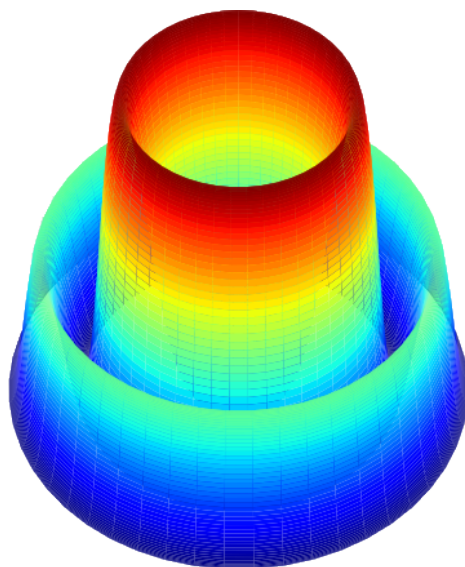


SVEUČILIŠTE U SPLITU
Prirodoslovno-matematički fakultet



Primjer $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X } 2_{\epsilon}$ dokumeta

Primjerak sastavio:
Petar STIPANOVIĆ

Za:
Vježbe iz MPA1

Split, 2011/12

Sadržaj

1. Uvod	1
2. Centralno simetrični 2D potencijal	2
2.1. Schrödingerova jednačba i mjerne jedinice	2
2.2. Kutni dio rješenja	2
2.3. Radijalni dio rješenja	2
2.3.1. $E' > U$	2
2.3.2. $E' > U$	3
3. Beskonačno duboka kružna potencijalna jama	4
3.1. Energijski spektar	4
3.2. Valne funkcije	5
3.2.1. Realni dio za različit n_r , $m=0$	5
4. Konačno duboka kružna potencijalna jama	6
5. Zaključak	7

Popis slika

1	Besselove funkcije (prve vrste)	2
2	Neumannove funkcije (Besselove funkcije druge vrste)	3
3	Beskonačno duboka potencijalna jama	4
4	Energijski nivoi (- -) i radijalne valne funkcije čestice mase M u beskonačnoj kružnoj potencijalnoj jami radijusa ρ_0 (debela crvena krivulja označava centrifugalnu barijeru)	5
5	Energijski nivoi (- -) i radijalne valne funkcije čestice mase M u beskonačnoj kružnoj potencijalnoj jami radijusa ρ_0 (debela crvena krivulja označava centrifugalnu barijeru)	5

Popis tablica

1	Energijski spektar čestice mase M u beskonačnoj kružnoj potencijalnoj jami radijusa ρ_0	4
---	--	---

Sažetak

Ovaj dokumnet sadrži tekstualno isprekidani sadržaj jer je cilj bila samo demonstracija pisanja i numeriranja naslova, ubacivanja slika, tablica i formula te referenciranje na njih.

1. Uvod

Rješavamo problem čestice mase M u beskonačno dubokoj kružnoj potencijalnoj jami

$$V_B(\rho) = \begin{cases} 0 & ; \rho \leq \rho_0 \\ \infty & ; \rho > \rho_0 \end{cases} \quad (1)$$

i konačno dubokoj kružnoj potencijalnoj jami

$$V_K(\rho) = \begin{cases} 0 & ; \rho \leq \rho_0 \\ V_0 & ; \rho > \rho_0 \end{cases} \quad (2)$$

u dvodimenzionalnom (2D) polarnom sustavu te uspoređujemo rješenja. Obratit ćemo pozornost na vezana stanja i promotriti kako rješenja ovise o dubini jame V_0 i momentu količine gibanja te nacrtati radijalne valne funkcije, kao i valne funkcije i gustoće vjerojatnosti u ravnini.

2. Centralno simetrični 2D potencijal

2.1. Schrödingerova jednačba i mjerne jedinice

Stacionarnu Schrödingerovu jednačbu u 2D prostoru

...

2.2. Kutni dio rješenja

Riješit ćemo prvo desnu stranu jednakosti...

2.3. Radijalni dio rješenja

Preostaje riješiti lijevu stranu jednakosti...

čime diferencijalna jednačba za radijalni dio rješenja postaje

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{m^2}{r^2} \right) R(r) = \pm R(r) \quad (22)$$

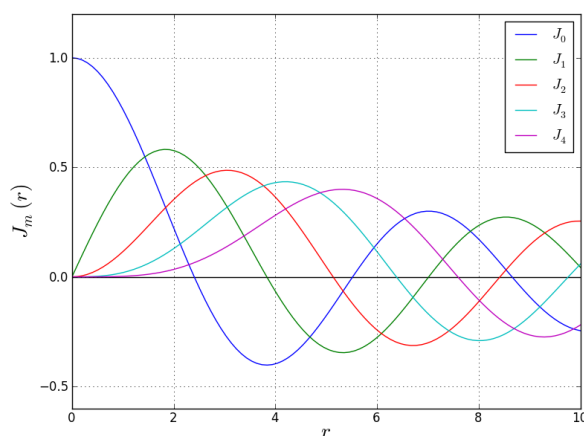
gdje se u oznaci \pm za klasično dozvoljeno područje uzima $+$, a za klasično zabranjeno područje $-$...

2.3.1. $E' > U$

Za $E' > U$ dva linearno nezavisna rješenja [1] diferencijalne jednačbe (22) jesu:

- Besselove funkcije

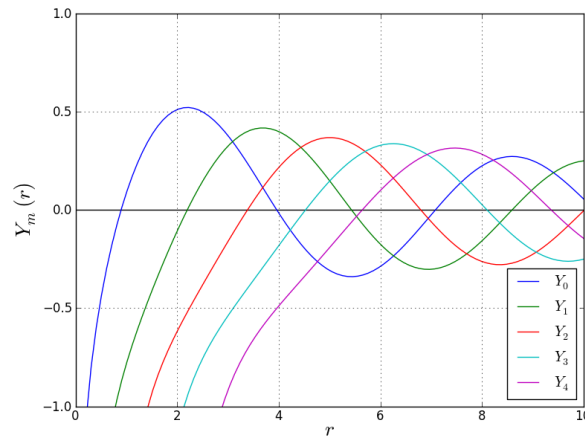
$$J_{|m|}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(|m| + n + 1)} \left(\frac{r}{2} \right)^{|m|+2n} \quad (24)$$



Slika 1: Besselove funkcije (prve vrste)

- Neumannove funkcije

$$Y_{|m|}(r) = \frac{J_{|m|}(r) \cos(m\pi) - J_{-|m|}(r)}{\sin(m\pi)} \quad (25)$$



Slika 2: Neumannove funkcije (Besselove funkcije druge vrste)

Zanimaju nas vezana stanja pa moramo imati lokaliziranu valnu funkciju, a pošto Neumannove funkcije divergiraju u nuli, odbacujemo ih, nisu normalizabilne.

2.3.2. $E' > U$

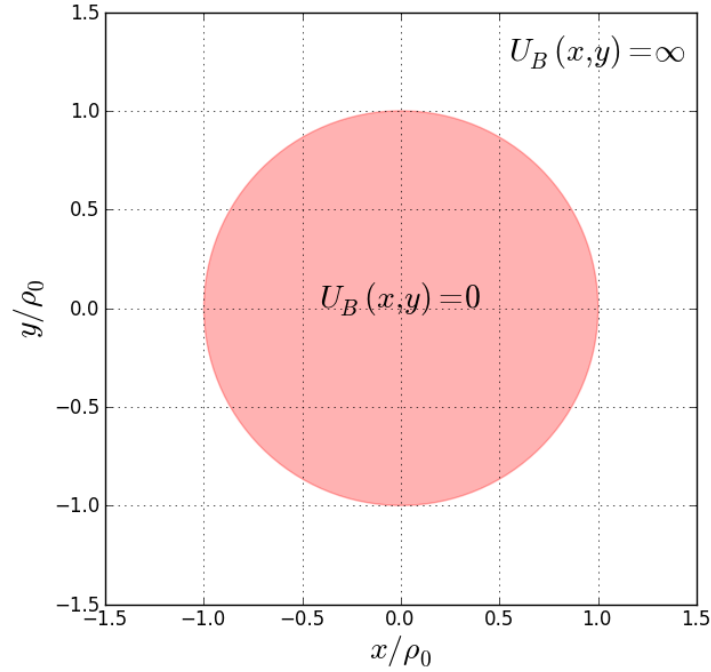
Za $E' > U$ dva linearno nezavisna rješenja ...

3. Beskonačno duboka kružna potencijalna jama

Promatramo čestice mase M u beskonačno dubokoj kružnoj potencijalnoj jami (33) koja u jedinicama ρ_0 glasi

$$U_B(\rho') = \begin{cases} 0 & ; \rho' \leq 1 \\ \infty & ; \rho' > 1 \end{cases} \quad (33)$$

Potencijal je beskonačan van kruga na slici 3 pa valna funkcija mora biti u tom



Slika 3: Beskonačno duboka potencijalna jama

području 0. Unutar kruga je...

3.1. Energijski spektar

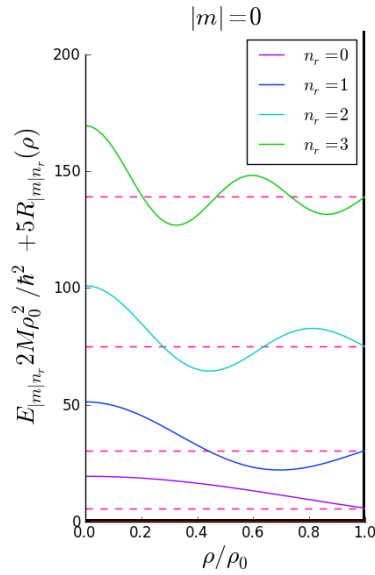
Prema tome energijski nivoi uz pokrate...

$m \setminus E$	$E'_{m,n_r} = E_{m,n_r} 2M\rho_0^2/\hbar^2$			
m	$E'_{m,0}$	$E'_{m,1}$	$E'_{m,2}$	$E'_{m,3}$
0	5.8	30.5	75.9	139.0
1	14.7	49.2	103.5	177.5
-1				
2	26.4	70.8	135.0	218.9
-2				

Tablica 1: Energijski spektar čestice mase M u beskonačnoj kružnoj potencijalnoj jami radijusa ρ_0

3.2. Valne funkcije

Konačni oblik za radijalni dio rješenja dobit ćemo normirajući...



Slika 4: Energijски nivoi (- -) i radijalne valne funkcije čestice mase M u beskonačnoj kružnoj potencijalnoj jami radijusa ρ_0 (debeli crveni krivulja označava centrifugalnu barijeru)

Na slikama 4 i 5 možemo uočiti kako moment količine gibanja

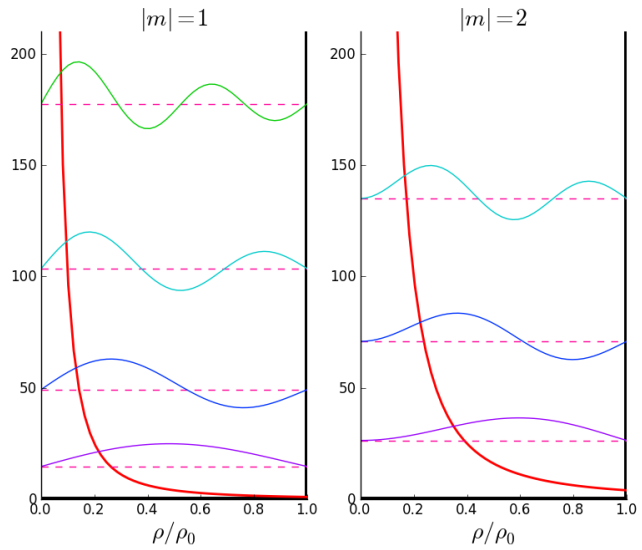
$$L_z = m\hbar$$

generira centrifugalnu barijeru

$$\left(\frac{m}{\rho'}\right)^2$$

pa su za veće $|m|$ -ove radijalne valne funkcije sve više i više stisnute prema rubu, a u središtu jame padaju na nulu. Veći efekt je vidljiv na nižim stanjima, odnosno za isti m , a manji n_r . Centrifugalna barijera na neki način gura valne funkcije prema $\rho = \rho_0$ i općenito smanjuje prostor dostupan čestici unutar šupljine pa stanja s većim m -ovima imaju veću energiju.

Za $m = 0$ radijalne valne funkcije imaju maksimum u središtu jame.



Slika 5: Energijски nivoi (- -) i radijalne valne funkcije čestice mase M u beskonačnoj kružnoj potencijalnoj jami radijusa ρ_0 (debeli crveni krivulja označava centrifugalnu barijeru)

3.2.1. Realni dio za različiti n_r , $m=0$

...

4. Konačno duboka kružna potencijalna jama

...

5. Zaključak

Energije su kvantizirane. Za česticu, momenta količine gibanja $\vec{L}_z = m\hbar\hat{z}$, u beskonačno dubokoj kružnoj potencijalnoj jami, moguće je naći za svaki $m \in \mathbf{Z}$ beskonačno mnogo vezanih stanja, dok broj stanja u slučaju konačno duboke potencijalne jame ovisi o dubini jame...

Literatura

- [1] Eric W. Weisstein: *Bessel Differential Equation*, MathWorld—A Wolfram Web Resource, URL: <http://mathworld.wolfram.com/BesselDifferentialEquation.html>, prosinac 2011.