Linearna algebra i matrični račun

prof.dr.sc. Saša Krešić-Jurić

PMF–Split

Na vektorskim prostorima promatramo preslikavanja koja su kompatibilna s binarnim operacijama definiranim na vektorskim prostorima.

Definicija (Linearni operator)

Neka su U i V vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $T\colon U \to V$ se naziva linearni operator ili homomorfizam vektoskih prostora ako vrijedi

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$,
2. $T(\lambda u) = \lambda T(u), \quad \lambda \in \mathbb{F}$.

Skup svih linearih operatora $T\colon U \to V$ označavamo sa $\mathcal{L}(U,V)$.

Propozicija

Neka je $T\colon U \to V$ linearni operator. Onda vrijedi

1. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,
2. $T(-u) = -T(u), \quad u \in U$.

Linearni operatori

Na vektorskim prostorima promatramo preslikavanja koja su kompatibilna s binarnim operacijama definiranim na vektorskim prostorima.

Definicija (Linearni operator)

Neka su U i V vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $T\colon U \to V$ se naziva linearni operator ili homomorfizam vektoskih prostora ako vrijedi

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$,
2. $T(\lambda u) = \lambda T(u), \quad \lambda \in \mathbb{F}$.

Skup svih linearih operatora $T\colon U \to V$ označavamo sa $\mathcal{L}(U,V)$.

Propozicija

Neka je $T\colon U \to V$ linearni operator. Onda vrijedi

1. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,
2. $T(-u) = -T(u), \quad u \in U$.

Linearni operatori

Na vektorskim prostorima promatramo preslikavanja koja su kompatibilna s binarnim operacijama definiranim na vektorskim prostorima.

Definicija (Linearni operator)

Neka su U i V vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $T\colon U \to V$ se naziva linearni operator ili homomorfizam vektoskih prostora ako vrijedi

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$,
2. $T(\lambda u) = \lambda T(u), \quad \lambda \in \mathbb{F}$.

Skup svih linearih operatora $T\colon U \to V$ označavamo sa $\mathcal{L}(U,V)$.

Propozicija

Neka je $T\colon U \to V$ linearni operator. Onda vrijedi

1. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,
2. $T(-u) = -T(u), \quad u \in U$.

Definicija

Neka je $T\colon U \to V$ linearni operator.

1. Ako je T bijekcija, onda kažemo daje T izomorfizam vektorskih prostora i pišemo $U \simeq V$.
2. Ako je T bijekcija i $U = V$, onda kažemo da je T automorfizam prostora U.

Na skupu linearnih operatora $\mathcal{L}(U, V)$ možemo definirati zbrajanje operatora i množenje operatora skalarima.

Definicija

Neka su $S, T \in \mathcal{L}(U, V)$ i neka je $\lambda \in \mathbb{F}$. Zbroj operatora $S + T$ i umnožak λT definiramo sa

$$(S + T)(u) = S(u) + T(u), \quad (\lambda T)(u) = \lambda T(u). \tag{1}$$

Teorem

Skup linearnih operatora $\mathcal{L}(U, V)$ je vekorski prostor.

Definicija

Neka je $T\colon U \to V$ linearni operator.

1. Ako je T bijekcija, onda kažemo daje T izomorfizam vektorskih prostora i pišemo $U \simeq V$.
2. Ako je T bijekcija i $U = V$, onda kažemo da je T automorfizam prostora U.

Na skupu linearnih operatora $\mathcal{L}(U, V)$ možemo definirati zbrajanje operatora i množenje operatora skalarima.

Definicija

Neka su $S, T \in \mathcal{L}(U, V)$ i neka je $\lambda \in \mathbb{F}$. Zbroj operatora $S + T$ i umnožak λT definiramo sa

$$(S+T)(u) = S(u) + T(u), \quad (\lambda T)(u) = \lambda T(u). \tag{1}$$

Teorem

Skup linearnih operatora $\mathcal{L}(U, V)$ je vekorski prostor.

Definicija

Neka je $T\colon U \to V$ linearni operator.

1. Ako je T bijekcija, onda kažemo daje T izomorfizam vektorskih prostora i pišemo $U \simeq V$.
2. Ako je T bijekcija i $U = V$, onda kažemo da je T automorfizam prostora U.

Na skupu linearnih operatora $\mathcal{L}(U, V)$ možemo definirati zbrajanje operatora i množenje operatora skalarima.

Definicija

Neka su $S, T \in \mathcal{L}(U, V)$ i neka je $\lambda \in \mathbb{F}$. Zbroj operatora $S + T$ i umnožak λT definiramo sa

$$(S + T)(u) = S(u) + T(u), \quad (\lambda T)(u) = \lambda T(u). \tag{1}$$

Teorem

Skup linearnih operatora $\mathcal{L}(U, V)$ je vekorski prostor.

Definicija

Neka su $T\colon U \to V$ i $S\colon V \to W$ linearni operatori. Kompozicija ili umnožak operatora je definiran sa

$$(ST)(u) = S(T(u)). \tag{2}$$

Propozicija

Umnožak linearnih operatora je linearni operator.

Definicija

Neka su $T\colon U \to V$ i $S\colon V \to W$ linearni operatori. Kompozicija ili umnožak operatora je definiran sa

$$(ST)(u) = S(T(u)). \tag{2}$$

Propozicija

Umnožak linearnih operatora je linearni operator.

Jezgra i slika operatora

Definicija

Neka je $T\colon U \to V$ linearni operator.

1. Jezgra operatora T je skup
$$\ker(T) = \{u \in U \mid T(u) = \mathbf{0}\}. \tag{3}$$
2. Slika operatora je skup
$$\mathrm{Im}(T) = \{T(u) \mid u \in U\}. \tag{4}$$

Propozicija

Neka je $T\colon U \to V$ linarni operator.

1. $\ker(T)$ je podprostor od U.
2. $\mathrm{Im}(T)$ je podprostor od V.

Jezgra i slika operatora

Definicija

Neka je $T\colon U \to V$ linearni operator.

1. Jezgra operatora T je skup
$$\ker(T) = \{u \in U \mid T(u) = \mathbf{0}\}. \tag{3}$$
2. Slika operatora je skup
$$\mathrm{Im}(T) = \{T(u) \mid u \in U\}. \tag{4}$$

Propozicija

Neka je $T\colon U \to V$ linarni operator.

1. $\ker(T)$ je podprostor od U.
2. $\mathrm{Im}(T)$ je podprostor od V.

Propozicija

Linearni operator $T\colon U \to V$ je injekcija ako i samo ako je $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Teorem

Ako je $T\colon U \to V$ izomorfizam vektorskih prostora onda T preslikava bazu od U u bazu od V.

Propozicija

Neka je U vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $\dim(U) = n$. Onda je $U \simeq \mathbb{F}^n$

Korolar

Neka su U i V vektorski prostori na poljem $\mathbb{F}$. Ako je $\dim(U) = \dim(V)$, onda je $U \simeq V$.

Propozicija

Linearni operator $T\colon U \to V$ je injekcija ako i samo ako je $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Teorem

Ako je $T\colon U \to V$ izomorfizam vektorskih prostora onda T preslikava bazu od U u bazu od V.

Propozicija

Neka je U vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $\dim(U) = n$. Onda je $U \simeq \mathbb{F}^n$

Korolar

Neka su U i V vektorski prostori na poljem $\mathbb{F}$. Ako je $\dim(U) = \dim(V)$, onda je $U \simeq V$.

Propozicija

Linearni operator $T\colon U \to V$ je injekcija ako i samo ako je $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Teorem

Ako je $T\colon U \to V$ izomorfizam vektorskih prostora onda T preslikava bazu od U u bazu od V.

Propozicija

Neka je U vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i dim$(U) = n$. Onda je $U \simeq \mathbb{F}^n$

Korolar

Neka su U i V vektorski prostori na poljem $\mathbb{F}$. Ako je dim(U) = dim(V), onda je $U \simeq V$.

Propozicija

Linearni operator $T\colon U \to V$ je injekcija ako i samo ako je $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Teorem

Ako je $T\colon U \to V$ izomorfizam vektorskih prostora onda T preslikava bazu od U u bazu od V.

Propozicija

Neka je U vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $\dim(U) = n$. Onda je $U \simeq \mathbb{F}^n$

Korolar

Neka su U i V vektorski prostori na poljem $\mathbb{F}$. Ako je $\dim(U) = \dim(V)$, onda je $U \simeq V$.

Teorem o rangu i defektu

Definicija

Neka je $T\colon U \to V$ linearni operator.

1. Dimenzija slike $\mathrm{Im}(T)$ se naziva rang operatora.
2. Dimenzija jezgre $\ker(T)$ se naziva defekt operatora.

- Rang operatora nam kazuje je li operator surjektivan.
- Defekt operatora nam kazuje je li operator injektivan.

Teorem o rangu i defektu

Ako je $T\colon U \to V$ linearni operator, onda je

$$\dim U = \dim \ker(T) + \dim \mathrm{Im}(T). \tag{5}$$

Teorem o rangu i defektu

Definicija

Neka je $T\colon U \to V$ linearni operator.

1. Dimenzija slike $\mathrm{Im}(T)$ se naziva rang operatora.
2. Dimenzija jezgre $\ker(T)$ se naziva defekt operatora.

- Rang operatora nam kazuje je li operator surjektivan.
- Defekt operatora nam kazuje je li operator injektivan.

Teorem o rangu i defektu

Ako je $T\colon U \to V$ linearni operator, onda je

$$\dim U = \dim \ker(T) + \dim \mathrm{Im}(T). \tag{5}$$

Teorem o rangu i defektu

Definicija

Neka je $T\colon U \to V$ linearni operator.

1. Dimenzija slike $\mathrm{Im}(T)$ se naziva rang operatora.
2. Dimenzija jezgre $\ker(T)$ se naziva defekt operatora.

- Rang operatora nam kazuje je li operator surjektivan.
- Defekt operatora nam kazuje je li operator injektivan.

Teorem o rangu i defektu

Ako je $T\colon U \to V$ linearni operator, onda je

$$\dim U = \dim\ker(T) + \dim\mathrm{Im}(T). \tag{5}$$