Matrice

Definicija

Matrica A reda (m, n) je pravokutna tablica skalara sa m redaka i n stupaca,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Element matrice A u i–tom retku i j–tom stupcu označavamo sa a_{ij}. Ako matrica A ima jednaki broj redaka i stupaca, $m = n$, onda kažemo da je A kvadratna matrica reda n.

Element a_{ij} se nalazi u i–tom retku i j–tom stupcu.

Matrice

Definicija

Matrica A reda (m, n) je pravokutna tablica skalara sa m redaka i n stupaca,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Element matrice A u i–tom retku i j–tom stupcu označavamo sa a_{ij}. Ako matrica A ima jednaki broj redaka i stupaca, $m = n$, onda kažemo da je A kvadratna matrica reda n.

Element a_{ij} se nalazi u i–tom retku i j–tom stupcu.

Neki osnovni pojmovi o matricama:

1. Kažemo da je A realna matrica ako je $A_{ij} \in \mathbb{R}$ za sve elemente A_{ij}.
2. Kažemo da je A kompleksna matrica ako je $A_{ij} \in \mathbb{C}$ za sve elemente A_{ij}.
3. Retčana matrica je matrica koja ima jedan redak,

$$A = [A_{11}\, A_{12}\, \ldots\, A_{1m}]. \tag{2}$$

4. Stupčana matrica je matrica koja ima jedan stupac,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Neki osnovni pojmovi o matricama:

1. Kažemo da je A realna matrica ako je $A_{ij} \in \mathbb{R}$ za sve elemente A_{ij}.
2. Kažemo da je A kompleksna matrica ako je $A_{ij} \in \mathbb{C}$ za sve elemente A_{ij}.
3. Retčana matrica je matrica koja ima jedan redak,
$$A = [A_{11}\, A_{12}\, \ldots\, A_{1m}]. \tag{2}$$
4. Stupčana matrica je matrica koja ima jedan stupac,
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Neki osnovni pojmovi o matricama:

1. Kažemo da je A realna matrica ako je $A_{ij} \in \mathbb{R}$ za sve elemente A_{ij}.
2. Kažemo da je A kompleksna matrica ako je $A_{ij} \in \mathbb{C}$ za sve elemente A_{ij}.
3. Retčana matrica je matrica koja ima jedan redak,

$$A = [A_{11}\ A_{12}\ \dots\ A_{1m}]. \tag{2}$$

4. Stupčana matrica je matrica koja ima jedan stupac,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Neki osnovni pojmovi o matricama:

1. Kažemo da je A realna matrica ako je $A_{ij} \in \mathbb{R}$ za sve elemente A_{ij}.
2. Kažemo da je A kompleksna matrica ako je $A_{ij} \in \mathbb{C}$ za sve elemente A_{ij}.
3. Retčana matrica je matrica koja ima jedan redak,

$$A = [A_{11}\; A_{12}\; \ldots\; A_{1m}]. \tag{2}$$

4. Stupčana matrica je matrica koja ima jedan stupac,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Definicija

Kažemo da su matrice $A = [A_{ij}]$ i $B = [B_{ij}]$ jednake i pišemo $A = B$ ako su A i B istog reda i ako za sve elemente vrijedi

$$A_{ij} = B_{ij}. \tag{4}$$

Vektorski prostor $M_{nm}(\mathbb{F})$

Definicija

- Skup svih matrica reda (n, m) nad poljem $\mathbb{F}$ označavamo sa $M_{nm}(\mathbb{F})$.
- Skup svih kvadratnih matrica reda n na poljem $\mathbb{F}$ označavamo sa $M_n(\mathbb{F})$.

Definicija (Zbroj matrica)

Neka su $A, B \in M_{nm}(\mathbb{F})$. Zbroj matrica A i B je matrica

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \dots & A_{1m} + B_{1m} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \dots & A_{2m} + B_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} + B_{n1} & A_{n2} + B_{n2} & \dots & A_{nm} + B_{nm} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Kraći zapis:

$$[A_{ij}] + [B_{ij}] = [A_{ij} + B_{ij}]. \tag{6}$$

Vektorski prostor $M_{nm}(\mathbb{F})$

Definicija

- Skup svih matrica reda (n, m) nad poljem $\mathbb{F}$ označavamo sa $M_{nm}(\mathbb{F})$.
- Skup svih kvadratnih matrica reda n na poljem $\mathbb{F}$ označavamo sa $M_n(\mathbb{F})$.

Definicija (Zbroj matrica)

Neka su $A, B \in M_{nm}(\mathbb{F})$. Zbroj matrica A i B je matrica

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \dots & A_{1m} + B_{1m} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \dots & A_{2m} + B_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} + B_{n1} & A_{n2} + B_{n2} & \dots & A_{nm} + B_{nm} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Kraći zapis:

$$[A_{ij}] + [B_{ij}] = [A_{ij} + B_{ij}]. \tag{6}$$

Definicija

Nul–matrica, u oznaci $\mathbf{0}$, je matrica čji su svi elementi jednaki nula.

Za nul–matricu vrijedi

$$A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A \tag{7}$$

ako su matrice A i $\mathbf{0}$ istoga reda.

Definicija (Umnožak matrice i skalara)

Neka je $A \in M_{nm}(\mathbb{F})$ i neka je $\lambda \in \mathbb{F}$. Umnožak matrice A i skalara λ je matrica

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \dots & \lambda A_{1m} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \dots & \lambda A_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda A_{n1} & \lambda A_{n2} & \dots & \lambda A_{nm} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Kraći zapis:

$$\lambda A = [\lambda A_{ij}]. \tag{9}$$

Definicija

Nul–matrica, u oznaci $\mathbf{0}$, je matrica čji su svi elementi jednaki nula.

Za nul–matricu vrijedi

$$A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A \tag{7}$$

ako su matrice A i $\mathbf{0}$ istoga reda.

Definicija (Umnožak matrice i skalara)

Neka je $A \in M_{nm}(\mathbb{F})$ i neka je $\lambda \in \mathbb{F}$. Umnožak matrice A i skalara λ je matrica

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \dots & \lambda A_{1m} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \dots & \lambda A_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda A_{n1} & \lambda A_{n2} & \dots & \lambda A_{nm} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Kraći zapis:

$$\lambda A = [\lambda A_{ij}]. \tag{9}$$

Propozicija

Zbrajanje matrica i množenje matrica skalarima ima sljedeća svojstva:

1. $A + B = B + A$,
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$,
3. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i $A, B \in M_{nm}(\mathbb{F})$.

Teorem

Skup $M_{mn}(F)$ je vektorski prostor s binarnim operacijama zbrajanja i množenja matrica skalarima.

Dimenzija prostora $M_{nm}(\mathbb{F})$ je jednaka

$$dim_{\mathbb{F}}(M_{nm}(\mathbb{F})) = nm. \tag{10}$$

Propozicija

Zbrajanje matrica i množenje matrica skalarima ima sljedeća svojstva:

1. $A + B = B + A$,
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$,
3. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i $A, B \in M_{nm}(\mathbb{F})$.

Teorem

Skup $M_{mn}(F)$ je vektorski prostor s binarnim operacijama zbrajanja i množenja matrica skalarima.

Dimenzija prostora $M_{nm}(\mathbb{F})$ je jednaka

$$dim_{\mathbb{F}}(M_{nm}(\mathbb{F})) = nm. \tag{10}$$

Propozicija

Zbrajanje matrica i množenje matrica skalarima ima sljedeća svojstva:

1. $A + B = B + A$,
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$,
3. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i $A, B \in M_{nm}(\mathbb{F})$.

Teorem

Skup $M_{mn}(F)$ je vektorski prostor s binarnim operacijama zbrajanja i množenja matrica skalarima.

Dimenzija prostora $M_{nm}(\mathbb{F})$ je jednaka

$$dim_{\mathbb{F}}(M_{nm}(\mathbb{F})) = nm. \tag{10}$$

Propozicija

Zbrajanje matrica i množenje matrica skalarima ima sljedeća svojstva:

1. $A + B = B + A$,
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$,
3. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i $A, B \in M_{nm}(\mathbb{F})$.

Teorem

Skup $M_{mn}(F)$ je vektorski prostor s binarnim operacijama zbrajanja i množenja matrica skalarima.

Dimenzija prostora $M_{nm}(\mathbb{F})$ je jednaka

$$dim_{\mathbb{F}}(M_{nm}(\mathbb{F})) = nm. \tag{10}$$

Množenje matrica

Definicija

Kažemo da je par matrica (A, B) ulančan ako A ima onoliko stupaca koliko B ima redaka.

Za ulančane matrice možemo definirati umnožak matrica

Definicija

Neka su $A = [A_{ij}]$ i $B = [B_{ij}]$ ulančane matrice reda (n, m) i (m, p), redom. Umnožak matrica A i B je matrica $C = [C_{ij}]$ reda (n, p) gdje je

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} B_{kj}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq p. \tag{11}$$

Množenje matrica nije komutativno:

$$AB \neq BA. \tag{12}$$

Množenje matrica

Definicija

Kažemo da je par matrica (A, B) ulančan ako A ima onoliko stupaca koliko B ima redaka.

Za ulančane matrice možemo definirati umnožak matrica

Definicija

Neka su $A = [A_{ij}]$ i $B = [B_{ij}]$ ulančane matrice reda (n, m) i (m, p), redom. Umnožak matrica A i B je matrica $C = [C_{ij}]$ reda (n, p) gdje je

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} B_{kj}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq p. \tag{11}$$

Množenje matrica nije komutativno:

$$AB \neq BA. \tag{12}$$

Množenje matrica

Definicija

Kažemo da je par matrica (A, B) ulančan ako A ima onoliko stupaca koliko B ima redaka.

Za ulančane matrice možemo definirati umnožak matrica

Definicija

Neka su $A = [A_{ij}]$ i $B = [B_{ij}]$ ulančane matrice reda (n, m) i (m, p), redom. Umnožak matrica A i B je matrica $C = [C_{ij}]$ reda (n, p) gdje je

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} B_{kj}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq p. \tag{11}$$

Množenje matrica nije komutativno:

$$AB \neq BA. \tag{12}$$

Množenje matrica

Definicija

Kažemo da je par matrica (A, B) ulančan ako A ima onoliko stupaca koliko B ima redaka.

Za ulančane matrice možemo definirati umnožak matrica

Definicija

Neka su $A = [A_{ij}]$ i $B = [B_{ij}]$ ulančane matrice reda (n, m) i (m, p), redom. Umnožak matrica A i B je matrica $C = [C_{ij}]$ reda (n, p) gdje je

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik} B_{kj}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq p. \tag{11}$$

Množenje matrica nije komutativno:

$$AB \neq BA. \tag{12}$$

Ako su A i B ulančane matrice i $B = [B_1 \mid B_2 \ldots \mid B_n]$, onda je

$$AB = [AB_1 \mid AB_2 \mid \ldots \mid AB_n]. \tag{13}$$

Propozicija

Množenje matrica ima sljedeća svojstva:

1. asocijativnost
$$(AB)C = A(BC), \tag{14}$$
2. homogenost
$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B), \quad \lambda \in \mathbb{F} \tag{15}$$
3. distributivnost
$$A(B + C) = AB + AC, \tag{16}$$
$$(A + B)C = AC + BC \tag{17}$$

kada su navedene operacije definirane.

Ako su A i B ulančane matrice i $B = [B_1 \mid B_2 \ldots \mid B_n]$, onda je

$$AB = [AB_1 \mid AB_2 \mid \ldots \mid AB_n]. \tag{13}$$

Propozicija

Množenje matrica ima sljedeća svojstva:

1. asocijativnost
$$(AB)C = A(BC), \tag{14}$$
2. homogenost
$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B), \quad \lambda \in \mathbb{F} \tag{15}$$
3. distributivnost
$$A(B + C) = AB + AC, \tag{16}$$
$$(A + B)C = AC + BC \tag{17}$$

kada su navedene operacije definirane.

Definicija (Jedinična matrica)

Jedinična matrica je kvadratna matrica oblika

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

$$I_n \quad \text{jedinična matrica reda } n \tag{19}$$

Za svaku matricu $A \in M_{nm}(\mathbb{F})$ vrijedi

$$AI = A, \qquad IA = A, \tag{20}$$

$$A\mathbf{0} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{0}A = \mathbf{0} \tag{21}$$

kada je umnožak matrica definiran.

Definicija (Jedinična matrica)

Jedinična matrica je kvadratna matrica oblika

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

$$I_n \quad \text{jedinična matrica reda } n \tag{19}$$

Za svaku matricu $A \in M_{nm}(\mathbb{F})$ vrijedi

$$AI = A, \qquad IA = A, \tag{20}$$

$$A\mathbf{0} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{0}A = \mathbf{0} \tag{21}$$

kada je umnožak matrica definiran.

Definicija (Dijagonalna matrica)

Dijagonalna matrica je kvadratna matrica koja izvan dijagonale ima nule.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{22}$$

Svojstva množenja dijagonalnom matricom:

1. Množenje matrice A dijagonalnom matricom slijeva skalira retke matrice A.
2. Množenje matrice A dijagonalnom matricom zdesna skalira stupce matrice A.
3. Umnožak dijagonalnih matrica je dijagonalna matrica.

Definicija (Dijagonalna matrica)

Dijagonalna matrica je kvadratna matrica koja izvan dijagonale ima nule.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{22}$$

Svojstva množenja dijagonalnom matricom:

1. Množenje matrice A dijagonalnom matricom slijeva skalira retke matrice A.
2. Množenje matrice A dijagonalnom matricom zdesna skalira stupce matrice A.
3. Umnožak dijagonalnih matrica je dijagonalna matrica.

Definicija (Transponirana matrica)

Neka je $A = [A_{ij}]$ matrica reda (n, m). Transponirana matrica A^T je matrica reda (m, n) za koju vrijedi

$$(A^T)_{ij} = A_{ji} \quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n. \tag{23}$$

Propozicija

Neka su A i B matrice nad poljem $\mathbb{F}$. Tada vrijedi

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$,
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, $\lambda \in \mathbb{F}$,
4. $(AB)^T = B^T A^T$

kada su navedene operacije definirane.

Definicija (Transponirana matrica)

Neka je $A = [A_{ij}]$ matrica reda (n, m). Transponirana matrica A^T je matrica reda (m, n) za koju vrijedi

$$(A^T)_{ij} = A_{ji} \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n. \tag{23}$$

Propozicija

Neka su A i B matrice nad poljem $\mathbb{F}$. Tada vrijedi

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$,
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, $\lambda \in \mathbb{F}$,
4. $(AB)^T = B^T A^T$

kada su navedene operacije definirane.

Definicija

Neka je $A = [A_{ij}]$ matrica nad poljem $\mathbb{C}$.

1. Kompleksno konjugirana matrica matrice A je matrica $\bar{A} = [\bar{A}_{ij}]$.
2. Kompleksno transponirana matrica matrice A je matrica $A^* = (\bar{A})^T$.

Propozicija

Neka su A i B matrica nad poljem $\mathbb{C}$. Tada vrijedi

1. $(A^*)^* = A$,
2. $(A + B)^* = A^* + B^*$,
3. $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*, \quad \lambda \in \mathbb{C}$,
4. $(AB)^* = B^* A^*$

kada su navedene operacije definirane.

Definicija

Neka je $A = [A_{ij}]$ matrica nad poljem $\mathbb{C}$.

1. Kompleksno konjugirana matrica matrice A je matrica $\bar{A} = [\bar{A}_{ij}]$.
2. Kompleksno transponirana matrica matrice A je matrica $A^* = (\bar{A})^T$.

Propozicija

Neka su A i B matrica nad poljem $\mathbb{C}$. Tada vrijedi

1. $(A^*)^* = A$,
2. $(A + B)^* = A^* + B^*$,
3. $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*, \quad \lambda \in \mathbb{C}$,
4. $(AB)^* = B^* A^*$

kada su navedene operacije definirane.

Definicija

Kažemo da je kvadratna matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$

1. simetrična ako je $A^T = A$,
2. antisimetrična ako je $A^T = -A$.

Svaku kvadratnu matricu $A \in M_n(\mathbb{R})$ možemo rastaviti kao zbroj simetrične i antisimetrične matrice,

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T). \tag{24}$$

Kvadratne matrice

Definicija

Kažemo da je kvadratna matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$

1. simetrična ako je $A^T = A$,
2. antisimetrična ako je $A^T = -A$.

Svaku kvadratnu matricu $A \in M_n(\mathbb{R})$ možemo rastaviti kao zbroj simetrične i antisimetrične matrice,

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T). \tag{24}$$

Definicija

Kažemo da je matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$

1. hermitska ako je $A^* = A$,
2. antihermitska ako je $A^* = -A$.

Svaku kvadratnu matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ možemo rastaviti kao zbroj hermitske i antihermitske matrice,

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*). \tag{25}$$

Definicija

Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ kvadratna matrica. Trag matrice A je suma njezinih dijagonalnih elemenata

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}. \tag{26}$$

Definicija

Kažemo da je matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$

1. hermitska ako je $A^* = A$,
2. antihermitska ako je $A^* = -A$.

Svaku kvadratnu matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ možemo rastaviti kao zbroj hermitske i antihermitske matrice,

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*). \tag{25}$$

Definicija

Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ kvadratna matrica. Trag matrice A je suma njezinih dijagonalnih elemenata

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}. \tag{26}$$

Definicija

Kažemo da je matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$

1. hermitska ako je $A^* = A$,
2. antihermitska ako je $A^* = -A$.

Svaku kvadratnu matricu $A \in M_n(\mathbb{C})$ možemo rastaviti kao zbroj hermitske i antihermitske matrice,

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*). \tag{25}$$

Definicija

Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ kvadratna matrica. Trag matrice A je suma njezinih dijagonalnih elemenata

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}. \tag{26}$$

Propozicija

Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ i neka je $\lambda \in \mathbb{F}$. Tada vrijedi

1. $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$,
2. $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$.

Korolar

Preslikavanje $Tr\colon M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ je linearni funkcional na prostoru $M_n(\mathbb{F})$.

Propozicija

Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Onda je

$$Tr(AB) = Tr(BA). \tag{27}$$

Propozicija

Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ i neka je $\lambda \in \mathbb{F}$. Tada vrijedi

1. $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$,
2. $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$.

Korolar

Preslikavanje $Tr\colon M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ je linearni funkcional na prostoru $M_n(\mathbb{F})$.

Propozicija

Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Onda je

$$Tr(AB) = Tr(BA). \tag{27}$$

Propozicija

Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ i neka je $\lambda \in \mathbb{F}$. Tada vrijedi

1. $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$,
2. $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$.

Korolar

Preslikavanje $Tr\colon M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ je linearni funkcional na prostoru $M_n(\mathbb{F})$.

Propozicija

Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Onda je

$$Tr(AB) = Tr(BA). \tag{27}$$

Definicija

Rang po stupcima matrice A, u oznaci $r_S(A)$, je maksimalni broj linearno nezavisnih stupaca matrice A.

Definicija

Rang po retcima matrice A, u oznaci $r'_R(A)$, je maksimalni broj linearno nezavisnih redaka matrice A.

Teorem

Za svaku matricu $A \in M_{nm}(\mathbb{F})$ je rang po stupcima jednak rangu po retcima matrice A.

$$r_S(A) = r_R(A) = r(A) \quad \text{rang matrice } A$$

Rang matrice

Definicija

Rang po stupcima matrice A, u oznaci $r_S(A)$, je maksimalni broj linearno nezavisnih stupaca matrice A.

Definicija

Rang po retcima matrice A, u oznaci $r'_R(A)$, je maksimalni broj linearno nezavisnih redaka matrice A.

Teorem

Za svaku matricu $A \in M_{nm}(\mathbb{F})$ je rang po stupcima jednak rangu po retcima matrice A.

$$r_S(A) = r_R(A) = r(A) \quad \text{rang matrice } A$$

Rang matrice

Definicija

Rang po stupcima matrice A, u oznaci $r_S(A)$, je maksimalni broj linearno nezavisnih stupaca matrice A.

Definicija

Rang po retcima matrice A, u oznaci $r'_R(A)$, je maksimalni broj linearno nezavisnih redaka matrice A.

Teorem

Za svaku matricu $A \in M_{nm}(\mathbb{F})$ je rang po stupcima jednak rangu po retcima matrice A.

$$r_S(A) = r_R(A) = r(A) \quad \text{rang matrice } A$$

Rang matrice

Definicija

Rang po stupcima matrice A, u oznaci $r_S(A)$, je maksimalni broj linearno nezavisnih stupaca matrice A.

Definicija

Rang po retcima matrice A, u oznaci $r'_R(A)$, je maksimalni broj linearno nezavisnih redaka matrice A.

Teorem

Za svaku matricu $A \in M_{nm}(\mathbb{F})$ je rang po stupcima jednak rangu po retcima matrice A.

$$r_S(A) = r_R(A) = r(A) \quad \text{rang matrice } A$$

Definicija (Rang matrice)

- Rang matrice A je rang po stupcima ili rang po retcima matrice A.
- Rang nul–matrice jednak je nula.

Definicija

Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ kvadratna matrica. Kažemo da je

1. A gornje trokutasta matrica ako su njezini elementi ispod dijagonale jednaki nula,
2. A donje trokutasta matrica ako su njeizini elementi iznad dijagonale jednaki nula.

Rang trokutaste matrice je jednak broju elemenata na dijagonali koji su različiti od nule.

Definicija (Rang matrice)

- Rang matrice A je rang po stupcima ili rang po retcima matrice A.
- Rang nul–matrice jednak je nula.

Definicija

Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ kvadratna matrica. Kažemo da je

1. A gornje trokutasta matrica ako su njezini elementi ispod dijagonale jednaki nula,
2. A donje trokutasta matrica ako su njeizini elementi iznad dijagonale jednaki nula.

Rang trokutaste matrice je jednak broju elemenata na dijagonali koji su različiti od nule.

Definicija (Rang matrice)

- Rang matrice A je rang po stupcima ili rang po retcima matrice A.
- Rang nul–matrice jednak je nula.

Definicija

Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ kvadratna matrica. Kažemo da je

1. A gornje trokutasta matrica ako su njezini elementi ispod dijagonale jednaki nula,
2. A donje trokutasta matrica ako su njeizini elementi iznad dijagonale jednaki nula.

Rang trokutaste matrice je jednak broju elemenata na dijagonali koji su različiti od nule.

Elementarne transformacije na matricama

Rang matrice se može efektivno računati pomoću elementarnih transformacija na matricama.

Elementarne transformacije

1. Zamjena dvaju stupaca ili redaka matrice.
2. Množenje nekog stupca ili retka skalarom $\lambda \neq 0$.
3. Dodavanje nekog stupca ili retka nekom drugom stupcu ili retku te matrice.

Teorem

Ako je matrica B dobivena konačnim brojem elementarnih transformacija na matrici A, onda A i B imaju isti rang.

Definicija

Kažemo da su matrice A i B ekvivalentne i pišemo $A \simeq B$ ako se B može dobiti konačnim brojem elementarnih transformacija na matrici A.

Elementarne transformacije na matricama

Rang matrice se može efektivno računati pomoću elementarnih transformacija na matricama.

Elementarne transformacije

1. Zamjena dvaju stupaca ili redaka matrice.
2. Množenje nekog stupca ili retka skalarom $\lambda \neq 0$.
3. Dodavanje nekog stupca ili retka nekom drugom stupcu ili retku te matrice.

Teorem

Ako je matrica B dobivena konačnim brojem elementarnih transformacija na matrici A, onda A i B imaju isti rang.

Definicija

Kažemo da su matrice A i B ekvivalentne i pišemo $A \simeq B$ ako se B može dobiti konačnim brojem elementarnih transformacija na matrici A.

Elementarne transformacije na matricama

Rang matrice se može efektivno računati pomoću elementarnih transformacija na matricama.

Elementarne transformacije

1. Zamjena dvaju stupaca ili redaka matrice.
2. Množenje nekog stupca ili retka skalarom $\lambda \neq 0$.
3. Dodavanje nekog stupca ili retka nekom drugom stupcu ili retku te matrice.

Teorem

Ako je matrica B dobivena konačnim brojem elementarnih transformacija na matrici A, onda A i B imaju isti rang.

Definicija

Kažemo da su matrice A i B ekvivalentne i pišemo $A \simeq B$ ako se B može dobiti konačnim brojem elementarnih transformacija na matrici A.

Elementarne transformacije na matricama

Rang matrice se može efektivno računati pomoću elementarnih transformacija na matricama.

Elementarne transformacije

1. Zamjena dvaju stupaca ili redaka matrice.
2. Množenje nekog stupca ili retka skalarom $\lambda \neq 0$.
3. Dodavanje nekog stupca ili retka nekom drugom stupcu ili retku te matrice.

Teorem

Ako je matrica B dobivena konačnim brojem elementarnih transformacija na matrici A, onda A i B imaju isti rang.

Definicija

Kažemo da su matrice A i B ekvivalentne i pišemo $A \simeq B$ ako se B može dobiti konačnim brojem elementarnih transformacija na matrici A.

Korolar

Ekvivalentne matrice imaju isti rang.

Definicija

Kažemo da je $D_r \in M_{nm}(\mathbb{F})$ kanonska matrica ranga $r \geq 0$ ako D_r imam oblik

$$D_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & & & 0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Simbolički pišemo

$$D_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_r \text{ jedinična matrica reda } r. \tag{29}$$

Korolar

Ekvivalentne matrice imaju isti rang.

Definicija

Kažemo da je $D_r \in M_{nm}(\mathbb{F})$ kanonska matrica ranga $r \geq 0$ ako D_r imam oblik

$$D_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & & & 0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Simbolički pišemo

$$D_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_r \text{ jedinična matrica reda } r. \tag{29}$$

Teorem

Svaka matrica je ekvivalentna kanonskoj matrici D_r istog tipa za neki $r \geq 0$.

Dokaz.

Ako je $A = 0$ nul–matrica, onda je $A = D_0$ i dokaz je gotov. Pretpostavimo da je $A \neq 0$. Onda postoji element $A_{ij} \neq 0$.

1. Zamjenom redaka i stupaca matrice A, element A_{ij} možemo dovesti na mjesti $(1,1)$.
2. Dijeljenjem s $A_{ij} \neq 0$ postižemo da je na mjestu $(1,1)$ element 1.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nm} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nm} \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Teorem

Svaka matrica je ekvivalentna kanonskoj matrici D_r istog tipa za neki $r \geq 0$.

Dokaz.

Ako je $A = 0$ nul–matrica, onda je $A = D_0$ i dokaz je gotov. Pretpostavimo da je $A \neq 0$. Onda postoji element $A_{ij} \neq 0$.

1. Zamjenom redaka i stupaca matrice A, element A_{ij} možemo dovesti na mjesti $(1,1)$.
2. Dijeljenjem s $A_{ij} \neq 0$ postižemo da je na mjestu $(1,1)$ element 1.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nm} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nm} \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Teorem

Svaka matrica je ekvivalentna kanonskoj matrici D_r istog tipa za neki $r \geq 0$.

Dokaz.

Ako je $A = 0$ nul–matrica, onda je $A = D_0$ i dokaz je gotov. Pretpostavimo da je $A \neq 0$. Onda postoji element $A_{ij} \neq 0$.

1. Zamjenom redaka i stupaca matrice A, element A_{ij} možemo dovesti na mjesti $(1, 1)$.
2. Dijeljenjem s $A_{ij} \neq 0$ postižemo da je na mjestu $(1, 1)$ element 1.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nm} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nm} \end{bmatrix}. \tag{30}$$

3. Množenjem jedinice i dodavanjem prvog stupca ili retka ostalim stupcima ili retcima postižemo da matrica ima oblik

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{22} & \dots & C_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & C_{n2} & \dots & C_{nm} \end{bmatrix}. \tag{31}$$

4. Ako su svi $C_{ij} = 0$, onda je $A \sim D_1$ i dokaz je gotov. Ako postoji $C_{kl} \neq 0$, onda se postupak ponavlja na podmatrici s elementima C_{ij}. Nakon konačnog broja koraka dolazimo do matrice

$$D_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & & & 0 \end{bmatrix}. \tag{32}$$

3. Množenjem jedinice i dodavanjem prvog stupca ili retka ostalim stupcima ili retcima postižemo da matrica ima oblik

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{22} & \dots & C_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & C_{n2} & \dots & C_{nm} \end{bmatrix}. \tag{31}$$

4. Ako su svi $C_{ij} = 0$, onda je $A \sim D_1$ i dokaz je gotov. Ako postoji $C_{kl} \neq 0$, onda se postupak ponavlja na podmatrici s elementima C_{ij}. Nakon konačnog broja koraka dolazimo do matrice

$$D_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & & & 0 \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Inverzna matrica

Definicija

Kažemo da je kvadratna matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ invertibilna ako postoji matrica $X \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je

$$AX = XA = I \tag{33}$$

gdje je I jedinična matrica reda n. Matricu X nazivamo inverz matrice A i označavamo s A^{-1}.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Lema

Inverz matrice, ako postoji, je jedinstven.

Lema

Ako su A i B invertibilne matrice istog reda, onda je AB invertiblna matrica i vrijedi

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \tag{34}$$

Inverzna matrica

Definicija

Kažemo da je kvadratna matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ invertibilna ako postoji matrica $X \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je

$$AX = XA = I \tag{33}$$

gdje je I jedinična matrica reda n. Matricu X nazivamo inverz matrice A i označavamo s A^{-1}.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Lema

Inverz matrice, ako postoji, je jedinstven.

Lema

Ako su A i B invertibilne matrice istog reda, onda je AB invertiblna matrica i vrijedi

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \tag{34}$$

Inverzna matrica

Definicija

Kažemo da je kvadratna matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ invertibilna ako postoji matrica $X \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je

$$AX = XA = I \tag{33}$$

gdje je I jedinična matrica reda n. Matricu X nazivamo inverz matrice A i označavamo s A^{-1}.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Lema

Inverz matrice, ako postoji, je jedinstven.

Lema

Ako su A i B invertibilne matrice istog reda, onda je AB invertiblna matrica i vrijedi

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \tag{34}$$