Digitalna obradba i analiza slike

Zadatci za vježbu – srpanj 2011.

Hrvoje Kalinić[1]

1. Zadatci za vježbu

1. Definirajte probleme obradbe, analize i razumijevanja slike. Navedite neke primjere svakog problema.

2. Navedite razliku između Diracove i Kroneckerove funkcije. Koja su svojstva tih funkcija (riječima i matematičkim izrazom).

3. Definirajte linearni 2D prostorno nepromjenjiv sustav i njegov impulsni odziv. Napišite izraz za odziv navedenog sustava na pobudu u.

4. Navesti definicije:

- 2-D sustava
- 2-D linearnog sustava
- Impulsnog odziva
- Prostorno nepromjenjivog sustava

Navesti izraz za računanje odziva 2-D linearnog prostorno nepromjenjivog sustava na ulaznu 2-D sliku.

5. Napišite definiciju linearnog operatora. 2D sustav je definiran operatorom L tako da je:

$$y(m,n) = L[x(m,n)] = 3x(m,n) + 4$$

gdje $x(m,n)$ predstavlja jednu točku slike. Je li L linearni ili nelinearni operator. Dokažite.

6. Pokažite da je Lapaceov operator linearan operator. Prisjetimo se, Laplaceov operator glasi:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

7. Nabrojite svojstva kontinuirane 2-D FT.

8. Definirajte matricu rotacije. Dokažite da vrijedi teorem o rotaciji:

$$f(x,y) \circ\!\!-\!\!\bullet\; F(\omega_1,\omega_2) \Longleftrightarrow$$
$$f(x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\cos(\theta) + y\sin(\theta)) \circ\!\!-\!\!\bullet\; F(\omega_1\cos(\theta) - \omega_2\sin(\theta), \omega_1\cos(\theta) + \omega_2\sin(\theta))$$

9. Navedite definiciju 2-D Z-transformacije, te objasnite njezin odnos prema 2-D Fourierovoj transformaciji.

10. Izračunajte 2D Fourierovu transformaciju te skicirajte amplitudnu karakteristiku signala:

[1] Primjedbe, eventualne pogreške i pitanja slati asistentu Hrvoju Kaliniću na adresu tipa ime.prezime@fer.hr

a.)

$$f(x,y) = sinc(x)sinc(y)$$

b.)

$$f(x,y) = sin(x-y) + sin(x+y)$$

c.)

$$f(x,y) = \frac{cos(x-y) - cos(x+y)}{xy}$$

Prisjetimo se slijedećih trigonometrijskih relacija

1.

$$\cos\theta - \cos\phi = -2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

2.

$$\sin\theta \pm \sin\phi = 2\sin\left(\frac{\theta\pm\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta\mp\phi}{2}\right)$$

11. Definirajte diskretnu Fourierovu transformaciju.

12. Na primjeru pokažite razliku linearne i cirkularne konvolucije.

13. Definirajte linearnu i cirkularnu konvoluciju za dvodimenzionalne signale. Objasnite kako pomoću cirkularne kovnolucije možemo odrediti linearnu konvoluciju u domeni diskretne Fourierove transformacije.

14. Izračunajte odziv prostorno nepromjenjivog 2-D sustava s impulsnim odzivom h na ulaz u. Referentni članovi nizova $h(0,0)$ i $u(0,0)$ su podcrtani. Pretpostaviti da signali imaju nule za sve elemente izvan matrica.

$$h = \begin{bmatrix} \underline{1} & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\ u = \begin{bmatrix} \underline{1} & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

15. Opišite DCT, navedite formulu i svojstva. Usporedite je s DFT. Što je restrikcija baze? Objasnite njezin utjecaj na kvalitetu slike.

16. Navedite definiciju i objasnite 1-D K-L transformaciju. Nabrojati svojstva K-L transformacije. Objasniti izrazima svojstvo dekorelacije koeficijenata K-L transformacije.

17. Definirajte 1D Karhunen-Loéve transformaciju. Zadana je autokorelacijska matrica

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Odredite svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore zadane autokorelacijske matrice. Ako je $\mathbf{T}$ matrica čiji stupci su normirani svojstveni vektori matrice $\mathbf{R}$ izračunajte $\mathbf{T}^H\mathbf{R}\mathbf{T}$. Je li dobivena matrica dijagonalna?

18. Navedite i objasnite svojstva ortogonalnih transformacija.

19. Objasnite rastezanje kontrasta i postupak izjednačavanje histograma.

20. Definirajte i objasnite histogram prvog reda. Nacrtajte histogram prvog reda za sliku S. Napišite funkciju kojom dobijemo negativ slike S. Koji je njezin histogram?

$$S = \begin{bmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

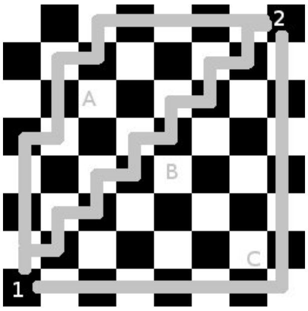
21. Pretpostavimo da su originalne i transformirane vrijednosti intenziteta slike slučajne varijable u i v s vrijednostima na intervalu $[0, 1]$. Ako su njihove funkcije distribucije dane izrazima $p_u = 2 - 2u$ i $p_v = 2v$ ($\forall u, v \in [0, 1]$), izračunajte transformaciju intenziteta slike (dakle, traži se funkcija $v = f(u)$). Napomena: Prisjetite se izraza za kontinuirane slučajne varijable iz teorije vjerojatnosti:

$$p_v(v) = [p_u(u)\frac{du}{dv}]_{u=f^{-1}(v)}$$

22. Definirajte 4-susjedstvo i 8-susjedstvo. Neka su zadane dvije točke u slici, $p = (1, 2)$ i $q = (4, 5)$. Odredite najkraći put u 4-susjedstvu između p i q.

23. Navedite svojstva koja treba imati funkcija udaljenosti. Navedite definicije za kvartovsku (City-Block) i šahovsku (Chessboard) udaljenost. Za točke slike s koordinatama $p = (5, 2)$ i $q = (14, 5)$ odredite Euklidsku, kvartovsku i šahovsku udaljenost među točkama p i q.

24. Definirajte udaljenosti. Pokažite da kvartovska udaljenost zadovoljava svojstva funkcije udaljenosti. Promotrite 1. sliku. Kolika je Euklidska, a kolika kvartovsku udaljenost između točaka 1 i 2? Koja je od prikazanih putanja A, B i C prikazuje najkraću kvartovsku udaljenost između točaka 1 i 2?



Slika 1.: Slika uz zadatak 1.

25. Matrica M, prikazuje put između točaka $A(0, 0)$ i $B(7, 6)$, gdje element u gornjem lijevom kutu matrice predstavlja ishodište koordinatnog sustava. Odgovorite:

- Jesu li točke A i B 4-povezane i/ili 8-povezane? Kolika je duljina puta između točaka A i B?
- Izrazite i izračunajte šahovsku, kvartovsku i euklidsku udaljenost između točaka A i B.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

26. Neka je zadana prostorno kontinuirana slika određena s vrijednostima intenziteta $I(x, y)$. Definirajte gradijent u točki, njegov iznos i smjer. Navedite neke gradijentne operatore koje koristimo za estimaciju gradijenta na prostorno diskretnim slikama. Koje aproksimacije se koriste za pojednostavljenje izraza kada želimo realizirati estimaciju iznosa gradijenta u cjelobrojnoj aritmetici?

27. Definirajte Robertsov gradijentni operator. Primijenite ga na sliku $I(x, y)$. Izračunajte iznos i smjer gradijenta na mjestu podcrtanog elementa matrice.

$$I(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

28. Objasnite prostorno usrednjavanje te primjenu u filtriranju šuma. Navedite prednosti i mane. Odredite rezultat usrednjavanja slike u maskom dimenzija 3×3. Kod filtriranja maska mora biti u potpunosti unutar slike u.

$$u = \begin{bmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

29. Definirajte medijan filtar i objasnite njegova svojstva i uporabu. Za koje vrste šuma median filtar daje dobre rezultate, a za koje ne. Odredite rezultat median filtriranja slike u ako je prozor W dimenzija 3×3. Kod filtriranja prozor W mora biti u potpunosti unutar slike u.

$$u = \begin{bmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

30. Navesti i objasniti izraze za prostorno usrednjavanje i medijan filtriranje. Koja vrsta šuma se najbolje uklanja prostornim usrednjavanjem, a koja medijan filtriranjem? Odredite rezultat medijan filtriranja i prostornog usrednjavanja slike u maskom dimenzija 3×3. Kod filtriranja maska mora biti u potpunosti unutar slike u.

$$u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

31. Ako parcijalne derivacije po x i po y procijenimo izrazima $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \approx f(x - \frac{1}{2}, y) - f(x + \frac{1}{2}, y)$ i $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \approx f(x, y - \frac{1}{2}) - f(x, y + \frac{1}{2})$, odredite procjenu vrijednosti Laplaceovog operatora u diskretnom obliku. Prikažite ga u obliku matrice. Prisjetimo se, definicija Laplaceovog operatora je:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

32. Na ulaz sustava h doveden je signal a. Kao izlaz očitavamo signal b. Pretpostavite da u sustavu postoje degradacije koje možemo opisati aditivnim šumom. Opišite filtar koji možemo koristiti za restauraciju signala a iz zašumljenog signala b. Kao kriterij estimacije korisiti najmanju kvatratnu pogrešku.

33. Objasnite Wienerov filtar. Navedite osnovnu ideju za konstrukciju filtra, navedite i objasnite prijenosnu funkciju Wienerovog filtra, te objasnite vezu Wienerovog filtra i inverznog filtra.

34. Objasnite bilinearnu interpolaciju.

35. Navedite izraze za linearnu i nelinearnu transformaciju.

36. Objasnite razliku između klasifikacije bez nadzora i klasifikacije pod nadzorom. Navedite barem jedan primjer klasifikacije bez nadzora i jedan primjer klasifikacije pod nadzorom. Objasnite njihove prednosti i nedostatke.

37. Za skup slika I_n $(n = 1..N)$ gdje je slika dana kao matrica (dakle $I(x, y) = i_{x,y}$). Reducirajte broj slika na $M < N$ koristeći metodu glavnih komponenti. Po kojem kriteriju ste odabrali upravo taj podskup slika.

38. Nabrojite značajke histograma drugog reda i objasnite na koji način se te značajke računaju.

39. Izračunajte dvije značajke histograma drugog reda za sliku S, ako je međusobna pozicija dvaju točaka dana s $u_1 = u(m, n)$, $u_2 = u(m+1, n+1)$. (Prilikom konstrukcije slike u_2 pretpostavite da su van matrice u vrijednosti 0.)

$$S = \begin{bmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

40. Odredite histogram drugog reda za sliku u, za međusobni pomak piksela u iznosu od $(1, 0)$. Izračunajte dvije značajke histograma drugog reda za sliku u.

$$S = \begin{bmatrix} \underline{1} & 5 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

41. Definirajte i objasnite histograme prvog i drugog reda reda. Nacrtajte histogram prvog reda za sliku $S : \mathbf{R^2} \to [\mathbf{1}, \mathbf{5}]$. Napišite funkciju kojom dobijemo negativ slike S. Koji je njezin histogram? Nacrtajte histogram drugog reda za sliku S i njen negativ, gdje je prva vrijednost piksela iz slike S, a druga vrijednost je korespondentna vrijednost u negativu slike S.

$$S = \begin{bmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

42. Definirajte i objasnite histogram prvog i drugog reda. Nacrtajte histograme prvog reda (za sliku S_1 i S_2) i histogram drugog reda (za korespondentne piknjice slika S_1 i S_2).

$$S_1 = \begin{bmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \; i \, S_2 = \begin{bmatrix} \underline{1} & 5 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

43. Za što se koristi Sobelov operator? Koje alternativne operatore možemo koristiti? Primijenite oba Sobelova operatora na sliku u. (Odziv operatora se računa samo na pozicijama unutar slike u za koje je cijela maska sadržana unutar slike.)

$$u = \begin{bmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

44. Objasnite gradijentne operatore, objasnite na koji se način pomoću njih računa iznos i smjer gradijenta. Objasnite Robertsov gradijentni operator i primijenite ga na zadanu sliku u. (Odziv operatora se računa samo na pozicijama unutar slike u za koje je cijela maska sadržana unutar slike.)

$$u = \begin{bmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

45. Odaberite jedan Laplaceov 3×3 diskretni operator (s predavanja), te objasnite na koji se način pomoću njega detektira položaj rubova na slici. Primijenite odabrani Laplaceov operator na zadanu sliku u. (Odziv operatora se računa samo na pozicijama unutar slike u za koje je cijela maska sadržana unutar slike.)

$$u = \begin{bmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

46. Binarna slika sadrži horizontalne linije. Odredite 1x3 masku koja se može koristiti za detekciju prekida takvih linija. Duljina prekida koji se detektira je 1 piknjica, intenzitet linija je 1, intenzitet pozadine 0, a konvolucija maskom na mjestu prekida treba davati vrijednost 1, a na ostalim mjestima vrijednost različitu od 1.

47. Opišite Tomita metodu višemodalne segmentacije.

48. Opišite Hough-ovu transformaciju i navesti primjene. Napišite pseudokod algoritma.

49. Skicirajte Houghovu transformaciju točaka $A(0,0), B(1,0), C(1,1), D(0,1)$ u Houghovoj domeni (ρ, θ). Na slici označite u što su se preslikale točke A, B, C i D te pravci koji ih povezuju $(p_{AB}, p_{AC}, ...)$.

50. Zadan je skup podataka y_i u N-dimenzionalnom prostoru. Ako broj podataka klase K_i u ξ okolini točke x označimo s $B_i(x)$, definirajte pravilo za klasifikaciju uzoraka temeljeno na najbližem susjedstvu. Koji je odnos uvjetne vjerojatnosti i $B_i(x)$. Koji je odnos Bayesovog MAP klasifikatora i klasifikatora temeljnog na najbližem susjedstvu (izraziti formulom i riječima).

51. Objasnite granične skalarne transformacije.

52. Objasnite gramatiku u okviru teorije formalnih jezika i objasnite njezinu primjenu u sintaktičkim metodama opisa oblika.

53. Zadana je matrica oblika M. Nacrtajte objekt predstavljen tom matricom.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

54. Navedite matricu izometrijske transformacije u homogenim koordinatama i objasnite njena svojstva.

55. Navedite matrice za 2-D translaciju, rotaciju i skaliranje u homogenim koordinatama. Napisati izraz za transformaciju koordinata ako se transformacija sastoji od translacije i rotacije (tim redoslijedom).

56. Definirajte translaciju, rotaciju i skaliranje u homogenim koordinatama. Ovisi li rezultat o redoslijedu geometrijskih transformacija? Izračunajte gdje će se nalaziti točka $T = (2, 5)$ nakon rotacije od 90^o oko ishodišta i translacije za iznos $(2, 2)$.

57. Navedite matricu afine transformacije u homogenim koordinatama i objasnite njena svojstva. Izračunajte elemente a_{12} i a_{21} ako je matrica sastavljena od operacije rotacije za $\frac{\pi}{4}$, a zatim skaliranja za 2 po x osi te $\frac{1}{2}$ po y osi.

58. Koje osnovne geometrijske transformacije slike poznajete? U običnom matičnom obliku prikažite geometrijsku transformaciju vektora (x, y) sastavljenu od pomaka za $(3, 4)$, rotacije za 90^o i skaliranja za $(2, \frac{1}{2})$. Izračunajte matricu zadane afine transformacije u homogenim koordinatama.

59. Na prostorno kontinuiranu sliku $S(x, y)$ primijenjene su različite geometrijske transformacije da bi se dobila deformirana slika $S_D(x, y)$. Transformacije su primijenjene ovim redoslijedom: pomak $(t_x, t_y) = (1, 3)$, skaliranje za faktor $(s_x, s_y) = (2, \frac{1}{2})$, te rotacija oko za $\phi = \frac{\pi}{4}$ u smjeru obrnutom od kazaljke na satu. Odredite matricu transformacije u homogenim koordinatama. Na kojem mjestu u deformiranoj slici će se nalaziti točka $S(3, 5)$. Bi li se postigao isti rezultat ukoliko bismo geometrijske transformacije primijenili obrnutim redoslijedom? Zašto?

60. Što su deformabilni modeli. Navedite jedan primjer modeliranja krivuljom i objasnite ga.

61. Što je segmentacija srednjim pomakom? Napišite korake algoritma. Kako se računa srednji pomak (formula)?

62. Navedite nekoliko primjera detekcije linije u slici.

63. Segmentirajte sliku $S(x, y)$, metodom izrastanja područja temeljenoj na sličnosti dvaju susjednih točaka. Kriterij sličnosti točaka definiran je da razlika njihovih vrijednosti iznosi maksimalno 3. Za definiciju povezanog područja koristite 4-susjedstvo. Koliko komponenti ima segmentirana slika?

$$S(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ 3 & 9 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

64. Segmentirajte sliku $S(x, y)$, metodom izrastanja područja temeljenoj na sličnosti dvaju susjednih područja. Kriterij sličnosti područja definiran je razlikom njihovih srednjih vrijednosti koja može iznositi maksimalno 3. Za definiciju povezanog područja koristite 4-susjedstvo. Smjer rasta područja je s lijeva prema desno te odozgo prema dolje, jednako kao i odabir točke oko koje područje izrasta. Koliko komponenti ima segmentirana slika?

$$S(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ 3 & 9 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

65. Navedite sve korake algoritma K-srednjih vrijednosti. Objasnite kako taj algoritam koristimo za amplitudnu segmentaciju slike.

66. Objasnite jednu mjeru sličnosti koja se može koristiti za usporedbu dva slučajna vektora.

67. Što je segmentacija srednjim pomakom? Napišite korake algoritma. Navedite izraz za računanje srednjeg pomaka.

2. Primjeri riješenih zadataka

2.1. Zadatak

Opišite Houghovu transformaciju i navesti primjene. Napišite pseudokod algoritma.

Houghova transformacija se koristi za pronalaženje linija u slici. U općenitom obliku može se koristiti i za pronalaženje različitih, parametraski zadanih, krivulja. U sklopu ovog predmeta razmatrat ćemo samo njen osnovni oblik u kojem se koristi za pronalaženje pravaca u slici.

Hughova transformacija polazi od parametarske jednadžbe pravca u obliku:

$$\rho = x \cdot sin(\phi) + y \cdot cos(\phi) \tag{1}$$

gdje je svaka točka (x, y) pravca $y = a \cdot x + b$ zadana svojom udaljnošću od ishodišta (ρ) i kutom koji zatvara s x-osi (ϕ). Stoga Houghovu transformaciju možemo promatrati kao transformaciju iz (x, y) koordinatnog sustava u (ρ, ϕ) koordinatni sustav. Houghova transfomacija je obično definirana kao diskretna transformacija, te je zbog toga potrebna diskretizacija rješenja te još neki dodatci koji će omogućiti njenu izvedbu na računalu, poput inicijalizacija polja i sl.

Pretpostavimo da se pravac koji želimo transformirati Houghovom transformacijom nalazi u slici $S(x, y)$ i da je dan s vrijednošću slike $S(x, y) = 1$. Ako Houghovo polje (Houghov prostor) označimo s $A(\rho, \phi)$, sljedeći algoritam možemo koristiti za pronalaženje pravca u slici:

- Inicijaliziraj Houghovo polje na nulu: $A(\rho, \phi) = 0$
- Za svaku točku (x, y) u slici za koju je $S(x, y) = 1$
  - $\forall \phi = [0, \phi_{max}]$
    - $\rho = x \cdot sin(\phi) + y \cdot cos(\phi)$
    - Kvantiziraj dobiveni ρ za odabrani ϕ
    - $A(\rho, \phi) = A(\rho, \phi) + 1$

U Houghovom prostoru svaka točka pravca bit će predstavljena "sinusoidom", što je vidljivo iz izraza 1, za bilo koji odabir točaka x i y. Dakle, ukoliko Houghovo polje prikažemo kao sliku, svaka točka će biti jedna sinusoida, a sinusoide svih kolinearnih točaka će se sječi u jednoj točki što ćemo vidjeti kao najsjajniji dio Houghova polja. Očitanjem položaja točke u (ρ, ϕ) jednoznačno smo definirali pravac koji smo željeli pronaći.

Jedna od primjena Houghove transformacije je nakon detekcije rubova u slici, kada zbog prekida na rubovima ili pronalaženja prevelikog broja rubova želimo izolirati rub koji zadovoljava neku parametarsku jednadžbu. Osim pravaca Houghova transformacija se često koristi i za pronalaženje kružnica, elipsa ili drugih parametarskih krivulja.

2.2. Zadatak

Ako parcijalne derivacije po x i po y procijenimo izrazima $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) \approx f(x-\frac{1}{2},y) - f(x+\frac{1}{2},y)$ i $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) \approx f(x,y-\frac{1}{2}) - f(x,y+\frac{1}{2})$, odredite procjenu vrijednosti Laplaceovog operatora u diskretnom obliku. Prikažite ga u obliku matrice. Prisjetimo se, definicija Laplaceovog operatora je:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Izračunajmo prvo $\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x}f(x-\frac{1}{2},y) - f(x+\frac{1}{2},y) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}f(x-\frac{1}{2},y) - \frac{\partial}{\partial x}f(x+\frac{1}{2},y) \\
&= f(x-1,y) - f(x,y) - f(x,y) + f(x+1,y) \\
&= f(x-1,y) - 2\cdot f(x,y) + f(x+1,y)
\end{aligned} \tag{2}$$

Kako ekvivalentno vrijed i za $\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y) = f(x,y-1) - 2\cdot f(x,y) + f(x,y+1) \tag{3}$$

možemo pisati:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y) \\
&= f(x-1,y) - 2\cdot f(x,y) + f(x+1,y) + f(x,y-1) - 2\cdot f(x,y) + f(x,y+1) \\
&= f(x-1,y) + f(x,y-1) - 4\cdot f(x,y) + f(x+1,y) + f(x,y+1)
\end{aligned} \tag{4}$$

Ovo očito možemo zapisati sljedećom matricom:

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

2.3. Zadatak

Napišite definiciju linearnog operatora. 2D sustav je definiran operatorom L tako da je

$$y(m,n) = L[x(m,n)] = 3x(m,n) + 4 \tag{6}$$

gdje x(m, n) predstavlja jednu točku slike. Pokažite da je L (ne)linearan operator

Operator L je linearan ako ima svojstvo homogenosti:

$$L(az(m,n)) = aL(z(m,n)) \tag{7}$$

... i aditivnosti:

$$L(z(m,n)+q(m,n)) = L(z(m,n)) + L(q(m,n)) \tag{8}$$

što možemo zapisati zajedno kao:

$$L(az(m,n)+bq(m,n)) = aL(z(m,n)) + bL(q(m,n)) \tag{9}$$

Primijetite da je za dokaz nelinearnosti dovoljno pokazati da barem jedno svojstvo ne vrijedi. Dokaz ćemo izvesti dovodeći do kontradikcije. Pretpostavimo da je sustav 6 linearan. Ako uzmemo $x(m,n) = az(m,n)$ tada vrijedi:

$$\begin{aligned} L[az(m,n)] &= 3(az(m,n)) + 4 \\ &= 3az(m,n) + 4 \\ &\neq aL[z(m,n)] \end{aligned} \tag{10}$$

čime smo pokazali da ne vrijedi homogenost, pa aditivnost ne moramo ispitivati.[1]

Ako bismo ipak željeli pokazati da je sustav nelinearan koristeći jednadžbu 9 trebamo definirati:

$$\begin{aligned} y_1(m,n) &= L[x_1(m,n)] \\ y_2(m,n) &= L[x_2(m,n)] \end{aligned} \tag{11}$$

te pokazati da vrijedi

$$\begin{aligned} ay_1(m,n) + by_1(m,n) \quad &= aL[x_1(m,n)] + bL[x_1(m,n)] \\ &= L[ax_1(m,n)] + L[bx_1(m,n)] \end{aligned} \tag{12}$$

kako iz 6 vrijedi da:

$$aL[x(m,n)] = 3ax(m,n) + 4a \tag{13}$$

vrijedi i:

$$aL[x_1(m,n)] + bL[x_1(m,n)] = 3ax_1(m,n) + 4a + 3bx_1(m,n) + 4b \tag{14}$$

što je očito različito od

$$L[ax_1(m,n)] + L[bx_1(m,n)] \quad = 3ax_1(m,n) + 4 + 3bx_1(m,n) + 4 \tag{15}$$

$$\neq 3ax_1(m,n) + 4a + 3bx_1(m,n) + 4b \tag{16}$$

čime smo ponovno pokazali da sustav nije linearan dovodeći do kontradikcije.

2.4. Zadatak

Izračunajte 2D Fourierovu transformaciju te skicirajte amplitudnu karakteristiku signala: $f(x,y) = sinc(x)sinc(y)$.

Kako znamo da vrijedi:

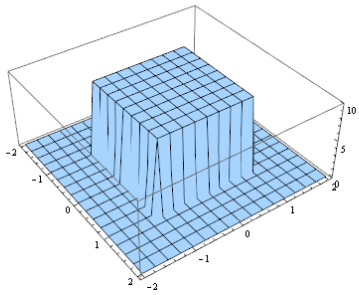
$$\mathcal{F}(sinc(x)) = rect(\omega) \tag{17}$$

Ovaj zadatak možemo jednostavno riješiti pozivajući se na svojstvo separabilnost Fourierove transformacija. Stoga ćemo samo dati rješenje $\mathcal{F}(f(x,y))$ kao:

$$\mathcal{F}(sinc(x)sinc(y)) = rect(\omega_1)rect(\omega_2) \tag{18}$$

Amplitudnu karakteristiku je sada lako nacrtati kao kvadar u dvodimenzionalnom prostoru (pogledajte Sliku 2.).

Možete li objasniti zašto ovo vrijedi?



Slika 2.: Skica amplitudne karakteristike $\mathcal{F}(sinc(x)sinc(y))$

2.5. Zadatak

Na primjeru pokažite razliku između linearne i cirkularne konvolucije.

Linearna konvolucija dvaju diskretnih 2D signala definirana je sa:

$$h(m,n) * u(m,n) = \sum \sum h(m-i, n-j) \cdot u(i,j) \tag{19}$$

dok se cirkularna konvolucija definira sa:

$$h(m,n) \star u(m,n) = \sum \sum h(< m-i|M >, < n-j|N >) \cdot u(i,j) \tag{20}$$

gdje su M i N dimenzije slike, a $< | >$ označava modulo dijeljenje. Modulo dijeljenje je matematička operacija koja vraća ostatak cjelobrojnog dijeljanja.[2]

Promotrimo slijedeće slike $u(m,n)$ i $h(m,n)$:

$$h(m,n) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad u(m,n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

za njih vrijedi:

$$h(m,n) * u(m,n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad h(m,n) \star u(m,n) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Primijetite da je veličina slike linearne konvolucije određena dimenzijama ulaznih slika u i h na način $M = M_u \cdot M_h - 1$ i $N = N_u \cdot N_h - 1$, a kod cirkularne konvolucije je određena relacijama $M = \max(M_u, M_h)$ i $N = \max(N_u, N_h)$.