Determinante

Determinante su u matematiku uvedene kao sredstvo rješavanja sustava linearnih jednadžbi. Za definiciju determinante nam je potreban pojam permutacije.

Definicija (Permutacija)

Permutacija na skupu $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ je bijekcija sa skupa X na skup X. Skup svih permutacija na skupu X označavamo sa S_n.

Definicija

Neka je $\sigma = i_1\, i_2\, \ldots i_n$ permutacija na skupu $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Inverzija je uređeni par (i_k, i_l) takav da i_k prethodi i_l i $i_k > i_l$.

Definicija

Kažemo da je σ parna (neparna) permutacija ako σ ima parni (neparni) broj inverzija.

Determinante

Determinante su u matematiku uvedene kao sredstvo rješavanja sustava linearnih jednadžbi. Za definiciju determinante nam je potreban pojam permutacije.

Definicija (Permutacija)

Permutacija na skupu $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ je bijekcija sa skupa X na skup X. Skup svih permutacija na skupu X označavamo sa S_n.

Definicija

Neka je $\sigma = i_1\, i_2\, \ldots i_n$ permutacija na skupu $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Inverzija je uređeni par (i_k, i_l) takav da i_k prethodi i_l i $i_k > i_l$.

Definicija

Kažemo da je σ parna (neparna) permutacija ako σ ima parni (neparni) broj inverzija.

Determinante

Determinante su u matematiku uvedene kao sredstvo rješavanja sustava linearnih jednadžbi. Za definiciju determinante nam je potreban pojam permutacije.

Definicija (Permutacija)

Permutacija na skupu $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ je bijekcija sa skupa X na skup X. Skup svih permutacija na skupu X označavamo sa S_n.

Definicija

Neka je $\sigma = i_1\, i_2\, \ldots i_n$ permutacija na skupu $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Inverzija je uređeni par (i_k, i_l) takav da i_k prethodi i_l i $i_k > i_l$.

Definicija

Kažemo da je σ parna (neparna) permutacija ako σ ima parni (neparni) broj inverzija.

Determinante

Determinante su u matematiku uvedene kao sredstvo rješavanja sustava linearnih jednadžbi. Za definiciju determinante nam je potreban pojam permutacije.

Definicija (Permutacija)

Permutacija na skupu $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ je bijekcija sa skupa X na skup X. Skup svih permutacija na skupu X označavamo sa S_n.

Definicija

Neka je $\sigma = i_1\, i_2\, \ldots i_n$ permutacija na skupu $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Inverzija je uređeni par (i_k, i_l) takav da i_k prethodi i_l i $i_k > i_l$.

Definicija

Kažemo da je σ parna (neparna) permutacija ako σ ima parni (neparni) broj inverzija.

Determinante

Determinante su u matematiku uvedene kao sredstvo rješavanja sustava linearnih jednadžbi. Za definiciju determinante nam je potreban pojam permutacije.

Definicija (Permutacija)

Permutacija na skupu $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ je bijekcija sa skupa X na skup X. Skup svih permutacija na skupu X označavamo sa S_n.

Definicija

Neka je $\sigma = i_1\, i_2\, \ldots i_n$ permutacija na skupu $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Inverzija je uređeni par (i_k, i_l) takav da i_k prethodi i_l i $i_k > i_l$.

Definicija

Kažemo da je σ parna (neparna) permutacija ako σ ima parni (neparni) broj inverzija.

Definicija

Predznak permutacije σ, u oznaci $\operatorname{sgn}(\sigma)$, definiramo sa

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\operatorname{Inv}(\sigma)} \tag{1}$$

gdje je $\operatorname{Inv}(\sigma)$ broj inverzija u permutaciji σ.

Definicija

Transpozicija je permutacija koja međusobno zamjenjuje samo dva elementa u nizu $1, 2, \ldots, n$.

Predznak permutacije ima sljedeća svojstva:

1. Ako je τ transpozicija, onda je $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$.
2. Ako su σ_1 i σ_2 permutacije, onda je

$$\operatorname{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\sigma_2). \tag{2}$$

Definicija

Predznak permutacije σ, u oznaci $\mathrm{sgn}(\sigma)$, definiramo sa

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{\mathrm{Inv}(\sigma)} \tag{1}$$

gdje je $\mathrm{Inv}(\sigma)$ broj inverzija u permutaciji σ.

Definicija

Transpozicija je permutacija koja međusobno zamjenjuje samo dva elementa u nizu $1, 2, \ldots, n$.

Predznak permutacije ima sljedeća svojstva:

1. Ako je τ transpozicija, onda je $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$.
2. Ako su σ_1 i σ_2 permutacije, onda je

$$\mathrm{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \mathrm{sgn}(\sigma_1)\,\mathrm{sgn}(\sigma_2). \tag{2}$$

Definicija

Predznak permutacije σ, u oznaci $\operatorname{sgn}(\sigma)$, definiramo sa

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\operatorname{Inv}(\sigma)} \tag{1}$$

gdje je $\operatorname{Inv}(\sigma)$ broj inverzija u permutaciji σ.

Definicija

Transpozicija je permutacija koja međusobno zamjenjuje samo dva elementa u nizu $1, 2, \ldots, n$.

Predznak permutacije ima sljedeća svojstva:

1. Ako je τ transpozicija, onda je $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$.
2. Ako su σ_1 i σ_2 permutacije, onda je

$$\operatorname{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \operatorname{sgn}(\sigma_1) \operatorname{sgn}(\sigma_2). \tag{2}$$

Definicija (Determinanta)

Determinanta je funkcija $\det\colon M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ koja matrici $A = [A_{ij}]$ pridružuje skalar

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathsf{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \ldots A_{n\sigma(n)}. \tag{3}$$

Alternativna definicija determinante:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathsf{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)1} A_{\sigma(2)a} \ldots A_{\sigma(n)n}. \tag{4}$$

Svaki član

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathsf{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \ldots A_{n\sigma(n)}. \tag{5}$$

ili

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathsf{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)1} A_{\sigma(2)a} \ldots A_{\sigma(n)n}. \tag{6}$$

sadrži točno jedan element iz svakog retka i stupca.

Definicija (Determinanta)

Determinanta je funkcija $\det\colon M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ koja matrici $A = [A_{ij}]$ pridružuje skalar

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathsf{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \dots A_{n\sigma(n)}. \tag{3}$$

Alternativna definicija determinante:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathsf{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)1} A_{\sigma(2)a} \dots A_{\sigma(n)n}. \tag{4}$$

Svaki član

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathsf{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \dots A_{n\sigma(n)}. \tag{5}$$

ili

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathsf{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)1} A_{\sigma(2)a} \dots A_{\sigma(n)n}. \tag{6}$$

sadrži točno jedan element iz svakog retka i stupca.

Definicija (Determinanta)

Determinanta je funkcija $\det\colon M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ koja matrici $A = [A_{ij}]$ pridružuje skalar

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathsf{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \dots A_{n\sigma(n)}. \tag{3}$$

Alternativna definicija determinante:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathsf{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)1} A_{\sigma(2)a} \dots A_{\sigma(n)n}. \tag{4}$$

Svaki član

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathsf{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \dots A_{n\sigma(n)}. \tag{5}$$

ili

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathsf{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)1} A_{\sigma(2)a} \dots A_{\sigma(n)n}. \tag{6}$$

sadrži točno jedan element iz svakog retka i stupca.

Osnovna svojstva determinanti

Propozicija

Za svaku kvadratnu matricu A vrijedi

$$\det(A^T) = \det(A). \tag{7}$$

Propozicija

Ako je matrica B dobivena iz matrice A zamjenom dvaju njezinih redaka (supaca), onda je

$$\det(B) = -\det(A). \tag{8}$$

Korolar

Ako matrica A ima dva jednaka retka (stupca), onda je

$$\det(A) = 0. \tag{9}$$

Osnovna svojstva determinanti

Propozicija

Za svaku kvadratnu matricu A vrijedi

$$\det(A^T) = \det(A). \tag{7}$$

Propozicija

Ako je matrica B dobivena iz matrice A zamjenom dvaju njezinih redaka (supaca), onda je

$$\det(B) = -\det(A). \tag{8}$$

Korolar

Ako matrica A ima dva jednaka retka (stupca), onda je

$$\det(A) = 0. \tag{9}$$

Osnovna svojstva determinanti

Propozicija

Za svaku kvadratnu matricu A vrijedi

$$\det(A^T) = \det(A). \tag{7}$$

Propozicija

Ako je matrica B dobivena iz matrice A zamjenom dvaju njezinih redaka (supaca), onda je

$$\det(B) = -\det(A). \tag{8}$$

Korolar

Ako matrica A ima dva jednaka retka (stupca), onda je

$$\det(A) = 0. \tag{9}$$

Propozicija

Ako je matrica B dobivena iz matrice A množenjem jednog retka (stupca) skalarom $\lambda \in \mathbb{F}$, onda je

$$\det(B) = \lambda \det(A). \tag{10}$$

Korolar

Ako je A matrica reda n, onda je

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A). \tag{11}$$

Korolar

Ako je redak (stupac) matrice A proporcionalan nekom drugom retku (stupcu) te matrice, onda je

$$\det(A) = 0. \tag{12}$$

Propozicija

Ako je matrica B dobivena iz matrice A množenjem jednog retka (stupca) skalarom $\lambda \in \mathbb{F}$, onda je

$$\det(B) = \lambda \det(A). \tag{10}$$

Korolar

Ako je A matrica reda n, onda je

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A). \tag{11}$$

Korolar

Ako je redak (stupac) matrice A proporcionalan nekom drugom retku (stupcu) te matrice, onda je

$$\det(A) = 0. \tag{12}$$

Propozicija

Ako je matrica B dobivena iz matrice A množenjem jednog retka (stupca) skalarom $\lambda \in \mathbb{F}$, onda je

$$\det(B) = \lambda \det(A). \tag{10}$$

Korolar

Ako je A matrica reda n, onda je

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A). \tag{11}$$

Korolar

Ako je redak (stupac) matrice A proporcionalan nekom drugom retku (stupcu) te matrice, onda je

$$\det(A) = 0. \tag{12}$$

Propozicija

Neka su $A, B, C \in M_n(\mathbb{F})$ matrice takve da je

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kn} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A'_{k1} & A'_{k2} & \dots & A'_{kn} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

$$C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{k1} + A'_{k1} & A_{k2} + A'_{k2} & \dots & A_{kn} + A'_{kn} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Onda je

$$\det(C) = \det(A) + \det(B). \tag{15}$$

Korolar

Ako je marica B dobivena iz matrice A pribrajanjem nekog njezinog retka (stupca) nekog drugom retku (stupcu) te matrice, onda je

$$\det(B) = \det(A). \tag{16}$$

Korolar

Ako nekom retku (stupcu) matrice dodamo linarnu kombinaciju ostalih redaka (stupaca) te matrice, onda se njezina determinanta ne mijenja.

Teorem (Binet–Cauchy)

Ako su A i B kvadratne matrice, onda je

$$\det(AB) = \det(A)\det(B). \tag{17}$$

Korolar

Ako je marica B dobivena iz matrice A pribrajanjem nekog njezinog retka (stupca) nekog drugom retku (stupcu) te matrice, onda je

$$\det(B) = \det(A). \tag{16}$$

Korolar

Ako nekom retku (stupcu) matrice dodamo linarnu kombinaciju ostalih redaka (stupaca) te matrice, onda se njezina determinanta ne mijenja.

Teorem (Binet–Cauchy)

Ako su A i B kvadratne matrice, onda je

$$\det(AB) = \det(A)\det(B). \tag{17}$$

Korolar

Ako je marica B dobivena iz matrice A pribrajanjem nekog njezinog retka (stupca) nekog drugom retku (stupcu) te matrice, onda je

$$\det(B) = \det(A). \tag{16}$$

Korolar

Ako nekom retku (stupcu) matrice dodamo linarnu kombinaciju ostalih redaka (stupaca) te matrice, onda se njezina determinanta ne mijenja.

Teorem (Binet–Cauchy)

Ako su A i B kvadratne matrice, onda je

$$\det(AB) = \det(A)\det(B). \tag{17}$$

Laplaceov razvoj determinante

Definicija

Neka je $A = [a_{ij}]$ kvadratna matrica reda n. Neka je M_{ij} kvadratna matrica reda $n-1$ koja se dobije iz A brisanjem i–tog retka i j–tog stupca.

1. Minora elementa a_{ij} je determinanta $\det(M_{ij})$.
2. Algebarski komplement ili kofaktor elementa a_{ij} je

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}). \tag{18}$$

Teorem (Laplaceov razvoj)

Neka je $A = [a_{ij}]$ kvadratna matrica reda n. Onda vrijedi

1. Lalplaceov razvoj po i–tom retku

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{19}$$

2. Laplaceov razvoj po j–tom stupcu

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{20}$$

Definicija

Kažemo da je A gornje (donje) trokutasta matrica ako su svi elementi od A ispod (iznad) dijagonale jednaki nuli.

Determinanta trokutaske matrice jednaka je umnošku elemenata na dijagonali.

Teorem (Laplaceov razvoj)

Neka je $A = [a_{ij}]$ kvadratna matrica reda n. Onda vrijedi

1. Lalplaceov razvoj po i–tom retku

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{19}$$

2. Laplaceov razvoj po j–tom stupcu

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{20}$$

Definicija

Kažemo da je A gornje (donje) trokutasta matrica ako su svi elementi od A ispod (iznad) dijagonale jednaki nuli.

Determinanta trokutaske matrice jednaka je umnošku elemenata na dijagonali.

Teorem (Laplaceov razvoj)

Neka je $A = [a_{ij}]$ kvadratna matrica reda n. Onda vrijedi

1. Lalplaceov razvoj po i–tom retku

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{19}$$

2. Laplaceov razvoj po j–tom stupcu

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{20}$$

Definicija

Kažemo da je A gornje (donje) trokutasta matrica ako su svi elementi od A ispod (iznad) dijagonale jednaki nuli.

Determinanta trokutaske matrice jednaka je umnošku elemenata na dijagonali.

Efektivno računanje determinante

1. Elementarnim transformacijama se matrica prevede u oblik u kojem neki redak (stupac) ima točno jedan element različit od nule.
2. Determinante se računa Laplaceovim razvojem po tom retku (stupcu).
3. Postupak se ponavlja dok se ne dobije determinanta trećeg reda koja se računa Sarrusovim pravilom.

Regularne matrice

Definicija

Kažemo da je kvadratna matrica A regularna ako postoji kvadratna matrica B istog reda takva da je

$$AB = BA = I. \tag{21}$$

Matricu B nazivamo inverz matrice A i pišemo $B = A^{-1}$.

Inverz matrice drugog reda je dan sa

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Zanima nas kako možemo odrediti inverz kvadratne matrice proizvoljnog reda.

Regularne matrice

Definicija

Kažemo da je kvadratna matrica A regularna ako postoji kvadratna matrica B istog reda takva da je

$$AB = BA = I. \tag{21}$$

Matricu B nazivamo inverz matrice A i pišemo $B = A^{-1}$.

Inverz matrice drugog reda je dan sa

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Zanima nas kako možemo odrediti inverz kvadratne matrice proizvoljnog reda.

Regularne matrice

Definicija

Kažemo da je kvadratna matrica A regularna ako postoji kvadratna matrica B istog reda takva da je

$$AB = BA = I. \tag{21}$$

Matricu B nazivamo inverz matrice A i pišemo $B = A^{-1}$.

Inverz matrice drugog reda je dan sa

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Zanima nas kako možemo odrediti inverz kvadratne matrice proizvoljnog reda.

Definicija (Adjunkta matrice)

Neka je $A = [a_{ij}]$ kvadratna matrica reda n i neka je $[A_{ij}]$ matrica kofaktora elemenata a_{ij}. Adjunkta matrice A je transponirana matrica matrice $[A_{ij}]$:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Teorem

Za svaku kvadratnu matricu A vrijedi

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A)I. \tag{24}$$

Ako je $\det(A) \neq 0$, onda je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}. \tag{25}$$

Definicija (Adjunkta matrice)

Neka je $A = [a_{ij}]$ kvadratna matrica reda n i neka je $[A_{ij}]$ matrica kofaktora elemenata a_{ij}. Adjunkta matrice A je transponirana matrica matrice $[A_{ij}]$:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Teorem

Za svaku kvadratnu matricu A vrijedi

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A)I. \tag{24}$$

Ako je $\det(A) \neq 0$, onda je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}. \tag{25}$$

Propozicija

Kvadratna matrica A je regularna ako i samo ako je $\det(A) \neq 0$. U tom slučaju vrijedi

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}. \tag{26}$$

Veza između ranga i regularnosti matrice

Teorem

Kvadratna matrica A reda n je regularna ako i samo ako je rang matrice $r(A) = n$.

Korolar

Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Onda su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.

1. A je regularna matrica.
2. $\det(A) \neq 0$.
3. $r(A) = n$.

Propozicija

Kvadratna matrica A je regularna ako i samo ako je $\det(A) \neq 0$. U tom slučaju vrijedi

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}. \tag{26}$$

Veza između ranga i regularnosti matrice

Teorem

Kvadratna matrica A reda n je regularna ako i samo ako je rang matrice $r(A) = n$.

Korolar

Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Onda su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.

1. A je regularna matrica.
2. $\det(A) \neq 0$.
3. $r(A) = n$.

Propozicija

Kvadratna matrica A je regularna ako i samo ako je $\det(A) \neq 0$. U tom slučaju vrijedi

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}. \tag{26}$$

Veza između ranga i regularnosti matrice

Teorem

Kvadratna matrica A reda n je regularna ako i samo ako je rang matrice $r(A) = n$.

Korolar

Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Onda su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.

1. A je regularna matrica.
2. $\det(A) \neq 0$.
3. $r(A) = n$.