

KUT I MJERA KUTA

Mjera kuta $\sphericalangle pVq$:

- negativna (ako iz p u q dolazimo vrtnjom u smjeru kazaljke na satu)
- pozitivna (ako iz p u q dolazimo vrtnjom suprotno smjeru kazaljke na satu)

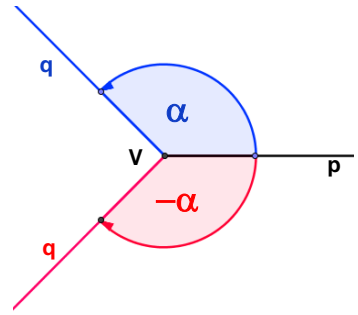
Funkcija najveći cjelobrojni dio

$$f(x) = [x] = \text{"najveći cijeli broj manji ili jednak broju x"}$$

Glavna mjera kuta α' :

u stupnjevima ($0 \leq \alpha' < 360^\circ$): $\alpha' = \alpha^\circ - \left\lfloor \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \right\rfloor \cdot 360^\circ$

u radijanima ($0 \leq \alpha' < 2\pi$): $\alpha' = \alpha(\text{rad}) - \left\lfloor \frac{\alpha(\text{rad})}{2\pi} \right\rfloor \cdot 2\pi$



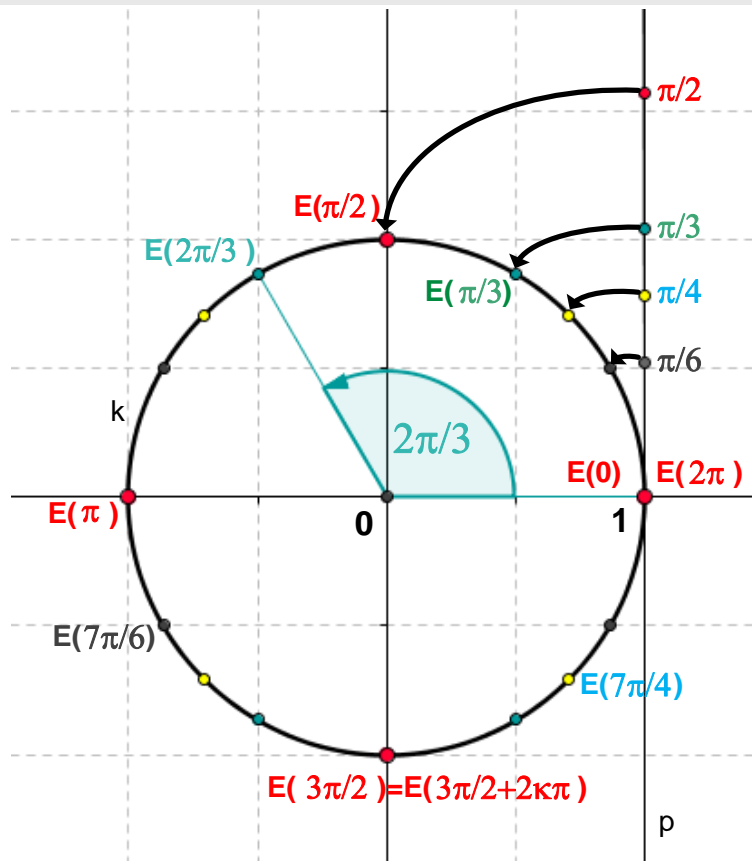
Duljina luka: $l = \alpha(\text{rad}) \cdot r$

Površina kružnog isječka: $P = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}\alpha(\text{rad}) \cdot r^2$

Pretvorba stupnjeva u radijane: $\alpha(\text{rad}) = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \cdot \pi$

Pretvorba radijana u stupnjeve: $\alpha^\circ = \frac{\alpha(\text{rad})}{\pi} \cdot 180^\circ$

BROJEVNA KRUŽNICA



Namatanjem brojevnog pravca p na kružnicu definirano je pridruživanje realnih brojeva točkama brojevne kružnice. Ovo preslikavanje zovemo eksponencijalno preslikavanje :

$$(t \in \mathbb{R}) \mapsto E(t) \in k(0,1)$$

p - pravac paralelan s y osi, a prolazi točkom (1,0)
 k(0,1) - brojeva kružnica

Na slici je prikazano pridruživanje pozitivnih brojeva, a negativne brojeve pridružujemo u suprotnom smjeru od pozitivnih, odnosno u smjeru kretanja kazaljke.

Primjeri nekih točaka:

$$E(0) = E(2\pi) = (1,0)$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1)$$

$$E(\pi) = (-1,0)$$

U svaku točku kružnice preslika se beskonačno mnogo točaka brojevnog pravca jer vrijedi:

$$E(\alpha) = E(\alpha + 2k\pi)$$

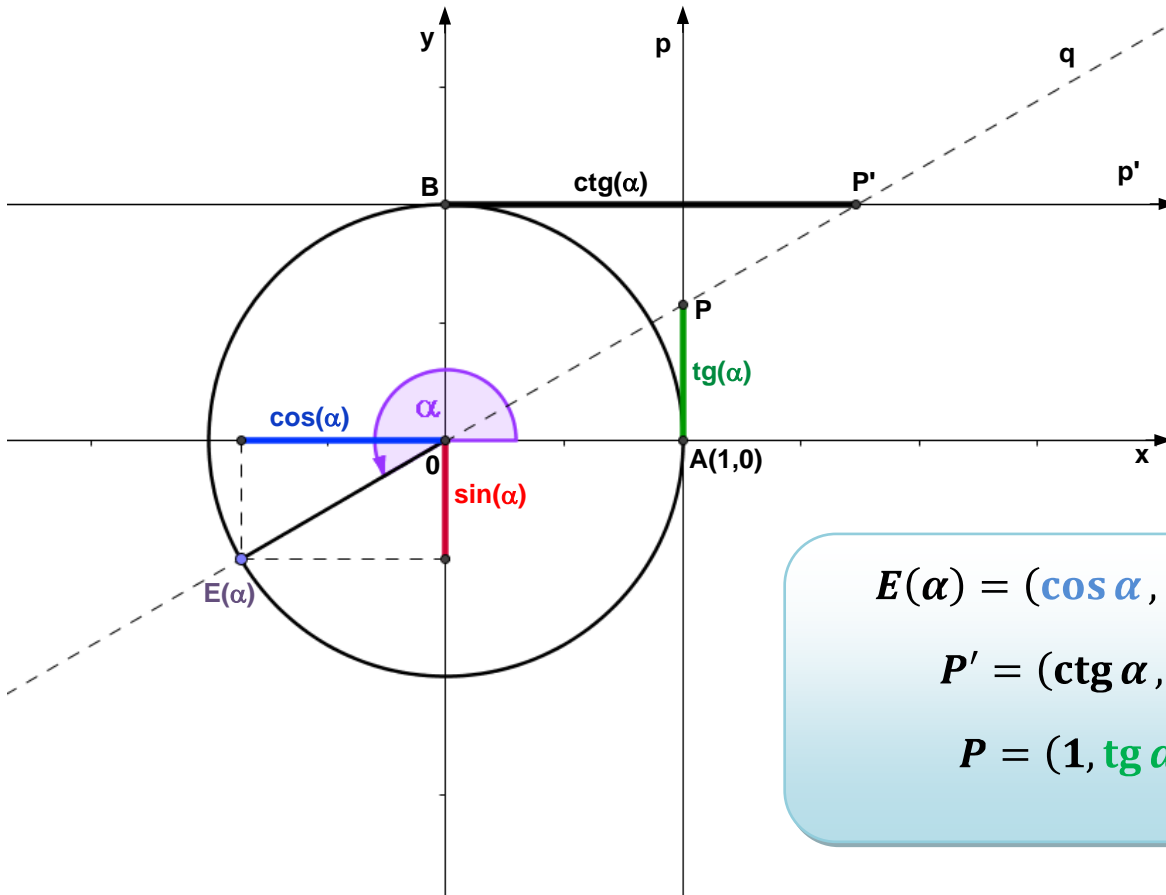
$$E(\alpha') = E(\alpha)$$

α' - glavna mjera kuta

VRIJEDNOSTI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

$\alpha' / ^\circ$	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
α' / rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{tg}(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\text{ctg}(\alpha)$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$
$\alpha / ^\circ$	-360	-330	-315	-300	-270	-240	-225	-210	-180	-150	-135	-120	-90	-60	-45	-30	0

DEFINICIJA TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA



$$E(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$P' = (\operatorname{ctg} \alpha, 1)$$

$$P = (1, \operatorname{tg} \alpha)$$

$E(\alpha) \in k(0,1)$ - točka na brojevnoj kružnici čije su koordinate \cos i \sin kuta α
 p' - pravac paralelan x-osi, a prolazi točkom $B(0,1)$
 p - pravac paralelan y-osi, a prolazi točkom $A(1,0)$
 q - pravac koji prolazi točkama $O(0,0)$ i $E(\alpha)$
 $P' = q \cap p'$; $P = q \cap p$

α /kvadrant	I	II	III	IV
$\sin(\alpha)$	+	+	-	-
$\cos(\alpha)$	+	-	-	+
$\operatorname{tg}(\alpha)$	+	-	+	-
$\operatorname{ctg}(\alpha)$	+	-	+	-

ODREĐIVANJE VRIJEDNOSTI KUTA

$\sin(\alpha) = y \in [-1,1]$	$\cos(\alpha) = x \in [-1,1]$	$\operatorname{tg}(\alpha) = t \in \mathbb{R}$	$\operatorname{ctg}(\alpha) = t' \in \mathbb{R}$
$-\frac{\pi}{2} \leq \{\alpha = \arcsin(y)\} \leq \frac{\pi}{2}$	$0 \leq \{\alpha = \arccos(x)\} \leq \pi$	$-\frac{\pi}{2} < \{\alpha = \arctg(t)\} < \frac{\pi}{2}$	$0 < \{\alpha = \operatorname{arccot}(t')\} < \pi$

Imamo beskonačno mnogo kuteva za koje trigonometrijska funkcija poprima istu vrijednost, a samo jedan kut nam vraća neka arkus funkcija. $\alpha = \arccot(t') = \arctg\left(\frac{1}{t'}\right)$

OSNOVNI TRIGONOMETRIJSKI IDENTITETI

NAPOMENA

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$	$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$	$\operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = \frac{\cos t}{\sin t}$	$\sqrt{x^2} = x $
---------------------------	---	--	--------------------

PARNOST FUNKCIJA

Parna funkcija: $f(-x) = f(x)$	Parna funkcija ima graf simetričan s obzirom na y os.
Neparna funkcija: $f(-x) = -f(x)$	Neparna funkcija ima graf simetričan s obzirom na ishodište koordinatnog sustava.

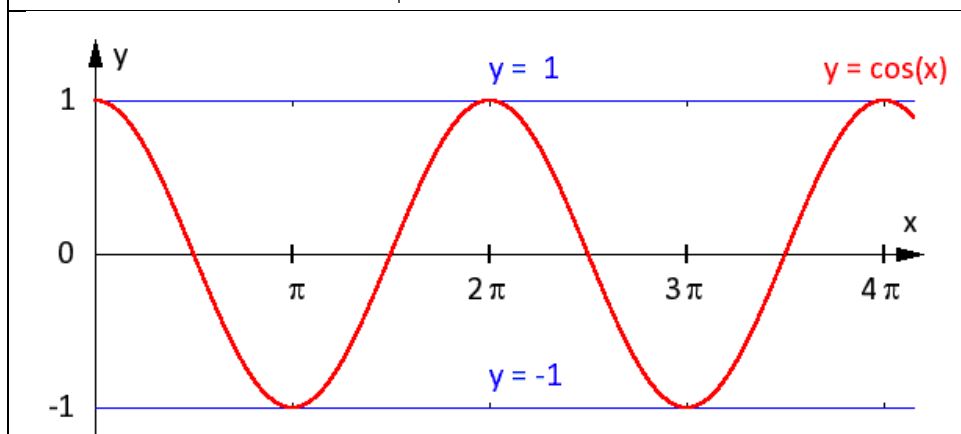
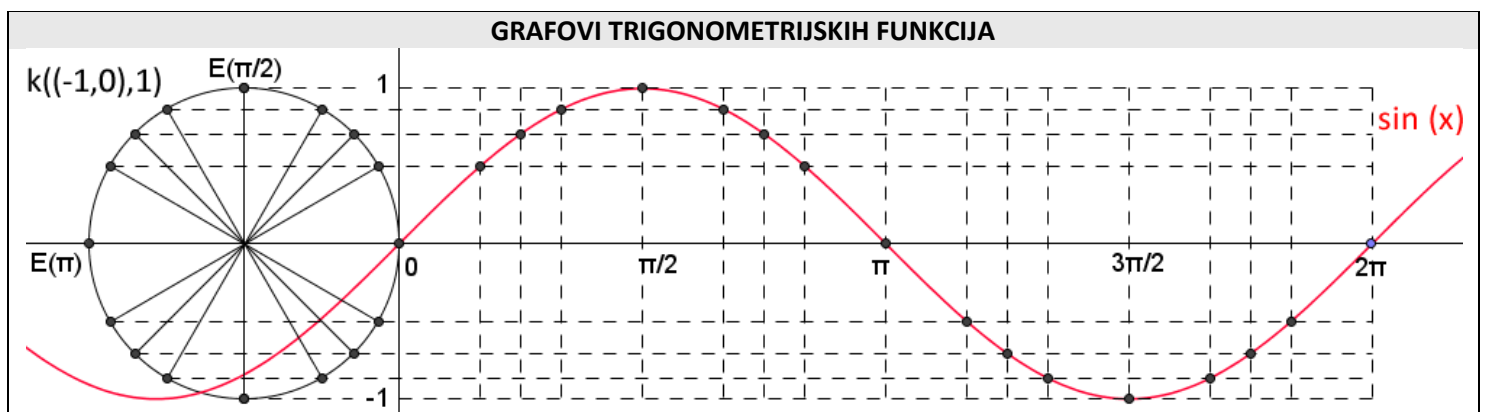
PERIODIČNOST FUNKCIJA

Funkcija je periodična ako postoji broj $P \neq 0$ takav da za svaki $t \in \mathcal{D}(f)$ vrijedi $f(t) = f(t + P)$.
 P – period funkcije ; P_0 – temeljni period (najmanji pozitivni P)

SVOJSTVA TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Parnost: $\left. \begin{aligned} \cos(-x) &= \cos(x) \\ \sin(-x) &= -\sin(x) \\ \operatorname{tg}(-x) &= -\operatorname{tg}(x) \\ \operatorname{ctg}(-x) &= -\operatorname{ctg}(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{parne funkcije}$	Periodičnost ($k \in \mathbb{Z}$): $\sin(t) = \sin(t + 2k\pi) \Rightarrow P_0 = 2\pi$ $\cos(t) = \cos(t + 2k\pi) \Rightarrow P_0 = 2\pi$ $\operatorname{tg}(t) = \operatorname{tg}(t + k\pi) \Rightarrow P_0 = \pi$ $\operatorname{ctg}(t) = \operatorname{ctg}(t + k\pi) \Rightarrow P_0 = \pi$
Ograničenost: $ \sin \alpha \leq 1$ $ \cos \alpha \leq 1$ za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$	Područje definicije ($k \in \mathbb{Z}$): $\operatorname{tg} t$ definiran je za svaki $\mathbb{R} \ni t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ jer $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \pm\infty$ $\operatorname{ctg} t$ definiran je za svaki $\mathbb{R} \ni t \neq k\pi$ jer $\operatorname{ctg}(k\pi) = \pm\infty$ $\sin t$ i $\cos t$ definirane su za svaki $t \in \mathbb{R}$

ADICIJSKI TEOREMI	
Kosinus zbroja i razlike $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$	Formule redukcije za sinus i kosinus funkciju $\cos(\pi - t) = -\cos t$ $\sin(\pi - t) = \sin t$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$
Sinus zbroja i razlike $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$ $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$	$\cos(\pi + t) = -\cos t$ $\sin(\pi + t) = -\sin t$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t$
Tangens zbroja i razlike $\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$ $\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$	
TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE DVOSTRUKOG KUTA	TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE POLOVIČNOG KUTA
$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$	predznak se uzima prema kvadrantu u kojem je $\alpha/2$: $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$ $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$	
UNIVERZALNA ZAMJENA	
$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$	$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$
	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$
FORMULE PRETVORBE	
Transformacija umnoška u zbroj $\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$ $\cos x \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) - \sin(x - y)]$ $\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$ $\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$	Transformacija zbroja u umnožak $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$



$$f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$$

$$(A \neq 0), (\omega > 0), (\varphi \in \mathbb{R})$$

Nazivi: ω kružna frekvencija;

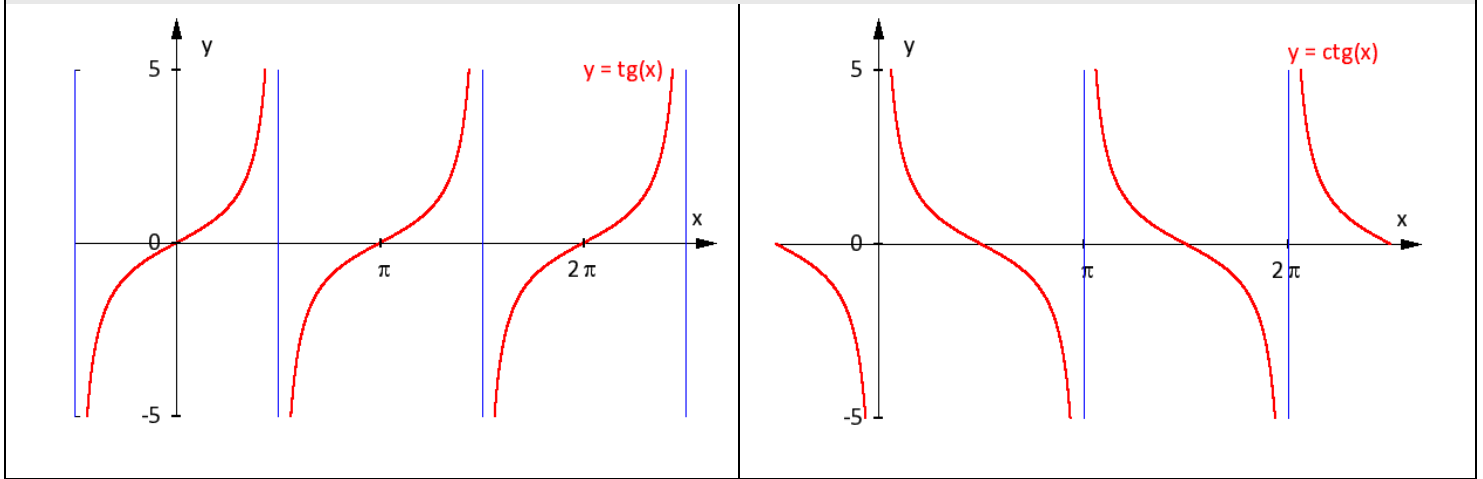
$T_0 = 2\pi/\omega$ temeljni period;

φ fazni pomak;

$|A|$ amplituda.

Graf funkcije sinus nazivamo sinusoida; kosinus kosinusoida; tangens tangensoida; kotangens kotangensoida.

GRAFOVI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA



$$f(x) = A \sin[B(x + C)] + D; (A \neq 0), (B > 0), C, D \in \mathbb{R}$$

Graf funkcije $f(x)$ dobijemo translacijom grafa funkcije $A \sin(Bx)$ za $-C$ po x -osi te za D po y -osi:

1. Nacrtamo **pomoćni koordinatni sustav** $O'x'y'$ u kojem ćemo nacrtati graf funkcije $p(x') = A \sin(Bx')$.
2. Nacrtamo **pomoćne pravce** $y' = -A$ i $y' = A$ ($p(x')$ ograničena je tim pravcima jer $p(x') \in [-A, A]$).
3. Označimo **nultočke** funkcije $A \sin(Bx')$ što su $x'_n = \frac{n\pi}{B}$, $n \in \mathbb{Z}$ (točke u kojima $p(x')$ siječe x' -os, $A \sin(Bx') = 0$).
4. Označimo **ekstreme** [točke grafa čije su koordinate (polovište segmenta između nultočaka, A ili $-A$)]. Minimumi i maksimumi periodično se izmjenjuju, a prvi ekstrem je: a) maksimum ako $A > 0$; b) minimum ako $A < 0$.
5. Nacrtamo **sinusoidu** između nacrtanih pravaca kroz ucrtane točke.
6. Ucrtamo **koordinatni sustav** Oxy čije su osi:
 - a) x paralelna sa osi x' pomaknuta za $-D$ po y'
 - b) y paralelna sa osi y' pomaknuta za $+C$ po x'
7. Graf promatrane funkcije periodično se ponavlja u intervalima $T_0 = \frac{2\pi}{B}$.

$$f(x) = A \cos[B(x + C)] + D; (A \neq 0), (B > 0), C, D \in \mathbb{R}$$

Graf funkcije $f(x)$ dobijemo analogno prethodnome za sinus sa sljedećom promjenom: 3. $x'_n = \frac{(2n+1)\pi}{2B}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$f(x) = A \cdot \operatorname{tg}[B(x + C)] + D; (A \neq 0), (B > 0), C, D \in \mathbb{R}$$

Asimptota funkcije je pravac kojem se graf funkcije približava, a ne dodiruje ga kada točka grafa odmiče u beskonačnost.

Graf funkcije $f(x)$ dobijemo translacijom grafa funkcije $A \cdot \operatorname{tg}(Bx)$ za $-C$ po x -osi te za D po y -osi:

1. Nacrtamo **pomoćni koordinatni sustav** $O'x'y'$ u kojem ćemo nacrtati graf funkcije $p(x') = A \cdot \operatorname{tg}(Bx')$
2. Označimo **nultočke** funkcije $p(x')$ što su $x'_n = \frac{n\pi}{B}$, $n \in \mathbb{Z}$ [točke u kojima $p(x')$ siječe x' -os, $p(x') = 0$]
3. Kroz polovišta između nultočaka ucrtamo vertikalne **asimptote** funkcije $p(x')$, odnosno pravce $x'_a = \frac{(2a+1)\pi}{2B}$, $a \in \mathbb{Z}$.
4. Između nacrtanih asimptota nacrtamo tangensoidu: ako je $A > 0$, iz $-\infty$ uz lijevu asimptotu kroz nultočku prema $+\infty$ uz desnu asimptotu; a ako je $A < 0$, iz $+\infty$ uz lijevu asimptotu kroz nultočku prema $-\infty$ uz desnu asimptotu;
6. Ucrtamo **koordinatni sustav** Oxy čije su osi:
 - a) x paralelna sa osi x' pomaknuta za $-D$ u smjeru y'
 - b) y paralelna sa osi y' pomaknuta za $+C$ u smjeru x'
7. Graf funkcije periodično se ponavlja u intervalima $T_0 = \frac{\pi}{B}$.

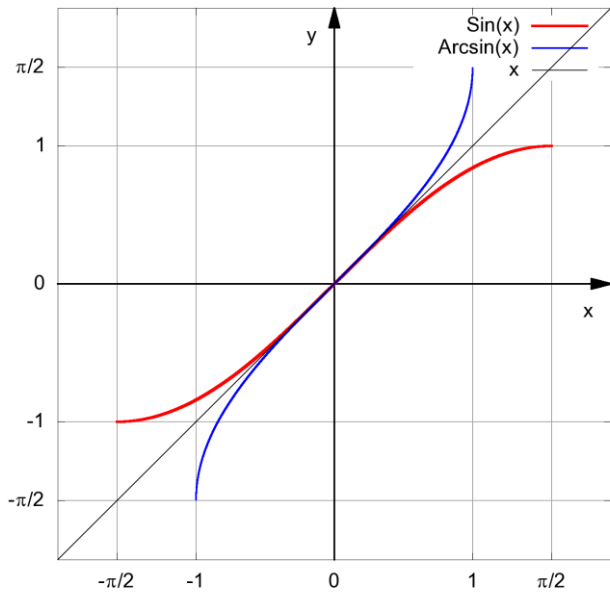
$$f(x) = A \cdot \operatorname{ctg}[B(x + C)] + D; (A \neq 0), (B > 0), C, D \in \mathbb{R}$$

Graf funkcije $f(x)$ dobijemo analogno prethodnome za tangens sa sljedećim promjenama:

2. Nultočke su: $x'_n = \frac{(2n+1)\pi}{2B}$, $n \in \mathbb{Z}$
3. Asimptote su: $x'_a = \frac{a\pi}{B}$, $a \in \mathbb{Z}$
4. Između nacrtanih asimptota nacrtamo kotangensoidu: ako je $A > 0$, iz $+\infty$ uz lijevu asimptotu kroz nultočku prema $-\infty$ uz desnu asimptotu; a ako je $A < 0$, iz $-\infty$ uz lijevu asimptotu kroz nultočku prema $+\infty$ uz desnu asimptotu

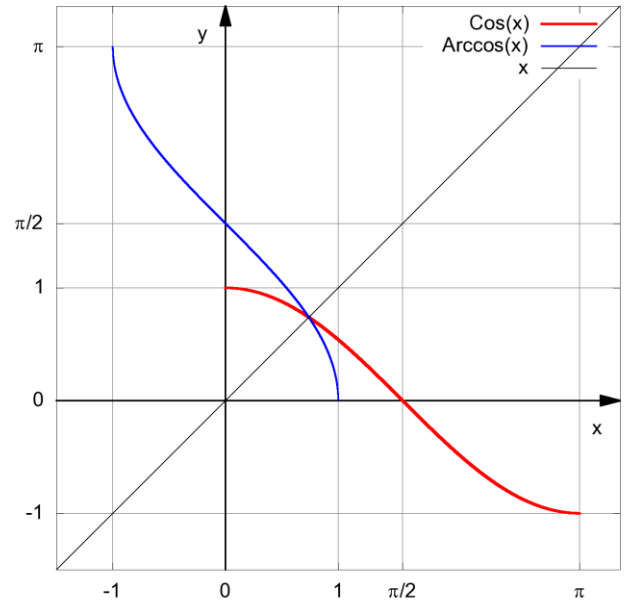
GRAFOVI CIKLOMETRIJSKIH FUNKCIJA (INVERZNE OD TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA)

Inverzne funkcije simetrične su s obzirom na pravac $y=x$.



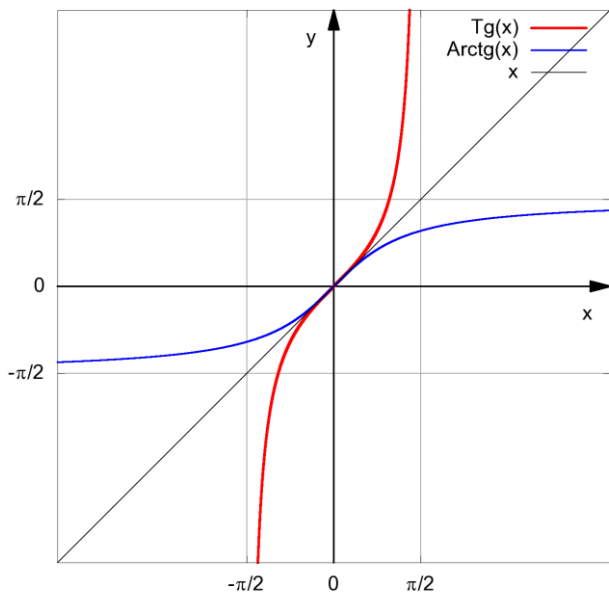
$$\text{Sin} = \sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\text{Arcsin} = \text{Sin}^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$



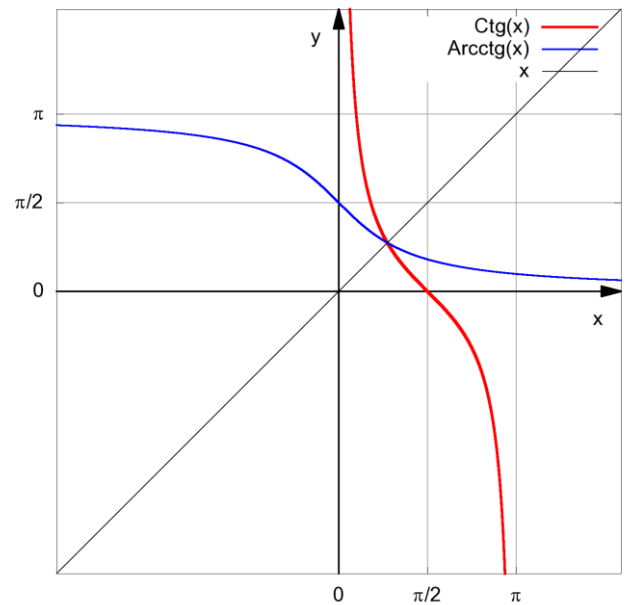
$$\text{Cos} = \cos|_{[0, \pi]}: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\text{Arccos} = \text{Cos}^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$



$$\text{Tg} = \text{tg}|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}: \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Arctg} = \text{Tg}^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$$



$$\text{Ctg} = \text{ctg}|_{\langle 0, \pi \rangle}: \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Arcctg} = \text{Ctg}^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, \pi \rangle$$