Registracija slika

Hrvoje Kalinić

siječanj 2010.

Svrha registracije je pronaći geometrijsku transformaciju slike na takav način da ona bude što sličnija nekoj drugoj (zadanoj slici). Stoga kažemo da se registracija sastoji se od tri osnovne komponente:

- Geometrijske transformacije
- Optimizacije
- Mjere sličnosti

Registracija slike koristi se za:

- Pronalaženje objekta u slici
- Praćenje objekta
- Spajanje slika (eng. image fusion)
- Šivanje slika (eng. image stitching)
- ...

Geometrijska transformacija je funkcija $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, koja za zadane koordinate u jednom geometrijskom prostoru vraća koordinate u drugom geometrijskom prostoru (transformacija prostora). U našem slučaju riječ je o 2D prostoru ($n = 2$). Dijelimo ih na:

- Rotacija (R)
- Translacija (T)
- Skaliranje (S)
- Afina transformacija (A)
- Projektivna transformacija (P)
- Nelinearna transformacija

Neke geometrijske transformacije možemo izraziti u homogenim koordinatama, u obliku:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

gdje je G neka od matrica R,T,S,A,P odnosno njihove permutacije, npr.
$G = R \cdot T$, $G = S \cdot T \cdot P$ itd.
Matrica rotacije je dana s:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Neke geometrijske transformacije možemo izraziti u homogenim koordinatama, u obliku:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

gdje je G neka od matrica R,T,S,A,P odnosno njihove permutacije, npr.
$G = R \cdot T$, $G = S \cdot T \cdot P$ itd.
Matrica rotacije je dana s:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Matrica transformacije je dana s:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Dok je matrica skaliranja je dana s:

$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Afinu transformaciju možemo zapisati matricom:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Matrica transformacije je dana s:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Dok je matrica skaliranja je dana s:

$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Afinu transformaciju možemo zapisati matricom:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Matrica transformacije je dana s:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Dok je matrica skaliranja je dana s:

$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Afinu transformaciju možemo zapisati matricom:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Matrica transformacije je dana s:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Dok je matrica skaliranja je dana s:

$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Afinu transformaciju možemo zapisati matricom:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Projektivna transformacija je najslobodniji oblik matrice geometrijske transformacije u homogenim koordinatama:

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & t_2 \\ p_1 & p_2 & \alpha \end{bmatrix} \tag{6}$$

Nelinearne transformacije ne možemo zapisati u matričnom obliku. Najsažetiji zapis nelinearnog iskrivljenja prostora je u obliku polinoma:

$$\mathbf{x}' = \sum_{ij}^{IJ} \mathbf{c}_{ij} x^i y^j \tag{7}$$

Optimizacija[1] je matematički postupak pronalaženja ekstrema (maksimuma ili minimuma) neke funkcije. Općenito optimizacijske algoritme dijelimo na:

- Determinističke
- Nedeterminističke (npr. genetski algoritam)

Deterministički algoritmi se u pravilu oslanjaju na procjenu gradijenta nekoj točci.

[1] Optimizaciju koristimo kada je prostor prevelik, te iscrpno pretraživanje predugo traje

Ako tražimo (npr.) maksimum funkcije klase C^2 problem možemo formalno definirati:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} < 0 \tag{8}$$

Za procjenu gradijenta u diskretnom prostoru možete se poslužiti nekim od gradijentalnih operatora ranije spomenutih.

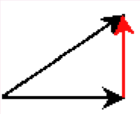
Mjere sličnosti koristimo da kvalitativno izrazimo sličnost (razliku) između dviju slika.
Radi jednostavnosti u nastavku ćemo promatrati vektore x_1 i x_2.

Definicija (Srednja kvadratna pogreška)

Vektori x_1 i x_2 su slični ako je D, definiran kao:

$$D = \sum_{i=1}^{n} (x_1(i) - x_2(i))^2$$

minimalan.



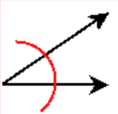
Slika: Geometrijska interpretacija razlike vektora

Primijetimo da D iz definicije 4.1. možemo zapisati i kao:

$$D = \sum_{i=1}^{n} (x_1(i)^2 - 2x_1(i)x_2(i) + x_2(i)^2)$$

iz čega je vidljivo da je D minimalan ukoliko je član $x_1(i)x_2(i)$ maksimalan. Takav zapis nazivamo kroskorelacijom, a geometrijski se može interpretirati kao kosinus kuta između dva (jedinična) vektora:

$$\cos\theta = x_1 x_2 \tag{9}$$



Slika: Geometrijska interpretacija kroskorelacije

Jednadžba 9 vrijedi samo za jedinične vektore. Ako je želimo poopćiti zapisat ćemo:

$$\cos\theta = \frac{x_1 \cdot x_2}{||x_1|| \cdot ||x_2||} \tag{10}$$

Sada možemo definirati novu mjeru sličnosti:

Definicija (Normirana kroskorelacija)

Vektori x_1 i x_2 su slični ako je D, definiran kao:

$$D = \frac{x_1 \cdot x_2}{||x_1|| \cdot ||x_2||}$$

maksimalan.

Ovu mjeru sličnosti možemo koristiti čak i kad imamo vektore koji su različitih skala. To znači, moći ćemo ustanoviti i sličnost između vektora čiji je funkcijski odnos: $x_1 = k \cdot x_2$

Primijetimo da općenito, hvatišta vektora ne moraju biti u istoj točci. Ako želimo definirati mjeru sličnosti koje je invarijantna i na skalu i na pomak vektora definirati ćemo mjeru sličnosti na slijedeći način:

Definicija (Koeficijent korelacije 1)

Vektori x_1 i x_2 su slični ako je D, definiran kao:

$$D = \frac{(x_1 - \bar{x_1}) \cdot (x_2 - \bar{x_2})}{||x_1|| \cdot ||x_2||}$$

maksimalan.

Ovako definirana mjera sličnosti je u stanju ustvrditi sličnost između vektora ukoliko su u odnosu: $x_1 = k \cdot x_2 + c$

Prisjetimo se da zapravo želimo izraziti sličnost između dviju slika, koje možemo zapisati kao slučajne vektore. Ako govorimo o slučajnim vektorima x_1 i x_2, definicija sličnosti poprima oblik:

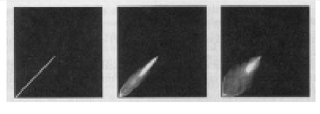
Definicija (Koeficijent korelacije 2)

Vektori x_1 i x_2 su slični ako je ρ, definiran kao:

$$\rho = \frac{E[(x_1 - \mu_{x_1}) \cdot (x_2 - \mu_{x_2})]}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}}$$

maksimalan. Gdje je $\mu_x = E[x]$, a σ_x standardna devijacija.

Često je teško ustvrditi funkcijsku relaciju između slučajnih vektora, pa nijedna od prethodnih mjera sličnosti nije zadovoljavajuća. Najbolji (i potpuni) opis odnosa dvaju slučajnih varijabli x_1 i x_2, je njihova funkcija distribucije $p(x_1, x_2)$, koja u potpunosti opisuje njihov odnos (uključujući čak i šum koji se može pojaviti prilikom prikupljanja podataka). Funkcija distribucije se lako dade procijeniti iz histograma drugog reda.



Slika: Histogram drugog reda za različite pomake

Iz teorije informacije je preuzeta entropija kao mjera sličnosti:

$$H(X_1, X_2) = \sum \sum p(x_1, x_2) \log p(x_1, x_2) \tag{11}$$

ili međusobna informacija

$$MI(X_1, X_2) = H(X_1) + H(X_2) - H(X_1, X_2) \tag{12}$$

ipak, danas je najpopularnija normirana međusobna informacija (zbog robusnosti)

$$NMI(X_1, X_2) = \frac{H(X_1) + H(X_2)}{H(X_1, X_2)} \tag{13}$$

Iz teorije informacije je preuzeta entropija kao mjera sličnosti:

$$H(X_1, X_2) = \sum \sum p(x_1, x_2) \log p(x_1, x_2) \tag{11}$$

ili međusobna informacija

$$MI(X_1, X_2) = H(X_1) + H(X_2) - H(X_1, X_2) \tag{12}$$

ipak, danas je najpopularnija normirana međusobna informacija (zbog robusnosti)

$$NMI(X_1, X_2) = \frac{H(X_1) + H(X_2)}{H(X_1, X_2)} \tag{13}$$

Iz teorije informacije je preuzeta entropija kao mjera sličnosti:

$$H(X_1, X_2) = \sum \sum p(x_1, x_2) \log p(x_1, x_2) \tag{11}$$

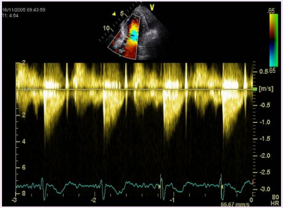
ili međusobna informacija

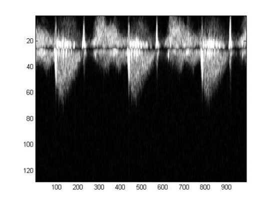
$$MI(X_1, X_2) = H(X_1) + H(X_2) - H(X_1, X_2) \tag{12}$$

ipak, danas je najpopularnija normirana međusobna informacija (zbog robusnosti)

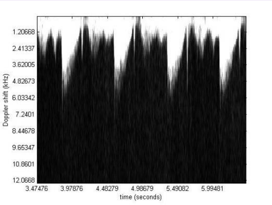
$$NMI(X_1, X_2) = \frac{H(X_1) + H(X_2)}{H(X_1, X_2)} \tag{13}$$

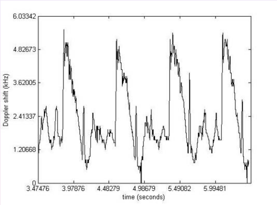
Slika: Vivid 7, GE Healthcare



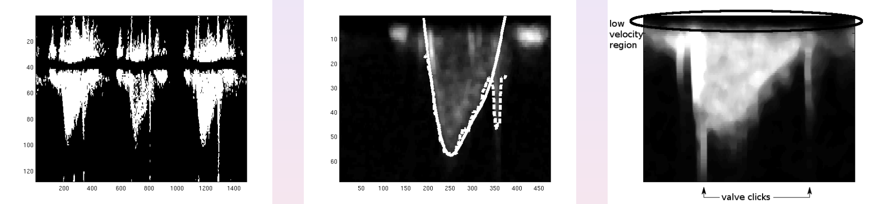


Slika: Dohvat DICOM/HDF5 slike snimljene kontinuiranim Dopplerom

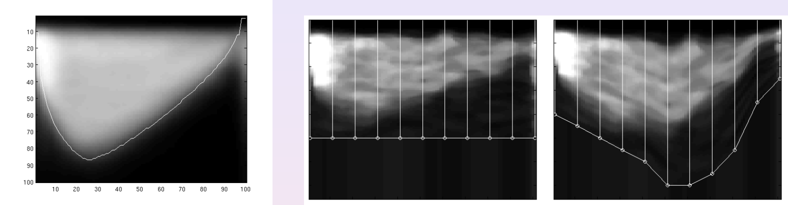




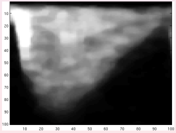
Slika: Prikaz ideje segmentacije



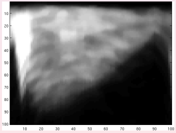
Slika: Potencijalni problemi



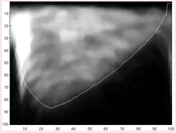
Slika: Predloženi atlas i transformacija



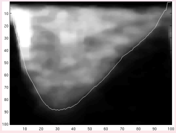
(a) Ulazna slika $S(x)$



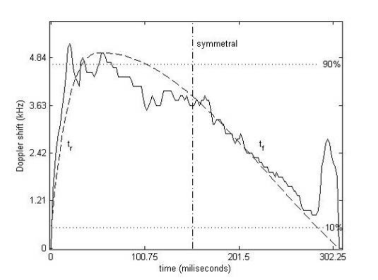
(b) $S(x) \rightarrow R(x)$



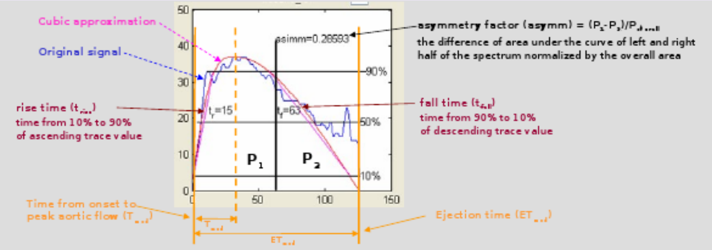
(c) Propagacija seg.



(d) Inverzna transf.



Slika: Segmentacija



Slika: Kardiološka mjerenja