Koordinate i promjena baze

Neka je $B = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ baza prostora V nad poljem F.

$$v \in V \quad \Rightarrow \quad v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n, \quad \alpha_i \in F \tag{1}$$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{koordinatna matrica vektora } v \text{ u bazi } B \tag{2}$$

Problem: Kako se mijenja koordinatna matrica vektora $v \in V$ kada se promijeni baza prostora?

Neka je

$$B' = (u'_1, u'_2, \dots, u'_n) \quad \text{nova baza prostora } V. \tag{3}$$

Koordinate i promjena baze

Neka je $B = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ baza prostora V nad poljem F.

$$v \in V \quad \Rightarrow \quad v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n, \quad \alpha_i \in F \tag{1}$$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{koordinatna matrica vektora } v \text{ u bazi } B \tag{2}$$

Problem: Kako se mijenja koordinatna matrica vektora $v \in V$ kada se promijeni baza prostora?

Neka je

$$B' = (u'_1, u'_2, \ldots, u'_n) \quad \text{nova baza prostora } V. \tag{3}$$

Koordinate i promjena baze

Neka je $B = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ baza prostora V nad poljem F.

$$v \in V \quad \Rightarrow \quad v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n, \quad \alpha_i \in F \tag{1}$$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{koordinatna matrica vektora } v \text{ u bazi } B \tag{2}$$

Problem: Kako se mijenja koordinatna matrica vektora $v \in V$ kada se promijeni baza prostora?

Neka je

$$B' = (u'_1, u'_2, \ldots, u'_n) \quad \text{nova baza prostora } V. \tag{3}$$

Koordinate i promjena baze

Neka je $B = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ baza prostora V nad poljem F.

$$v \in V \quad \Rightarrow \quad v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n, \quad \alpha_i \in F \tag{1}$$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{koordinatna matrica vektora } v \text{ u bazi } B \tag{2}$$

Problem: Kako se mijenja koordinatna matrica vektora $v \in V$ kada se promijeni baza prostora?

Neka je

$$B' = (u_1', u_2', \ldots, u_n') \quad \text{nova baza prostora } V. \tag{3}$$

Elemente nove baze možemo napisati u staroj bazi kao linearnu kombinaciju

$$u'_k = \beta_{1k}u_1 + \beta_{2k}u_2 + \cdots + \beta_{nk}u_n. \tag{4}$$

Neka je

$$[u'_k]_B = \begin{bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \\ \vdots \\ \beta_{nk} \end{bmatrix} \quad \text{matrica vektora } u'_k \text{ u bazi } B \tag{5}$$

Definirajmo matricu prijelaza iz baze B u B' sa

$$P = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{1n} & \beta_{2n} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

U stupcima matrice P se nalaze komponente vektora $u'_1, u'_2, \dots, u'_n$ u bazi B:

$$P = \Big[[u'_1]_B \ [u'_2]_B \dots [u'_n]_B \Big] \tag{7}$$

Elemente nove baze možemo napisati u staroj bazi kao linearnu kombinaciju

$$u'_k = \beta_{1k}u_1 + \beta_{2k}u_2 + \cdots + \beta_{nk}u_n. \tag{4}$$

Neka je

$$[u'_k]_B = \begin{bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \\ \vdots \\ \beta_{nk} \end{bmatrix} \quad \text{matrica vektora } u'_k \text{ u bazi } B \tag{5}$$

Definirajmo matricu prijelaza iz baze B u B' sa

$$P = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{1n} & \beta_{2n} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

U stupcima matrice P se nalaze komponente vektora $u'_1, u'_2, \dots, u'_n$ u bazi B:

$$P = \left[[u'_1]_B \; [u'_2]_B \dots [u'_n]_B \right] \tag{7}$$

Elemente nove baze možemo napisati u staroj bazi kao linearnu kombinaciju

$$u'_k = \beta_{1k}u_1 + \beta_{2k}u_2 + \cdots + \beta_{nk}u_n. \tag{4}$$

Neka je

$$[u'_k]_B = \begin{bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \\ \vdots \\ \beta_{nk} \end{bmatrix} \quad \text{matrica vektora } u'_k \text{ u bazi } B \tag{5}$$

Definirajmo matricu prijelaza iz baze B u B' sa

$$P = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{1n} & \beta_{2n} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

U stupcima matrice P se nalaze komponente vektora $u'_1, u'_2, \dots, u'_n$ u bazi B:

$$P = \left[[u'_1]_B \; [u'_2]_B \dots [u'_n]_B \right] \tag{7}$$

Teorem

Neka su $[v]_B$ i $[v]_{B'}$ koordinatne matrice vektora $v \in V$ u bazama B i B' prostora V, i neka je P matrica prijelaza iz baze B u bazu B'. Onda je

$$P[v]_{B'} = [v]_B \quad \text{i} \quad P^{-1}[v]_B = [v]_{B'}. \tag{8}$$

Primjedba

Matrica P^{-1} vrši prijelaz vektora v iz baze B u bazu B'.

Teorem

Neka su $[v]_B$ i $[v]_{B'}$ koordinatne matrice vektora $v \in V$ u bazama B i B' prostora V, i neka je P matrica prijelaza iz baze B u bazu B'. Onda je

$$P[v]_{B'} = [v]_B \quad \text{i} \quad P^{-1}[v]_B = [v]_{B'}. \tag{8}$$

Primjedba

Matrica P^{-1} vrši prijelaz vektora v iz baze B u bazu B'.

Neka je $B_1 = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ baza prostora U i neka je $B_2 = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ baza prostora V. Neka je $T\colon U \to V$ linearni operator.

$$T(u_k) = a_{1k}v_1 + a_{2k}u_2 + \cdots + a_{mk}v_m, \quad k = 1, 2, \dots, n \tag{9}$$

Definicija

Matrica

$$[T]_{(B_1,B_2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{10}$$

se naziva matrica operatora T u paru baza (B_1, B_2).

U stupcu k se nalaza komponente vektora $T(u_k)$:

$$[T]_{(B_1,B_2)} = [T(u_1) \mid T(u_2) \mid \dots \mid T(u_n)] \tag{11}$$

Teorem

Neka je $T\colon U \to V$ linearni operatora i neka su B_1 i B_2 baze prostora U i V, redom. Onda je

$$[T(u)]_{B_2} = [T]_{(B_1,B_2)}[u]_{B_1} \quad \forall\, u \in U. \tag{12}$$

Teorem

Neka su U i V vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$ i neka su $S, T\colon U \to V$ linearni operatori. Neka su B_1 i B_2 baze prostora U i V, redom. Onda vrijedi

1. $$[T+S]_{(B_1,B_2)} = [T]_{(B_1,B_2)} + [S]_{(B_1,B_2)}, \tag{13}$$

2. $$[\lambda T]_{(B_1,B_2)} = \lambda\, [T]_{(B_1,B_2)}, \quad \lambda \in \mathbb{F}. \tag{14}$$

Izomorfizam vektorskih prostora

$$\mathcal{L}(U,V) \simeq M_{mn}(\mathbb{R}), \quad n = \dim(U),\ m = \dim(V) \tag{15}$$

Teorem

Neka je $T\colon U \to V$ linearni operatora i neka su B_1 i B_2 baze prostora U i V, redom. Onda je

$$[T(u)]_{B_2} = [T]_{(B_1,B_2)}[u]_{B_1} \quad \forall\, u \in U. \tag{12}$$

Teorem

Neka su U i V vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$ i neka su $S, T\colon U \to V$ linearni operatori. Neka su B_1 i B_2 baze prostora U i V, redom. Onda vrijedi

1. $$[T + S]_{(B_1,B_2)} = [T]_{(B_1,B_2)} + [S]_{(B_1,B_2)}, \tag{13}$$

2. $$[\lambda T]_{(B_1,B_2)} = \lambda\, [T]_{(B_1,B_2)}, \quad \lambda \in \mathbb{F}. \tag{14}$$

Izomorfizam vektorskih prostora

$$\mathcal{L}(U,V) \simeq M_{mn}(\mathbb{R}), \quad n = \dim(U),\ m = \dim(V) \tag{15}$$

Teorem

Neka je $T\colon U \to V$ linearni operatora i neka su B_1 i B_2 baze prostora U i V, redom. Onda je

$$[T(u)]_{B_2} = [T]_{(B_1,B_2)}[u]_{B_1} \quad \forall\, u \in U. \tag{12}$$

Teorem

Neka su U i V vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$ i neka su $S, T\colon U \to V$ linearni operatori. Neka su B_1 i B_2 baze prostora U i V, redom. Onda vrijedi

1. $$[T+S]_{(B_1,B_2)} = [T]_{(B_1,B_2)} + [S]_{(B_1,B_2)}, \tag{13}$$

2. $$[\lambda T]_{(B_1,B_2)} = \lambda\,[T]_{(B_1,B_2)}, \quad \lambda \in \mathbb{F}. \tag{14}$$

Izomorfizam vektorskih prostora

$$\mathcal{L}(U,V) \simeq M_{mn}(\mathbb{R}), \quad n = \mathsf{dim}(U),\ m = \mathsf{dim}(V) \tag{15}$$

Teorem

Neka su $T\colon U \to V$ i $S\colon V \to W$ linearni operatori. Neka su B_1, B_2 i B_3 baze prostora U, V i W, redom. Onda je matrica kompozicije operatora $S \circ T\colon U \to W$ u paru baza (B_1, B_3) dana sa

$$[S \circ T]_{(B_1,B_3)} = [S]_{(B_2,B_3)}[T]_{(B_1,B_2)}. \tag{16}$$

Teorem

Neka je $T\colon V \to V$ linearni operator i neka je P matrica prijelaza iz baze B u bazu B' prostora V. Onda vrijedi

$$[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P. \tag{17}$$

Teorem

Neka su $T: U \to V$ i $S: V \to W$ linearni operatori. Neka su B_1, B_2 i B_3 baze prostora U, V i W, redom. Onda je matrica kompozicije operatora $S \circ T: U \to W$ u paru baza (B_1, B_3) dana sa

$$[S \circ T]_{(B_1,B_3)} = [S]_{(B_2,B_3)}[T]_{(B_1,B_2)}. \tag{16}$$

Teorem

Neka je $T: V \to V$ linearni operator i neka je P matrica prijelaza iz baze B u bazu B' prostora V. Onda vrijedi

$$[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P. \tag{17}$$

Definicija

Ako za kvadratne matrice $A, B \in M_n(F)$ postoji regularna matrica $P \in M_n(F)$ takva da je

$$B = P^{-1}AP, \tag{18}$$

onda kažemo da su A i B slične matrice i da je B dobivena iz A transformacijom sličnosti ili konjugacijom.

Definicija

Ako je linearni operator $T\colon U \to U$ bijekcija, onda kažemo da je T regularni operator.

Svaki regularni operator $T\colon U \to U$ ima inverz $T^{-1}\colon U \to U$ i vrijedi

$$[T^{-1}]_B = [T]_B^{-1}. \tag{19}$$

Definicija

Ako za kvadratne matrice $A, B \in M_n(F)$ postoji regularna matrica $P \in M_n(F)$ takva da je

$$B = P^{-1}AP, \tag{18}$$

onda kažemo da su A i B slične matrice i da je B dobivena iz A transformacijom sličnosti ili konjugacijom.

Definicija

Ako je linearni operator $T\colon U \to U$ bijekcija, onda kažemo da je T regularni operator.

Svaki regularni operator $T\colon U \to U$ ima inverz $T^{-1}\colon U \to U$ i vrijedi

$$[T^{-1}]_B = [T]_B^{-1}. \tag{19}$$

Definicija

Ako za kvadratne matrice $A, B \in M_n(F)$ postoji regularna matrica $P \in M_n(F)$ takva da je

$$B = P^{-1}AP, \tag{18}$$

onda kažemo da su A i B slične matrice i da je B dobivena iz A transformacijom sličnosti ili konjugacijom.

Definicija

Ako je linearni operator $T\colon U \to U$ bijekcija, onda kažemo da je T regularni operator.

Svaki regularni operator $T\colon U \to U$ ima inverz $T^{-1}\colon U \to U$ i vrijedi

$$[T^{-1}]_B = [T]_B^{-1}. \tag{19}$$