $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in A_1 = A_2$.

Ili

$$(A_1,\ f,\ B_1) = (A_2,\ g,\ B_2) \iff$$

$$A_1 = A_2 \quad \wedge \quad B_1 = B_2 \quad \wedge \quad (\forall x \in A_1 = A_2) \ \ (f(x) = g(x))$$

Primjer

$$f(x) = x, \qquad g(x) = \frac{x^2}{x}.$$

Vrijedi: $f \neq g$ jer je $D_f = \mathbb{R} \neq \mathbb{R} \setminus \{0\} = D_g$.

Definicija 1.3. Neka su zadane dvije funkcije $f : A_1 \longrightarrow B_1$ i $g : A_2 \longrightarrow B_2$, tako da je $A_2 \subseteq A_1$, $B_2 \subseteq B_1$ i $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in A_2$. Tada kažemo da je:

- g restrikcija ili suženje od f;
- f ekstenzija ili proširenje od g.

Primjer

$$f(x) = x, \qquad g(x) = \frac{x^2}{x}.$$

Vrijedi:

- f - proširenje od g;
- g - proširenje od f.

Napomena: Funkcija

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

je također proširenje od g.

Napomena: Ako je $A_2 \subseteq A_1$, $B_2 \subseteq B_1$ suženja od $f : A_1 \longrightarrow B_1$ na A_2 u B_2 ima točno jedno, a proširenja od $g : A_2 \longrightarrow B_2$ na A_1 u B_1 ima beskonačno.

Definicija 1.4. Kompozicija funkcija $f : A \longrightarrow B_1$ i $g : B_2 \longrightarrow C$, $B_2 \subseteq B_1$ je funkcija $h : A \longrightarrow C$, tako da je

$$h(x) = g(f(x))$$

za svaki $x \in A$. Pišemo $h = g \circ f$.

Kompozicija je asocijativna, tj. vrijedi

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Primjer Naći $h \circ g \circ f$, ako je

$$f(x) = 2x, \qquad g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, \qquad h(x) = \sqrt{x}.$$

Definicija 1.5. Za funkciju $f : A \longrightarrow B$ kažemo da je:

- surjekcija ili preslikavanje na ako je
$$f(A) = B,$$
tj.
$$(\forall y \in B) \ \ (\exists x \in A) \ \ (f(x) = y);$$
("slika jednaka kodomeni").

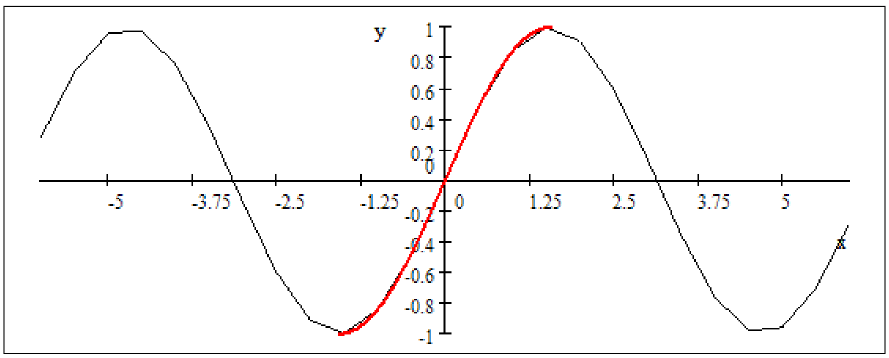
- injekcija ili $1-1$ preslikavanje ako
$$(\forall x, x' \in A) \ \ (f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x')$$
$$\Big(\text{ili } (\forall x, x' \in A) \ \ \big(x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')\big)\Big);$$
("različitim $x-$evima pridruženi različiti $y-$i").

- bijekcija ili obostrano jednoznačno preslikavanje ako je surjekcija i injekcija, tj.
$$(\forall y \in B) \ \ (\exists! x \in A) \ \ (f(x) = y);$$

Primjer 1 Funkcija $i_A : A \longrightarrow A$ definirana sa $i_A(x) = x$, za svaki $x \in A$, se naziva identiteta na skupu A.

Identiteta $i_A : A \longrightarrow A$ je bijekcija.

Primjer 2 Sa $f(x) = \sin x$ zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ koja nije ni injekcija ni surjekcija. Restrikcija ove funkcije $f_1 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$, $f_1(x) = \sin x$ je bijekcija.



Teorem 1.6. Funkcija $f : A \longrightarrow B$ je bijekcija ako i samo ako postoji funkcija $g : B \longrightarrow A$ tako da je $g \circ f = i_A$ i $f \circ g = i_B$, gdje su i_A i i_B odgovarajuće identitete. Funkcija g je jedinstvena i naziva se <u>inverzna funkcija</u> funkcije f i označava sa f^{-1}.

<u>Napomena 1:</u> Ako je $f : A \longrightarrow B$ bijekcija onda je

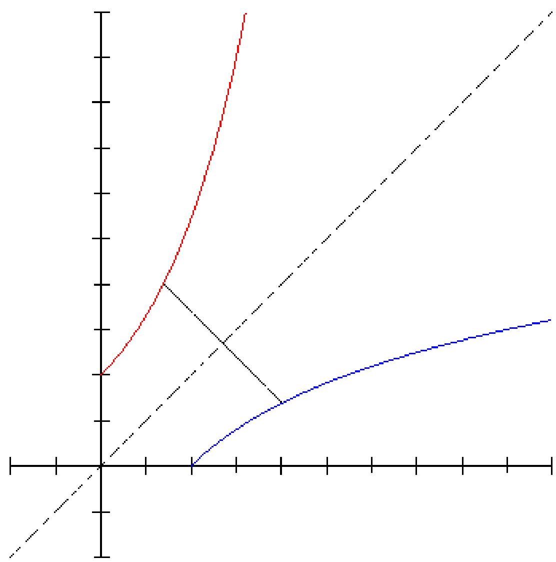
$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x.$$

Naime,

$$(\forall x \in A) \quad \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = i_A(x) = x;$$

$$(\forall y \in B) \quad \left(f \circ f^{-1}\right)(y) = f\left(f^{-1}(y)\right) = f(x) = i_B(y) = y.$$

Napomena 2: Ako imamo realnu funkciju realne varijable $f : A \longrightarrow B$ koja je bijekcija, graf inverzne funkcije $f^{-1} : B \longrightarrow A$ je simetričan grafu funkcije f s obzirom na pravac $y = x$.



2. Realne funkcije realne varijable

Definicija 2.1. Za funkciju $f : A \longrightarrow B$ kažemo da je realna funkcija realne varijable ako su skupovi $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

Zadavanje funkcija:

1) Tablično

2) Analitičkim izrazom

3) Grafički

1) Tablično zadavanje funkcija

Primjer:

x	0	3	7	11	30
$f(x)$	-1	2	4	7	-3

- ako je domena konačan skup;

- ako domena nije konačan skup - ostale vrijednosti određujemo približno (npr. interpolacijom - numerička matematika).

2) Zadavanje funkcija analitičkim izrazom (pravilom)

Primjer:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}, \quad g(x) = \sin 3x, \ldots.$$

Napomena: Ovdje za domenu uzimamo prirodno područje definicije D_f, a za kodomenu $\mathbb{R}$.

Još kažemo da je funkcija zadana eksplicitno.

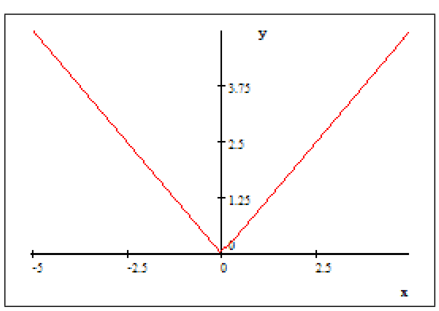
3) Zadavanje funkcija grafički

Grafom funkcije nazivamo skup

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y) : y = f(x),\ x \in D_f\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Napomena: Graf je podskup ravnine $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Primjer: $\mathcal{G}_f = \{(x, y) : y = |x|\}$



Graf funkcije $f(x) = |x|$

Napomena 1: Promatrajmo jednadžbu $F(x,y)=0$ u kojoj pravilo F povezuje x i y.

Ako se na nekom podskupu $A \subseteq \mathbb{R}$ svakom $x \in A$ može pridružiti točno jedan $y \in \mathbb{R}$, onda kažemo da je jednadžbom $F(x,y)=0$ implicitno zadana funkcija $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, tako da je $y = f(x)$ i $F(x, f(x)) = 0$.

- Često je jednadžbom $F(x,y)=0$ zadano više funkcija. Općenito, sa $F(x,y)=0$ je zadana krivulja u ravnini

$$\mathcal{G}_F = \{(x,y) : F(x,y) = 0\};$$

(uvjeti da bi bila zadana točno jedna funkcija - kasnije);

Primjer:

- $$\underbrace{y - \sqrt{x} + 1}_{F(x,y)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \sqrt{x} - 1.$$

Zadana je funkcija: $f(x) = \sqrt{x} - 1,\ f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

- $$\underbrace{x^2+y^2-1}_{F(x,y)}=0 \quad\Longrightarrow\quad y=\pm\sqrt{1-x^2}$$

  Zadane su funkcije:

  $$f_1(x) \;=\; \sqrt{1-x^2}, \quad f_1:[-1,1]\to\mathbb{R},$$

  $$f_2(x) \;=\; -\sqrt{1-x^2}, \quad f_2:[-1,1]\to\mathbb{R},$$

  Graf

  $$\mathcal{G}_F=\left\{(x,y):x^2+y^2-1=0\right\};$$

  je centralna kružnica radijusa 1.

Napomena 2: Promatrajmo funkcije $\Phi, \Psi : T \longrightarrow \mathbb{R}$ i definirajmo za svaki $t \in T$

$$x = \Phi(t), \quad y = \Psi(t). \tag{1}$$

S jednadžbama (1) je općenito parametarski zadana krivulja u ravnini

$$\Gamma = \{(x, y) : x = \Phi(t), \quad y = \Psi(t), \ t \in T\}.$$

Ako je funkcija Φ injekcija, onda će sa (1) biti zadana funkcija $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, gdje je $A = \Phi(T)$, a eksplicitni (implicitni) oblik funkcije dobivamo tzv. eliminacijom parametra t iz jednadžbi (1).

Primjer:

- $$\begin{aligned} \Phi(t) &= \cos t, \qquad \Phi : [0, 2\pi) \to \mathbb{R} \\ \Psi(t) &= \sin t, \qquad \Psi : [0, 2\pi) \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

  Neka je $x = \cos t$ i $y = \sin t$.

  Eliminacija parametra t:

  $$x^2 + y^2 = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$$

Graf

$$\Gamma_1 = \{(x, y) : x = \cos t, \quad y = \sin t, \ \ t \in [0, 2\pi)\} \,;$$

je (cijela) centralna kružnica radijusa $1.$

Graf

$$\Gamma_2 = \{(x, y) : x = \cos t, \quad y = \sin t, \ \ t \in [0, \pi]\} \,;$$

je dio centralne kružnice radijusa 1 (gornja polovica).

<u>Uočimo:</u>

- Γ_1 je graf krivulje;
- Γ_2 je graf funkcije $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
  (jer je $\Phi(t) = \cos t$, $\Phi : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ injekcija).