Dijagonalizacija operatora

Problem: Može li se odrediti baza u kojoj zadani operator $T\colon V \to V$ ima dijagonalnu matricu?

Ova problem je povezan sa sljedećim pojmovima:

1. Karakteristični polinom operatora T.
2. Vlastite vrijednosti operatora T.
3. Vlastiti vektori operatora T.

Definicija

Neka je A kvadratna matrica reda n. Karakteristični polinom matrice A je polinom

$$\Delta(t) = \det(tI_n - A). \tag{1}$$

Dijagonalizacija operatora

Problem: Može li se odrediti baza u kojoj zadani operator $T\colon V \to V$ ima dijagonalnu matricu?

Ova problem je povezan sa sljedećim pojmovima:

1. Karakteristični polinom operatora T.
2. Vlastite vrijednosti operatora T.
3. Vlastiti vektori operatora T.

Definicija

Neka je A kvadratna matrica reda n. Karakteristični polinom matrice A je polinom

$$\Delta(t) = \det(tI_n - A). \tag{1}$$

Problem: Može li se odrediti baza u kojoj zadani operator $T\colon V \to V$ ima dijagonalnu matricu?

Ova problem je povezan sa sljedećim pojmovima:

1. Karakteristični polinom operatora T.
2. Vlastite vrijednosti operatora T.
3. Vlastiti vektori operatora T.

Definicija

Neka je A kvadratna matrica reda n. Karakteristični polinom matrice A je polinom

$$\Delta(t) = \det(tI_n - A). \tag{1}$$

Dijagonalizacija operatora

Problem: Može li se odrediti baza u kojoj zadani operator $T \colon V \to V$ ima dijagonalnu matricu?

Ova problem je povezan sa sljedećim pojmovima:

1. Karakteristični polinom operatora T.
2. Vlastite vrijednosti operatora T.
3. Vlastiti vektori operatora T.

Definicija

Neka je A kvadratna matrica reda n. Karakteristični polinom matrice A je polinom

$$\Delta(t) = \det(tI_n - A). \tag{1}$$

Teorem (Hamilton–Cayley)

Neka je $\Delta(t)$ karakteristični polinom matrice A. Onda je $\Delta(A) = 0$.

Propozicija

Slične matrice imaju isti karakteristični polinom.

Teorem (Hamilton–Cayley)

Neka je $\Delta(t)$ karakteristični polinom matrice A. Onda je $\Delta(A) = 0$.

Propozicija

Slične matrice imaju isti karakteristični polinom.

Vlastiti vektori operatora

Definicija

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $T\colon V \to V$ linearni opeator. Ako postoji $v \in V$, $v \neq 0$, takav da je

$$T(v) = \lambda v \quad \text{za neki} \quad \lambda \in \mathbb{F}, \tag{2}$$

onda kažemo da je

1. v vlastiti (karakteristični) vekotor operatora T,
2. λ vlastita (karakteristična) vrijednost operatora T.

Svojstveni potprostor operatora T pridružen vlastitoj vrijednosti λ:

$$E_\lambda(T) = \Big\{ v \in V \mid T(v) = \lambda v \Big\}. \tag{3}$$

Prostor $E_\lambda(T)$ uključuje nul–vektor!

Vlastiti vektori operatora

Definicija

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $T\colon V \to V$ linearni opeator. Ako postoji $v \in V$, $v \neq 0$, takav da je

$$T(v) = \lambda v \quad \text{za neki} \quad \lambda \in \mathbb{F}, \tag{2}$$

onda kažemo da je

1. v vlastiti (karakteristični) vekotor operatora T,
2. λ vlastita (karakteristična) vrijednost operatora T.

Svojstveni potprostor operatora T pridružen vlastitoj vrijednosti λ:

$$E_\lambda(T) = \Big\{ v \in V \mid T(v) = \lambda v \Big\}. \tag{3}$$

Prostor $E_\lambda(T)$ uključuje nul–vektor!

Propozicija

$E_\lambda(T)$ je potprostor prostora V.

$$\dim E_\lambda(T) \quad \text{se naziva geometrijska kratnost v.v. } \lambda \tag{4}$$

Definicija

Skup svih vlastitih vrijednosti operatora T nazivamo spektar operatora T i označavamo sa $\sigma(T)$.

Teorem

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ je vlastita vrijednost operatora $T\colon V \to V$ ako i samo ako je λ korijen karakterističnog polinoma od T.

Teorem

Ako je $T\colon V \to V$ linearni operator na kompleksnom prostoru V, onda T ima barem jednu i najviše n vlastitih vrijednosti gdje je $n = \dim_{\mathbb{C}}(V)$.

Propozicija

$E_\lambda(T)$ je potprostor prostora V.

$$\dim E_\lambda(T) \quad \text{se naziva geometrijska kratnost v.v. } \lambda \tag{4}$$

Definicija

Skup svih vlastitih vrijednosti operatora T nazivamo spektar operatora T i označavamo sa $\sigma(T)$.

Teorem

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ je vlastita vrijednost operatora $T\colon V \to V$ ako i samo ako je λ korijen karakterističnog polinoma od T.

Teorem

Ako je $T\colon V \to V$ linearni operator na kompleksnom prostoru V, onda T ima barem jednu i najviše n vlastitih vrijednosti gdje je $n = \dim_{\mathbb{C}}(V)$.

Propozicija

$E_\lambda(T)$ je potprostor prostora V.

$$\text{dim} E_\lambda(T) \quad \text{se naziva geometrijska kratnost v.v. } \lambda \tag{4}$$

Definicija

Skup svih vlastitih vrijednosti operatora T nazivamo spektar operatora T i označavamo sa $\sigma(T)$.

Teorem

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ je vlastita vrijednost operatora $T\colon V \to V$ ako i samo ako je λ korijen karakterističnog polinoma od T.

Teorem

Ako je $T\colon V \to V$ linearni operator na kompleksnom prostoru V, onda T ima barem jednu i najviše n vlastitih vrijednosti gdje je $n = \text{dim}_{\mathbb{C}}(V)$.

Propozicija

$E_\lambda(T)$ je potprostor prostora V.

$$\text{dim} E_\lambda(T) \quad \text{se naziva geometrijska kratnost v.v. } \lambda \tag{4}$$

Definicija

Skup svih vlastitih vrijednosti operatora T nazivamo spektar operatora T i označavamo sa $\sigma(T)$.

Teorem

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ je vlastita vrijednost operatora $T \colon V \to V$ ako i samo ako je λ korijen karakterističnog polinoma od T.

Teorem

Ako je $T \colon V \to V$ linearni operator na kompleksnom prostoru V, onda T ima barem jednu i najviše n vlastitih vrijednosti gdje je $n = \text{dim}_\mathbb{C}(V)$.

Postupak određivanja vlastitih vektora

Neka je $T \colon V \to V$ linearni operator i neka je A matrica operatora T u odabranoj bazi prostora V. Onda vlastiti vektor X zadovoljava matričnu jednadžbu

$$(A - \lambda I)X = 0. \tag{5}$$

1. Odredite korijene karakterističnog polinoma $\det(tI - A) = 0$.
2. Za svaki korijen λ, odredite fundamentalna rješenja homogenog sustava $(A - \lambda I)X = 0$. Fundamentalna rješenja su linearno nezavisni vektori koji tvore bazu vlastitog podprostora $E_\lambda(T)$.
3. Svi vlastiti vektori dobiveni u (2) tvore skup vlastitih vektora operatora T.

Primjedbe

- Homogeni sustav $(A - \lambda I)X = 0$ ima netrivijalna rješenja jer je $\det(A - \lambda I) = 0$.
- Ako je V kompleksni vektorski prostor, onda T ima barem jednu vlastitu vrijednost.

Dijagonalizacija operatora

- Za operator $T\colon V \to V$ kažemo da se može dijagonalizirati ako postoji baza prostora V u kojoj je matrica operatora T dijagonalna.
- Takve operatore nazivamo poluprosti operatori.

Teorem

Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ međusobno različite vlastite vrijednosti operatora $T\colon V \to V$ i neka su $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pripadni vlastiti vektori,

$$T(v_i) = \lambda_i v_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Onda je skup $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ linearno nezavisan u V.

- Za operator $T\colon V \to V$ kažemo da se može dijagonalizirati ako postoji baza prostora V u kojoj je matrica operatora T dijagonalna.
- Takve operatore nazivamo poluprosti operatori.

Teorem

Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ međusobno različite vlastite vrijednosti operatora $T\colon V \to V$ i neka su $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pripadni vlastiti vektori,

$$T(v_i) = \lambda_i v_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Onda je skup $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ linearno nezavisan u V.

Teorem

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $n = \dim_{\mathbb{F}}(V)$. Ako linearni operator $T\colon V \to V$ ima n različitih vlastitih vrijednosti, onda pripadni vlastiti vektori tvore bazu prostora V.

Korolar

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $n = \dim_{\mathbb{F}}(V)$. Ako karakteristični polinom od T ima n različitih korijena u polju $\mathbb{F}$, onda pripadni vlastiti vektori tvore bazu od V.

U tom slučaju se karaktoristični polinom može faktorizirati na linearne faktore

$$\Delta(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\dots(t-\lambda_n), \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \quad i \neq j. \tag{7}$$

Napomena

Vlastiti vektori operatora $T\colon V \to V$ mogu tvoriti bazu prostora V i ako T nema n različitih vlastitih vrijednosti gdje je $n = \dim_{\mathbb{F}}(V)$.

Teorem

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $n = \dim_{\mathbb{F}}(V)$. Ako linearni operator $T\colon V \to V$ ima n različitih vlastitih vrijednosti, onda pripadni vlastiti vektori tvore bazu prostora V.

Korolar

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $n = \dim_{\mathbb{F}}(V)$. Ako karakteristični polinom od T ima n različitih korijena u polju $\mathbb{F}$, onda pripadni vlastiti vektori tvore bazu od V.

U tom slučaju se karaktoristični polinom može faktorizirati na linearne faktore

$$\Delta(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\dots(t-\lambda_n), \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \quad i \neq j. \tag{7}$$

Napomena

Vlastiti vektori operatora $T\colon V \to V$ mogu tvoriti bazu prostora V i ako T nema n različitih vlastitih vrijednosti gdje je $n = \dim_{\mathbb{F}}(V)$.

Teorem

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $n = \dim_{\mathbb{F}}(V)$. Ako linearni operator $T\colon V \to V$ ima n različitih vlastitih vrijednosti, onda pripadni vlastiti vektori tvore bazu prostora V.

Korolar

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $n = \dim_{\mathbb{F}}(V)$. Ako karakteristični polinom od T ima n različitih korijena u polju $\mathbb{F}$, onda pripadni vlastiti vektori tvore bazu od V.

U tom slučaju se karaktoristični polinom može faktorizirati na linearne faktore

$$\Delta(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)\dots(t - \lambda_n), \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \quad i \neq j. \tag{7}$$

Napomena

Vlastiti vektori operatora $T\colon V \to V$ mogu tvoriti bazu prostora V i ako T nema n različitih vlastitih vrijednosti gdje je $n = \dim_{\mathbb{F}}(V)$.

Teorem

Linearni operator $T\colon V \to V$ se može prikazati dijagonalnom matricom D ako i samo ako V ima bazu koja se sastoji od vlastitih vektora operatora T. U tom slučaju, dijagonalni elementi od D su vlastite vrijednosti operatora T.

Korolar

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $n = \dim_{\mathbb{F}}(V)$. Ako operator $T\colon V \to V$ ima n različitih vlastitih vrijednosti, onda se T može dijagonalizirati.

Teorem

Linearni operator $T\colon V \to V$ se može prikazati dijagonalnom matricom D ako i samo ako V ima bazu koja se sastoji od vlastitih vektora operatora T. U tom slučaju, dijagonalni elementi od D su vlastite vrijednosti operatora T.

Korolar

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $n = \dim_{\mathbb{F}}(V)$. Ako operator $T\colon V \to V$ ima n različitih vlastitih vrijednosti, onda se T može dijagonalizirati.

Definicija

Ako vlastiti vektori operatora $T\colon V \to V$ tvore bazu prostora V, onda kažemo da T ima potpuni skup vlastitih vektora. U protivnom kažemo da je T defektni operator.

Teorem

Neka je $T\colon V \to V$ linearni operator na vektorskom prostoru V. Onda su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

1. T se može dijagonalizirati.
2. $V = \oplus_{i=1}^{m} E_{\lambda_i}$ gdje su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ različite vlastite vrijednosti operatora T.

Definicija

Ako vlastiti vektori operatora $T\colon V \to V$ tvore bazu prostora V, onda kažemo da T ima potpuni skup vlastitih vektora. U protivnom kažemo da je T defektni operator.

Teorem

Neka je $T\colon V \to V$ linearni operator na vektorskom prostoru V. Onda su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

1. T se može dijagonalizirati.
2. $V = \oplus_{i=1}^{m} E_{\lambda_i}$ gdje su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ različite vlastite vrijednosti operatora T.

Postupak za dijagonalizaciju operatora

Neka je A matrica operatora $T\colon V \to V$ u nekoj bazi prostora V i neka je $n = \dim V$.

1. Odredite vlastite vrijednosti operatora T iz korijena karakterističnog polinoma $\Delta(t) = \det(tI - A)$.
2. Odredite maksimalni skup linearno nezavisnih vektora $v_1, v_2, \ldots, v_m$ operatora T.
3. Ako je $m < n$, onda se T ne može dijagonalizirati.
4. Ako je $m = n$, onda odredite matricu prijelaza P iz početne baze u bazu $B = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.
5. Matrica operatora T u bazi B je dana sa

$$[T]_B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{8}$$

gdje su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ vlastite vrijednosti operatora T (koje se mogu ponavljati ovisno o algebarskoj kratnosti).

Dijagonalizacija realne simetrične matrice

U mnogim važnim primjenama linearni operatori su prikazani realnim simetričnim matricama.

Definicija

Kažemo da je $P \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonalna matrica ako je $P^{-1} = P^T$.

Definicija

Norma vektora

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in M_{n1}(\mathbb{R}) \tag{9}$$

je realni broj

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{10}$$

Dijagonalizacija realne simetrične matrice

U mnogim važnim primjenama linearni operatori su prikazani realnim simetričnim matricama.

Definicija

Kažemo da je $P \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonalna matrica ako je $P^{-1} = P^T$.

Definicija

Norma vektora

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in M_{n1}(\mathbb{R}) \tag{9}$$

je realni broj

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{10}$$

Teorem

Ako je A realna simetrična matrica, onda je svaki korijen vlastitog polinoma od A realan.

Korolar

Spektar realne simetrične matrice je realan.

Teorem

Ako je A realna simetrična matrica, onda postoji ortogonalna matrica P takva da je $D = P^{-1}AP$ dijagonalna matrica.

1. Stupci matrice P su jedinični vlastiti vektori matrice A.
2. Dijagonalni elementi matrice D su vlastite vrijednosti matrice A.

Teorem

Ako je A realna simetrična matrica, onda je svaki korijen vlastitog polinoma od A realan.

Korolar

Spektar realne simetrične matrice je realan.

Teorem

Ako je A realna simetrična matrica, onda postoji ortogonalna matrica P takva da je $D = P^{-1}AP$ dijagonalna matrica.

1. Stupci matrice P su jedinični vlastiti vektori matrice A.
2. Dijagonalni elementi matrice D su vlastite vrijednosti matrice A.

Teorem

Ako je A realna simetrična matrica, onda je svaki korijen vlastitog polinoma od A realan.

Korolar

Spektar realne simetrične matrice je realan.

Teorem

Ako je A realna simetrična matrica, onda postoji ortogonalna matrica P takva da je $D = P^{-1}AP$ dijagonalna matrica.

1. Stupci matrice P su jedinični vlastiti vektori matrice A.
2. Dijagonalni elementi matrice D su vlastite vrijednosti matrice A.