Sustavi linearnih jednadžbi

Sustav linearnih jednadžbi nad poljem $\mathbb{F}$ u nepoznanicama $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je sustav oblika

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \tag{1}$$
$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2,$$
$$\vdots$$
$$\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m, \quad \alpha_{ij},\ \beta_i \in \mathbb{F}. \tag{2}$$

$$\alpha_{ij} \in \mathbb{F} \quad \text{koeficijenti sustava} \tag{3}$$
$$\beta_i \in \mathbb{F} \quad \text{slobodni koeficijenti} \tag{4}$$

n je broj nepoznanica, m je broj jednadžbi

Rješenje sustava je svaka uređena n-torka $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ koja zadovoljava sustav jednadžbi.

Sustavi linearnih jednadžbi

Sustav linearnih jednadžbi nad poljem $\mathbb{F}$ u nepoznanicama $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je sustav oblika

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \tag{1}$$

$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2,$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m, \quad \alpha_{ij},\ \beta_i \in \mathbb{F}. \tag{2}$$

$$\alpha_{ij} \in \mathbb{F} \quad \text{koeficijenti sustava} \tag{3}$$

$$\beta_i \in \mathbb{F} \quad \text{slobodni koeficijenti} \tag{4}$$

n je broj nepoznanica, m je broj jednadžbi

Rješenje sustava je svaka uređena n-torka $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ koja zadovoljava sustav jednadžbi.

Sustavi linearnih jednadžbi

Sustav linearnih jednadžbi nad poljem $\mathbb{F}$ u nepoznanicama $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je sustav oblika

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n &= \beta_1, \qquad (1)\\
\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n &= \beta_2,\\
&\vdots\\
\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n &= \beta_m, \quad \alpha_{ij},\ \beta_i \in \mathbb{F}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

$$\alpha_{ij} \in \mathbb{F} \quad \text{koeficijenti sustava} \qquad (3)$$

$$\beta_i \in \mathbb{F} \quad \text{slobodni koeficijenti} \qquad (4)$$

n je broj nepoznanica, m je broj jednadžbi

Rješenje sustava je svaka uređena n-torka $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ koja zadovoljava sustav jednadžbi.

Sustavi linearnih jednadžbi

Sustav linearnih jednadžbi nad poljem $\mathbb{F}$ u nepoznanicama $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je sustav oblika

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \tag{1}$$

$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2,$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m, \quad \alpha_{ij},\ \beta_i \in \mathbb{F}. \tag{2}$$

$$\alpha_{ij} \in \mathbb{F} \quad \text{koeficijenti sustava} \tag{3}$$

$$\beta_i \in \mathbb{F} \quad \text{slobodni koeficijenti} \tag{4}$$

n je broj nepoznanica, m je broj jednadžbi

Rješenje sustava je svaka uređena n-torka $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ koja zadovoljava sustav jednadžbi.

Sustavi linearnih jednadžbi

Sustav linearnih jednadžbi nad poljem $\mathbb{F}$ u nepoznanicama $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je sustav oblika

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \tag{1}$$

$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2,$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m, \quad \alpha_{ij},\ \beta_i \in \mathbb{F}. \tag{2}$$

$$\alpha_{ij} \in \mathbb{F} \quad \text{koeficijenti sustava} \tag{3}$$

$$\beta_i \in \mathbb{F} \quad \text{slobodni koeficijenti} \tag{4}$$

n je broj nepoznanica, m je broj jednadžbi

Rješenje sustava je svaka uređena n-torka $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ koja zadovoljava sustav jednadžbi.

Svakom sustavu pridružujemo matricu sustava

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$\text{matricu nepoznanica } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots, x_n \end{bmatrix}, \text{ i matricu slobodnih koeficijenata } B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Sustav jednadžbi možemo zapisati u matričnom obliku

$$AX = B. \tag{7}$$

Sustav jednadžbi (1)–(2) ekvivalentan je matričnoj jednadžbi (7).

Također definiramo proširenu matricu sustava

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Tri osnovna problema

1. *Egzistencija rješenja.* Koji su nužni i dovoljni uvjet da bi sustav $AX = B$ imao barem jedno rješenje?
2. *Struktura rješenja.* Ako sustav ima rješenje,
    1. kada ima točno jedno rješenje,
    2. kada ima više rješenja?
3. *Efektivno rješavanje sustava.* Kako pronaći algoritam kojim se mogu odrediti sva rješenja sustava?

Također definiramo proširenu matricu sustava

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Tri osnovna problema

1. *Egzistencija rješenja*. Koji su nužni i dovoljni uvjet da bi sustav $AX = B$ imao barem jedno rješenje?
2. *Struktura rješenja*. Ako sustav ima rješenje,
    1. kada ima točno jedno rješenje,
    2. kada ima više rješenja?
3. *Efektivno rješavanje sustava*. Kako pronaći algoritam kojim se mogu odrediti sva rješenja sustava?

Također definiramo proširenu matricu sustava

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Tri osnovna problema

1. *Egzistencija rješenja*. Koji su nužni i dovoljni uvjet da bi sustav $AX = B$ imao barem jedno rješenje?
2. *Struktura rješenja*. Ako sustav ima rješenje,
    1. kada ima točno jedno rješenje,
    2. kada ima više rješenja?
3. *Efektivno rješavanje sustava*. Kako pronaći algoritam kojim se mogu odrediti sva rješenja sustava?

Također definiramo proširenu matricu sustava

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Tri osnovna problema

1. *Egzistencija rješenja*. Koji su nužni i dovoljni uvjet da bi sustav $AX = B$ imao barem jedno rješenje?
2. *Struktura rješenja*. Ako sustav ima rješenje,
    1. kada ima točno jedno rješenje,
    2. kada ima više rješenja?
3. *Efektivno rješavanje sustava*. Kako pronaći algoritam kojim se mogu odrediti sva rješenja sustava?

Primjeri

1. Sustav

$$x + 2y = 1, \tag{9}$$

$$2x + 3y = -2 \tag{10}$$

ima točno jedno rješenje $x = -7, y = 4$.
Geometrijska interpretacija:

$$x + 2y = 1, \quad 2x + 3y = -2 \quad \text{dva pravca koja se sijeku u točki } (-7, 4)$$

2. Sustav

$$x + 2y = 2, \tag{11}$$

$$-2x - 4y = 1 \tag{12}$$

nema rješenja.
Geometrijska interpretacija:

$$x + 2y = 2, \quad -x - 4y = 1 \quad \text{dva paralelna pravca koja se ne sijeku}$$

Primjeri

1. Sustav

$$x + 2y = 1, \tag{9}$$
$$2x + 3y = -2 \tag{10}$$

   ima točno jedno rješenje $x = -7, y = 4$.
   Geometrijska interpretacija:

$$x + 2y = 1, \quad 2x + 3y = -2 \quad \text{dva pravca koja se sijeku u točki } (-7, 4)$$

2. Sustav

$$x + 2y = 2, \tag{11}$$
$$-2x - 4y = 1 \tag{12}$$

   nema rješenja.
   Geometrijska interpretacija:

$$x + 2y = 2, \quad -x - 4y = 1 \quad \text{dva paralelna pravca koja se ne sijeku}$$

3. Sustav

$$x + 3y = 5, \tag{13}$$
$$-2x - 6y = -10 \tag{14}$$

ima samo jednu jednažbu

$$x + 3y = 5 \tag{15}$$

što daje beskonačno mnogo rješenja

$$x_2 = t, \quad x_1 = -3t + 5, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Geometrijska interpretacija:

$$x + 3y = 5, \quad -2x - 6y = -10$$

dva pravca koja se podudaraju i sijeku se u svim točkama.

Kronecker–Capelli

Sustav linearnih jednadžbi $AX = B$ je rješiv ako i samo ako matrica sustava i proširena matrica sustava imaju isti rang,

$$r([A \mid B]) = r(A). \tag{17}$$

Lema

Ako je rang matrice sustava jednak broju jednadžbi, onda je sustav rješiv.

Kronecker–Capelli

Sustav linearnih jednadžbi $AX = B$ je rješiv ako i samo ako matrica sustava i proširena matrica sustava imaju isti rang,

$$r([A \mid B]) = r(A). \tag{17}$$

Lema

Ako je rang matrice sustava jednak broju jednadžbi, onda je sustav rješiv.

Definicija

Za sustav linearnih jednadžbi $AX = B$ kažemo da je Cramerov sustav ako vrijedi

1. A je kvadratna matrica reda n,
2. $r(A) = n$.

Uočimo sljedeće:

1. A je kvadratna matrica $\Rightarrow$ broj jednadžbi jednak je broju nepoznanica,
2. $r(A) = n \Rightarrow$ matrica A je regularna pa je sustav ima jedinstveno rješenje $X = A^{-1}B$.

Efektivno rješavanje Cramerovog sustava $AX = B$:

1. Odredimo determinantu $D = \det(A)$.
2. Za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$ odredimo determinantu D_k koja se dobije tako da se k–ti stupac matrica A zamijeni stupcem slobodnih članova B.
3. Rješenje sustava je dano sa

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{18}$$

Cramerov sustav

Definicija

Za sustav linearnih jednadžbi $AX = B$ kažemo da je Cramerov sustav ako vrijedi

1. A je kvadratna matrica reda n,
2. $r(A) = n$.

Uočimo sljedeće:

1. A je kvadratna matrica $\Rightarrow$ broj jednadžbi jednak je broju nepoznanica,
2. $r(A) = n \Rightarrow$ matrica A je regularna pa je sustav ima jedinstveno rješenje $X = A^{-1}B$.

Efektivno rješavanje Cramerovog sustava $AX = B$:

1. Odredimo determinantu $D = \det(A)$.
2. Za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$ odredimo determinantu D_k koja se dobije tako da se k–ti stupac matrica A zamijeni stupcem slobodnih članova B.
3. Rješenje sustava je dano sa

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{18}$$

Definicija

Za sustav linearnih jednadžbi $AX = B$ kažemo da je Cramerov sustav ako vrijedi

1. A je kvadratna matrica reda n,
2. $r(A) = n$.

Uočimo sljedeće:

1. A je kvadratna matrica $\Rightarrow$ broj jednadžbi jednak je broju nepoznanica,
2. $r(A) = n \Rightarrow$ matrica A je regularna pa je sustav ima jedinstveno rješenje $X = A^{-1}B$.

Efektivno rješavanje Cramerovog sustava $AX = B$:

1. Odredimo determinantu $D = \det(A)$.
2. Za svaki $k = 1, 2, \dots, n$ odredimo determinantu D_k koja se dobije tako da se k–ti stupac matrica A zamijeni stupcem slobodnih članova B.
3. Rješenje sustava je dano sa

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{18}$$

Cramerov sustav

Definicija

Za sustav linearnih jednadžbi $AX = B$ kažemo da je Cramerov sustav ako vrijedi

1. A je kvadratna matrica reda n,
2. $r(A) = n$.

Uočimo sljedeće:

1. A je kvadratna matrica $\Rightarrow$ broj jednadžbi jednak je broju nepoznanica,
2. $r(A) = n \Rightarrow$ matrica A je regularna pa je sustav ima jedinstveno rješenje $X = A^{-1}B$.

Efektivno rješavanje Cramerovog sustava $AX = B$:

1. Odredimo determinantu $D = \det(A)$.
2. Za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$ odredimo determinantu D_k koja se dobije tako da se k–ti stupac matrica A zamijeni stupcem slobodnih članova B.
3. Rješenje sustava je dano sa

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{18}$$

Homogeni sustavi

Definicija

Za sustav linearnih jednadžbi kažemo da je homogen ako su svi slobodni koeficijenti sustava jednaki nuli.

Uočimo sljedeće:

1. Homogeni sustav $AX = 0$ je uvijek rješiv jer ima barem trivijalno rješenje $X = 0$.
2. Zanima nas kada sustav ima i netrivijalna rješenja.

Propozicija

Homogeni sustav $AX = 0$ gdje je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ ima

1. samo trivijalno rješenje $\Leftrightarrow r(A) = n$,
2. i netrivijalna rješenja $\Leftrightarrow r(A) < n$.

Definicija

Za sustav linearnih jednadžbi kažemo da je homogen ako su svi slobodni koeficijenti sustava jednaki nuli.

Uočimo sljedeće:

1. Homogeni sustav $AX = 0$ je uvijek rješiv jer ima barem trivijalno rješenje $X = 0$.
2. Zanima nas kada sustav ima i netrivijalna rješenja.

Propozicija

Homogeni sustav $AX = 0$ gdje je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ ima

1. samo trivijalno rješenje $\Leftrightarrow r(A) = n$,
2. i netrivijalna rješenja $\Leftrightarrow r(A) < n$.

Homogeni sustavi

Definicija

Za sustav linearnih jednadžbi kažemo da je homogen ako su svi slobodni koeficijenti sustava jednaki nuli.

Uočimo sljedeće:

1. Homogeni sustav $AX = 0$ je uvijek rješiv jer ima barem trivijalno rješenje $X = 0$.
2. Zanima nas kada sustav ima i netrivijalna rješenja.

Propozicija

Homogeni sustav $AX = 0$ gdje je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ ima

1. samo trivijalno rješenje $\Leftrightarrow r(A) = n$,
2. i netrivijalna rješenja $\Leftrightarrow r(A) < n$.

Homogeni sustavi

Definicija

Za sustav linearnih jednadžbi kažemo da je homogen ako su svi slobodni koeficijenti sustava jednaki nuli.

Uočimo sljedeće:

1. Homogeni sustav $AX = 0$ je uvijek rješiv jer ima barem trivijalno rješenje $X = 0$.
2. Zanima nas kada sustav ima i netrivijalna rješenja.

Propozicija

Homogeni sustav $AX = 0$ gdje je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ ima

1. samo trivijalno rješenje $\Leftrightarrow r(A) = n$,
2. i netrivijalna rješenja $\Leftrightarrow r(A) < n$.

Korolar

Homogeni sustav $AX = 0$ kod kojeg je broj jednadžbi manji od broja nepoznanica ima uvijek i netrivijalna rješenja.

Korolar (Roucheov)

Homogeni sustav $AX = 0$ kod kojeg je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica ima netrivijalna rješenja ako i samo ako je $\det(A) = 0$.

Korolar

Homogeni sustav $AX = 0$ kod kojeg je broj jednadžbi manji od broja nepoznanica ima uvijek i netrivijalna rješenja.

Korolar (Roucheov)

Homogeni sustav $AX = 0$ kod kojeg je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica ima netrivijalna rješenja ako i samo ako je $\det(A) = 0$.

Struktura rješenja homogenog sustava

Promotrimo homogeni sustav

$$AX = 0, \quad A \in M_{mn}(\mathbb{F}), \quad r(A) < n \quad \text{(koji ima netrivijalna rješenja).} \tag{19}$$

1. Jezgra pridruženog linearnog operatora $T_A : M_{n1}(\mathbb{F}) \to M_{m1}(\mathbb{F})$ je netrivijalni potprostor od $M_{n1}(\mathbb{F})$ dimenzije

$$d = n - r(A). \tag{20}$$

U tom potprostoru postoji d linearno nezavisnih vektora

$$X_1, X_2, \ldots, X_d \in \ker(T_A). \tag{21}$$

2. Svaka matrica X_k je zadovoljva jednadžbu $AX_k = 0$.
3. Vektore $X_1, X_2, \ldots, X_d$ nazivamo fundamentalna rješenja sustava $AX = 0$.
4. Svako rješenje sustava $AX = 0$ se može prikazati kao linearna kombinacija

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_k X_k, \quad \lambda_i \in F. \tag{22}$$

5. Ako svi λ_i poprimaju proizvoljne vrijednosti u F, onda se (22) naziva opće rješenje sustava (19).

Struktura rješenja homogenog sustava

Promotrimo homogeni sustav

$$AX = 0, \quad A \in M_{mn}(\mathbb{F}), \quad r(A) < n \quad \text{(koji ima netrivijalna rješenja).} \tag{19}$$

1. Jezgra pridruženog linearnog operatora $T_A : M_{n1}(\mathbb{F}) \to M_{m1}(\mathbb{F})$ je netrivijalni potprostor od $M_{n1}(\mathbb{F})$ dimenzije

$$d = n - r(A). \tag{20}$$

U tom potprostoru postoji d linearno nezavisnih vektora

$$X_1, X_2, \dots, X_d \in \ker(T_A). \tag{21}$$

2. Svaka matrica X_k je zadovoljva jednadžbu $AX_k = 0$.
3. Vektore $X_1, X_2, \dots, X_d$ nazivamo fundamentalna rješenja sustava $AX = 0$.
4. Svako rješenje sustava $AX = 0$ se može prikazati kao linearna kombinacija

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_k X_k, \quad \lambda_i \in F. \tag{22}$$

5. Ako svi λ_i poprimaju proizvoljne vrijednosti u F, onda se (22) naziva opće rješenje sustava (19).

Promotrimo homogeni sustav

$$AX = 0, \quad A \in M_{mn}(\mathbb{F}), \quad r(A) < n \quad \text{(koji ima netrivijalna rješenja).} \tag{19}$$

1. Jezgra pridruženog linearnog operatora $T_A : M_{n1}(\mathbb{F}) \to M_{m1}(\mathbb{F})$ je netrivijalni potprostor od $M_{n1}(\mathbb{F})$ dimenzije

$$d = n - r(A). \tag{20}$$

U tom potprostoru postoji d linearno nezavisnih vektora

$$X_1, X_2, \ldots, X_d \in \ker(T_A). \tag{21}$$

2. Svaka matrica X_k je zadovoljva jednadžbu $AX_k = 0$.
3. Vektore $X_1, X_2, \ldots, X_d$ nazivamo fundamentalna rješenja sustava $AX = 0$.
4. Svako rješenje sustava $AX = 0$ se može prikazati kao linearna kombinacija

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_k X_k, \quad \lambda_i \in F. \tag{22}$$

5. Ako svi λ_i poprimaju proizvoljne vrijednosti u F, onda se (22) naziva opće rješenje sustava (19).

Struktura rješenja homogenog sustava

Promotrimo homogeni sustav

$$AX = 0, \quad A \in M_{mn}(\mathbb{F}), \quad r(A) < n \quad \text{(koji ima netrivijalna rješenja).} \tag{19}$$

1. Jezgra pridruženog linearnog operatora $T_A : M_{n1}(\mathbb{F}) \to M_{m1}(\mathbb{F})$ je netrivijalni potprostor od $M_{n1}(\mathbb{F})$ dimenzije

$$d = n - r(A). \tag{20}$$

U tom potprostoru postoji d linearno nezavisnih vektora

$$X_1, X_2, \ldots, X_d \in \ker(T_A). \tag{21}$$

2. Svaka matrica X_k je zadovoljva jednadžbu $AX_k = 0$.
3. Vektore $X_1, X_2, \ldots, X_d$ nazivamo fundamentalna rješenja sustava $AX = 0$.
4. Svako rješenje sustava $AX = 0$ se može prikazati kao linearna kombinacija

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_k X_k, \quad \lambda_i \in F. \tag{22}$$

5. Ako svi λ_i poprimaju proizvoljne vrijednosti u F, onda se (22) naziva opće rješenje sustava (19).

Struktura rješenja homogenog sustava

Promotrimo homogeni sustav

$$AX = 0, \quad A \in M_{mn}(\mathbb{F}), \quad r(A) < n \quad \text{(koji ima netrivijalna rješenja).} \tag{19}$$

1. Jezgra pridruženog linearnog operatora $T_A \colon M_{n1}(\mathbb{F}) \to M_{m1}(\mathbb{F})$ je netrivijalni potprostor od $M_{n1}(\mathbb{F})$ dimenzije

$$d = n - r(A). \tag{20}$$

U tom potprostoru postoji d linearno nezavisnih vektora

$$X_1, X_2, \ldots, X_d \in \ker(T_A). \tag{21}$$

2. Svaka matrica X_k je zadovoljva jednadžbu $AX_k = 0$.
3. Vektore $X_1, X_2, \ldots, X_d$ nazivamo fundamentalna rješenja sustava $AX = 0$.
4. Svako rješenje sustava $AX = 0$ se može prikazati kao linearna kombinacija

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_k X_k, \quad \lambda_i \in F. \tag{22}$$

5. Ako svi λ_i poprimaju proizvoljne vrijednosti u F, onda se (22) naziva opće rješenje sustava (19).

Struktura rješenja homogenog sustava

Promotrimo homogeni sustav

$$AX = 0, \quad A \in M_{mn}(\mathbb{F}), \quad r(A) < n \quad \text{(koji ima netrivijalna rješenja).} \tag{19}$$

1. Jezgra pridruženog linearnog operatora $T_A : M_{n1}(\mathbb{F}) \to M_{m1}(\mathbb{F})$ je netrivijalni potprostor od $M_{n1}(\mathbb{F})$ dimenzije

   $$d = n - r(A). \tag{20}$$

   U tom potprostoru postoji d linearno nezavisnih vektora

   $$X_1, X_2, \ldots, X_d \in \ker(T_A). \tag{21}$$

2. Svaka matrica X_k je zadovoljva jednadžbu $AX_k = 0$.
3. Vektore $X_1, X_2, \ldots, X_d$ nazivamo fundamentalna rješenja sustava $AX = 0$.
4. Svako rješenje sustava $AX = 0$ se može prikazati kao linearna kombinacija

   $$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_k X_k, \quad \lambda_i \in F. \tag{22}$$

5. Ako svi λ_i poprimaju proizvoljne vrijednosti u F, onda se (22) naziva opće rješenje sustava (19).

Struktura rješenja homogenog sustava

Promotrimo homogeni sustav

$$AX = 0, \quad A \in M_{mn}(\mathbb{F}), \quad r(A) < n \quad \text{(koji ima netrivijalna rješenja).} \tag{19}$$

1. Jezgra pridruženog linearnog operatora $T_A\colon M_{n1}(\mathbb{F}) \to M_{m1}(\mathbb{F})$ je netrivijalni potprostor od $M_{n1}(\mathbb{F})$ dimenzije

$$d = n - r(A). \tag{20}$$

U tom potprostoru postoji d linearno nezavisnih vektora

$$X_1, X_2, \ldots, X_d \in \ker(T_A). \tag{21}$$

2. Svaka matrica X_k je zadovoljva jednadžbu $AX_k = 0$.
3. Vektore $X_1, X_2, \ldots, X_d$ nazivamo fundamentalna rješenja sustava $AX = 0$.
4. Svako rješenje sustava $AX = 0$ se može prikazati kao linearna kombinacija

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_k X_k, \quad \lambda_i \in F. \tag{22}$$

5. Ako svi λ_i poprimaju proizvoljne vrijednosti u F, onda se (22) naziva opće rješenje sustava (19).

Ova zapažanja možemo sažeti u sljedeći teorem.

Teorem

Homogeni sustav $AX = 0$, gdje je A matrica tipa (m, n), ima $d = n - r(A)$ fundamentalnih rješenja. Svako rješenje sustava je linearna kombinacija fundamentalnih rješenja.

Nehomogeni sustav

Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Za sustav linearnih jednadžbi

$$AX = B \tag{23}$$

kažemo da je nehomogen ako je $B \neq 0$.

Sustavu (23) pridružujemo homogeni sustav $AX = 0$.

Pretpostavimo da je sustav $AX = B$ rješiv, tj. da je

$$r(A) = r([A \mid B]). \tag{24}$$

Broj $r(A)$ nazivamo rang sustava.

Zanima nas kako izgleda opće rješenje nehomogenog sustava.

Definicija

Bilo koji vektor $X_0 \in M_{n1}(\mathbb{F})$ takav da je $AX_0 = B$ nazivamo partikularno rješenje sustava $AX = B$.

Nehomogeni sustav

Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Za sustav linearnih jednadžbi

$$AX = B \tag{23}$$

kažemo da je nehomogen ako je $B \neq 0$.

Sustavu (23) pridružujemo homogeni sustav $AX = 0$.

Pretpostavimo da je sustav $AX = B$ rješiv, tj. da je

$$r(A) = r([A \mid B]). \tag{24}$$

Broj $r(A)$ nazivamo rang sustava.

Zanima nas kako izgleda opće rješenje nehomogenog sustava.

Definicija

Bilo koji vektor $X_0 \in M_{n1}(\mathbb{F})$ takav da je $AX_0 = B$ nazivamo partikularno rješenje sustava $AX = B$.

Nehomogeni sustav

Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Za sustav linearnih jednadžbi

$$AX = B \tag{23}$$

kažemo da je nehomogen ako je $B \neq 0$.

Sustavu (23) pridružujemo homogeni sustav $AX = 0$.

Pretpostavimo da je sustav $AX = B$ rješiv, tj. da je

$$r(A) = r([A \mid B]). \tag{24}$$

Broj $r(A)$ nazivamo rang sustava.

Zanima nas kako izgleda opće rješenje nehomogenog sustava.

Definicija

Bilo koji vektor $X_0 \in M_{n1}(\mathbb{F})$ takav da je $AX_0 = B$ nazivamo partikularno rješenje sustava $AX = B$.

Nehomogeni sustav

Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Za sustav linearnih jednadžbi

$$AX = B \tag{23}$$

kažemo da je nehomogen ako je $B \neq 0$.

Sustavu (23) pridružujemo homogeni sustav $AX = 0$.

Pretpostavimo da je sustav $AX = B$ rješiv, tj. da je

$$r(A) = r([A \mid B]). \tag{24}$$

Broj $r(A)$ nazivamo rang sustava.

Zanima nas kako izgleda opće rješenje nehomogenog sustava.

Definicija

Bilo koji vektor $X_0 \in M_{n1}(\mathbb{F})$ takav da je $AX_0 = B$ nazivamo partikularno rješenje sustava $AX = B$.

Nehomogeni sustav

Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Za sustav linearnih jednadžbi

$$AX = B \tag{23}$$

kažemo da je nehomogen ako je $B \neq 0$.

Sustavu (23) pridružujemo homogeni sustav $AX = 0$.

Pretpostavimo da je sustav $AX = B$ rješiv, tj. da je

$$r(A) = r([A \mid B]). \tag{24}$$

Broj $r(A)$ nazivamo rang sustava.

Zanima nas kako izgleda opće rješenje nehomogenog sustava.

Definicija

Bilo koji vektor $X_0 \in M_{n1}(\mathbb{F})$ takav da je $AX_0 = B$ nazivamo partikularno rješenje sustava $AX = B$.

Teorem

Opće rješenje rješivog nehomogenog sustava $AX = B$ je zbroj partikularnog rješenja i općeg rješenja homogenog sustava $AX = 0$.

Primjedba

Ako je $r(A) = n$, onda homogeni sustav $AX = 0$ ima samo trivijalno rješenje pa nehomogeni sustav ima jedinstveno rješenje.

Teorem

Opće rješenje rješivog nehomogenog sustava $AX = B$ je zbroj partikularnog rješenja i općeg rješenja homogenog sustava $AX = 0$.

Primjedba

Ako je $r(A) = n$, onda homogeni sustav $AX = 0$ ima samo trivijalno rješenje pa nehomogeni sustav ima jedinstveno rješenje.