Linearna algebra i matrični račun

Saša Krešić-Jurić
Odjel za matematiku
Prirodoslovno-matematički fakultet
Split 2022

www.pmfst.hr/~skresic

Sadržaj

Poglavlje 1

Vektorski prostori

1.1 Osnovni pojmovi i definicije

Promotrimo skup svih uređenih parova (x_1, x_2) gdje su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Uređenom paru (x_1, x_2) možemo pridružiti točku u ravnini s kooridnatama x_1 i x_2, odnosno radij–vektor $\vec{r}$ koji spaja ishodište koordinatnog sustava s točkom (x_1, x_2). Skup svih uređenih parova (x_1, x_2) označavamo sa $\mathbb{R}^2$, a elemente skupa $\mathbb{R}^2$ možemo zamišljati kao skup svih točaka u ravnini ili kao skup svih radij–vektora $\vec{r}$. Na skupu $\mathbb{R}^2$ možemo definirati zbrajanje elemenata sa

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2). \tag{1.1}$$

Ako su točkama (x_1, x_2) i (y_1, y_2) pridruženi radij–vektori $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$, onda je točki $(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ pridružen radij–vektor $\vec{r}_1 + \vec{r}_2$. Stoga zbrajanje uređenih parova definirano relacijom (1.1) možemo interpretirati kao zbrajanje odgovarajućih radij–vektora. Primijetimo da je zbrajanje elemenata u $\mathbb{R}^2$ komutativano jer je

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2) = (y_1, y_2) + (x_1, x_2). \tag{1.2}$$

Slično se može pokazati da je zbrajanje asocijativno, odnosno da vrijedi

$$\big((x_1, x_2) + (y_1, y_2)\big) + (z_1, z_2) = (x_1, x_2) + \big((y_1, y_2) + (z_1, z_2)\big). \tag{1.3}$$

U skupu $\mathbb{R}^2$ postoji istaknuti element $(0, 0)$ sa svojstvom da je

$$(x_1, x_2) + (0, 0) = (x_1 + 0, x_2 + 0) = (x_1, x_2). \tag{1.4}$$

Radij–vektor pridružen točki $(0,0)$ je nul–vektor $\vec{0}$ koji ima početak i kraj u ishodištu koordinatnog sustava. Nadalje, za svaki element $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ postoji uređeni par $(-x_1, -x_2)$ sa svojstvom

$$(x_1, x_2) + (-x_1, -x_2) = (0, 0). \tag{1.5}$$

Uređeni par $(-x_1, -x_2)$ označavamo sa $-(x_1, x_2)$, dakle

$$-(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2). \tag{1.6}$$

Radij–vektor pridružen točki $(-x_1, -x_2)$ ima istu duljinu i leži na istom pravcu kao radij–vektor pridružen točki (x_1, x_2), ali ima suprotan smjer.

Na skupu $\mathbb{R}^2$ možemo također definirati operaciju množenja skalarima,

$$\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Ako je točki (x_1, x_2) pridružen radij–vektor $\vec{r}$, onda je točki $(\lambda x_1, \lambda x_2)$ pridružen radij–vektor $\lambda\vec{r}$. Dakle, množenje skalarima definirano s (1.7) možemo interpretirati kao množenje radij–vektora $\vec{r}$ realnim brojem $\lambda \in \mathbb{R}$.

Očigledno je da se operacije zbrajanja i množenja skalarima uvedene u (1.1) i (1.7) mogu generalizirati na skup uređenih n–torki

$$\mathbb{R}^n = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le n\big\}. \tag{1.8}$$

U tom slučaju definiramo

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \tag{1.9}$$

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n). \tag{1.10}$$

Definicija vektorskog prostora je motivirana svojstvima koje operacije (1.9) i (1.10) imaju na skupu $\mathbb{R}^n$. Općenito, elemente vektorskog prostora možemo množiti realnim ili kompleksnim brojevima pa ćemo u daljnjem tekstu skupove $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ označavati zajedničkim slovom $\mathbb{F}$ (od engleske riječi "field"). Skup $\mathbb{F}$ nazivamo polje skalara.

Definicija 1.1 (Vektorski prostor)**.** *Vektorski prostor nad poljem skalara* $\mathbb{F}$ *je skup* V *na kojem su definirane operacije zbrajanja* $+\colon V \times V \to V$ *i množenja* $\cdot\colon \mathbb{F} \times V \to V$ *sa sljedećim svojstvima:*

(1) zbrajanje je komutativno,

$$u + v = v + u \quad \forall\, u, v \in V, \tag{1.11}$$

(2) zbrajanje je asocijativno,

$$(u + v) + w = u + (v + w) \quad \forall\, u, v, w \in V, \tag{1.12}$$

(3) postoji element $\mathbf{0} \in V$ *takav da je*

$$\mathbf{0} + v = v \quad \forall\, v \in V, \tag{1.13}$$

(4) za svaki $v \in V$ *postoji element* $-v \in V$ *takav da je*

$$v + (-v) = \mathbf{0}, \tag{1.14}$$

(5) jedinica $1 \in \mathbb{F}$ *ima svojstvo da je*

$$1 \cdot v = v \quad \forall\, v \in V, \tag{1.15}$$

(6) množenje je distributivno,

$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \tag{1.16}$$

$$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \tag{1.17}$$

za sve $u, v \in V$ *i* $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$*,*

(7) množenje je kvaziasocijativno,

$$(\alpha\beta) = \alpha(\beta v) \tag{1.18}$$

za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ *i* $v \in V$*.*

Elemente skupa V nazivamo *vektorima*, a elemente skupa $\mathbb{F}$ nazivamo *skalarima*. Množenje $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ nazivamo množenje skalarima ili vanjsko množenje. Vektor $\mathbf{0} \in V$ nazivamo *nul–vektor* ili *neutralni element* prostora V, a vektor $-v$ nazivamo suprotni vektor vektora v. Razlika vektora v i w je definirana sa

$$v - w = v + (-w). \tag{1.19}$$

Definicija 1.2.

(i) Vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ nazivamo realni vektorski prostor.

(ii) Vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$ nazivamo kompleksni vektorski prostor.

Primjer 1.1. Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ jer zbrajanje i množenje na skupu $\mathbb{R}$ zadovoljava svojstva u Definiciji 1.1. Slično, skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ je realni vektorski prostor ako elemente iz $\mathbb{C}$ množimo realnim brojevima. Ako elemente iz $\mathbb{C}$ množimo kompleksnim brojevima, onda $\mathbb{C}$ postaje kompoleksni vektorski prostor. $\square$

Primjer 1.2. Euklidski prostor

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le n\} \tag{1.20}$$

je realni vektorski prostor s operacijama zbrajanja i množenja

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \tag{1.21}$$
$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.22}$$

Lako se provjeri da ovako defirano zbrajanje i množenje skalarima zadvoljava svojstva u Definiciji 1.1. Neutralni element ili nul–vektor je uređena n–torka

$$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0), \tag{1.23}$$

a suprotni vektor je dan sa

$$-(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n). \tag{1.24}$$

Euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ je prototip realnog vektorskog prostora. Vidjet ćemo da svaki realni konačnodimenzionalni vektorski prostor V "izgleda" kao $\mathbb{R}^n$ i da se njegovi elementi mogu predstaviti kao uređene n–torke $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. $\square$

Primjer 1.3. Na skupu

$$\mathbb{C}^n = \{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \mid z_i \in C, \quad 1 \leq i \leq n\} \tag{1.25}$$

definiramo zbrajanje i množenje skalarima na isti način kao na skupu $\mathbb{R}^n$. Kako elemente iz $\mathbb{C}^n$ možemo množiti realnim ili kompleksnim brojevima, $\mathbb{C}^n$ realni ili kompleksni vektorski prostor ovisno o tome je li $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. $\square$

Primjer 1.4. Važan primjer vektorskog prostora je skup polinoma stupnja $\leq n$,

$$\mathcal{P}_n = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{F}\}, \tag{1.26}$$

na kojemu zbrajanje polinoma i množenje polinoma skalarima definiramo na uobičajeni način. Ako su $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ i $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$, onda je

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n, \tag{1.27}$$

$$\lambda p(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \cdots + \lambda a_n x^n. \tag{1.28}$$

Nul–vektor je nul–polinom

$$\mathbf{0}(x) = 0 \tag{1.29}$$

(gdje su $a_i = 0$ za sve $i = 1, 2, \ldots, n$), a suprotni polinom polinoma $p(x)$ je

$$-p(x) = (-a_0) + (-a_1)x + \cdots + (-a_n)x^n. \tag{1.30}$$

$\square$

Promotrimo sada neka osnovna svojstva vektorskih prostora.

Propozicija 1.1.

(i) Vektorski prostor ima jedinstveni neutralni element.

(ii) Svaki element vektorskog prostora ima jedinstveni suprotni vektor.

Dokaz (i) Pretpostavimo da vektorski prostor V ima dva neutralna elementa $\mathbf{0}$ i $\mathbf{0}'$. Iz definicije neutralno elementa slijedi

$$\mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}' \tag{1.31}$$

jer je $\mathbf{0}$ neutralni element. Također,

$$\mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0} \tag{1.32}$$

jer je $\mathbf{0}'$ neutralni element. Dakle, $\mathbf{0} = \mathbf{0}'$.

(ii) Neka je $v \in V$. Pretpostavimo da v ima dva suprostna vektora, w i w'. Onda je $v + w = v + w' = \mathbf{0}$ odakle slijedi

$$w = w + \mathbf{0} = w + (v + w') = (w + v) + w' = \mathbf{0} + w' = w'. \tag{1.33}$$

■

Propozicija 1.2. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Tada vrijedi*

(i) $0 \cdot v = \mathbf{0}$ *za svaki* $v \in V$*,*

(ii) $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ *za svaki* $\alpha \in \mathbb{F}$*,*

(iii) $(-1)v = -v$ *za svaki* $v \in V$*.*

Dokaz (i) Za svaki vektor $v \in V$ imamo

$$0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v. \tag{1.34}$$

Dodavanjem suprotnog vektora $-0 \cdot v$ na obje strane jednakosti (1.34) dobivamo

$$0 \cdot v - 0 \cdot v = 0 \cdot v + (0 \cdot v - 0 \cdot v) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{0} = 0 \cdot v + \mathbf{0} = 0 \cdot v. \tag{1.35}$$

(ii) Za svaki $\alpha \in F$ vrijedi

$$\alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0}. \tag{1.36}$$

Sada dodavanjem suprotnog vektora $-\alpha \cdot \mathbf{0}$ na obje strane jednakosti (1.36) slijedi

$$\mathbf{0} = \alpha \cdot \mathbf{0}. \tag{1.37}$$

(iii) Neka je $v \in V$. Prema svojstvu jedinice u polju $\mathbb{F}$ imamo $1 \cdot v = v$ pa iz distributivnosti množenja slijedi

$$v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1 + (-1)) \cdot v = 0 \cdot v = \mathbf{0}. \tag{1.38}$$

Jednakost (1.38) implicira da je vektor $(-1) \cdot v$ suprotni vektor vektora v, odnosno $(-1) \cdot v = -v$. ■

1.2 Linearna nezavisnost vektora, baza vektorskog prostora

U ovom poglavlju ćemo naučiti što je linearna kombinacija vektora, linearna nezavisnost vektora, baza vektorskog prostora i dimenzija vektorskog prostora.

Definicija 1.3. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Linearna kombinacija vektora $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ je vektor*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \tag{1.39}$$

gdje su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$.

Skup svih linearnih kombinacija vektora $v_1, v_2, \ldots, v_n$ nazivamo linearna ljuska vektora $v_1, v_2, \ldots, v_n$ i označavamo sa $\operatorname{span}_{\mathbb{F}}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ili $[v_1, v_2, \ldots, v_n]_{\mathbb{F}}$. Dakle,

$$[v_1, v_2, \ldots, v_n]_{\mathbb{F}} = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in \mathbb{F},\ 1 \leq i \leq n \Big\}. \tag{1.40}$$

Ako se polje $\mathbb{F}$ podrazumijeva, onda jednostavno pišemo $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$.

Primjer 1.5. Vektor $v = (17, -4, 2) \in \mathbb{R}^3$ je linearna kombinacija vektora $v_1 = (2, 1, -3)$ i $v_2 = (1, -2, 4)$ jer je

$$(17, -4, 2) = 6 \cdot (2, 1, -3) + 5 \cdot (1, -2, 4). \tag{1.41}$$

Stoga je $v \in [v_1, v_2]$. Vektor $v = (5, 1) \in \mathbb{R}^2$ nije linearna kombinacija vektora $v_1 = (0, 2)$ i $v_2 = (0, -3)$. Doista, v ne možemo napisati kao $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ jer je

$$\alpha_1(0, 2) + \alpha_2(0, -3) = (0, 2\alpha_1 - 3\alpha_2) \tag{1.42}$$

pa ne postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ takvi da je $(0, 2\alpha_1 - 3\alpha_2) = (5, 1)$. Stoga, $v \notin [v_1, v_2]$. $\square$

Ako je $v \in [v_1, v_2, \ldots, v_n]$, onda postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ takvi da je

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n. \tag{1.43}$$

Promotrimo sada pitanje je li postoji drugi skup sklara taka da je

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n. \tag{1.44}$$

Oduzimanjem ovih jednadžbi dobivamo

$$\mathbf{0} = (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)v_n. \tag{1.45}$$

Ako je jedini način na koji linearna kombinacija vektora $v_1, v_2, \ldots, v_n$ daje nul–vektor takav da su svi koeficijenti u linearnoj kombinaciji nula, onda je $\alpha_i = \beta_i$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$ pa je izbor skalara u (1.43) jedinstven. Ovo svojstvo vektora $v_1, v_2, \ldots, v_n$ je važno i naziva se linearna nezavisnost koju navodimo u sljedećoj definicij.

Definicija 1.4. *Kažemo da je skup vektora $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ linearno nezavisan ako za svaku linearnu kombinaciju vektora iz S vrijedi*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0. \tag{1.46}$$

U protivnom kažemo da je S linearno zavisan.

Drugim riječima, vektori $v_1, v_2, \dots, v_n$ su linearno nezavisni ako i samo ako se nul–vektor $\mathbf{0}$ može zapisati kao linearna kombinacija vektora $v_1, v_2, \dots, v_n$ samo na trivijalni način, naime tako da je $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Iz Definicije 1.4 slijedi da su vektori $v_1, v_2, \dots, v_n$ linearno zavisni ako postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, od kojih je barem jedan različit od nule i takvi da je $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}$.

Primjer 1.6. Vektori $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1)$ iz prostora $\mathbb{R}^3$ su linearno nezavisni. Ako je

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \mathbf{0}, \tag{1.47}$$

onda gornje jednakosti slijedi

$$(\alpha_1, 0, 0) + (0, \alpha_1, 0) + (0, 0, \alpha_3) = (0, 0, 0) \tag{1.48}$$

što implicira $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. $\square$

Primjer 1.7. Promotrio vektore $v_1 = (1, 0,\ v_2 = (0, 1)$ i $v_3 = (-2, 1)$ u prostoru $\mathbb{R}^2$. Primijetimo da vektor v_3 možemo napisati kao

$$v_3 = (-2, 1) = -2(1, 0) + (0, 1) = -2v_1 + v_2 \tag{1.49}$$

što povlači $2v_1 - v_2 + v_3 = \mathbf{0}$. Zaključujemo da su vektori v_1, v_2 i v_3 linearno zavisni. $\square$

Propozicija 1.3. *Skup vektora $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $n \geq 2$, je linearno zavisan ako i samo ako se barem jedan od vektora iz S može napisati kao linearna kombinacija preostalih vektora iz S.*

Dokaz Prepostavimo da je skup S linearno zavisan. Onda postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ od kojih je barem jedan različit od nule takvi da je

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}. \tag{1.50}$$

Pretpostavimo da je $\alpha_k \neq 0$. Onda iz (1.50) dobivamo

$$v_k = -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_k}\, v_i. \tag{1.51}$$

Dakle, vektor v_k je linearna kombinacija preostalih vektora iz S.

Pretpostavimo sada da se vektor v_k može napisati kao linarna kombinacija preostalih vektora iz S,

$$v_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \lambda_i\, v_i. \tag{1.52}$$

Onda gornju jednakost možemo napisati kao

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{k-1} v_{k-1} + (-1)\cdot v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \lambda_n v_n = \mathbf{0}. \tag{1.53}$$

Obzirom da je koeficijent uz vektor v_k različit od nule, skup S je linearno zavisan. ■

Ako vektorski prostor V možemo promatrati kao prostor nad poljem $\mathbb{R}$ ili nad poljem $\mathbb{C}$, onda linearna nezavisnost vektora u V može ovisiti o izboru polja. Na primjer, ako prostor $V = \mathbb{C}$ promatramo kao realni vektorski prostor, onda je skup vektora $\{1+i, 1-i\}$ linearno nezavisan. Doista, ako je

$$a(1+i) + b(1-i) = 0, \tag{1.54}$$

za neke $a, b \in \mathbb{R}$, onda je

$$a + b + (a-b)i = 0. \tag{1.55}$$

Ovo implicira da je $a+b=0$ i $a-b=0$ iz čega slijedi $a=b=0$. Međutim, ako $\mathbb{C}$ promatramo kao kompleksni vektorski prostor, onda su $a, b \in \mathbb{C}$. U tom slučaju možemo uzeti

$$b = 1, \quad a = -\frac{1-i}{1+i} = i \tag{1.56}$$

pa je skup vektora $\{1+i, 1-i\}$ linearno zavisan.

Definicija 1.5. *Kažemo da skup vektora $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ razapinje vektorski prostor V ako za svaki $v \in V$ postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ takvi da je*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n. \tag{1.57}$$

Drugim riječima, skup vektora $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ razapinje prostor V ako je

$$[v_1, v_2, \ldots, v_n]_{\mathbb{F}} = V. \tag{1.58}$$

Primjer 1.8. Vektori $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$ razapinju prostor $\mathbb{R}^3$ jer svaki vektor $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ možemo napisati kao linearnu kombinaciju

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1). \tag{1.59}$$

$\square$

U teoriji vektorskih prostora od interesa su linearno nezavisni skupovi vektora koji razapinju zadani prostor.

Definicija 1.6. *Baza vektorskog prostora V je niz vektora $B = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ takav da*

(i) B razapinje V,

(ii) B je lienarno nezavisan skup.

Baza trivijalnog prostora $V = \{\mathbf{0}\}$ je prazan skup.

U izvjesnom smislu, baza sadrži optimalni broj vektora koji razapinju V. Ako broj vekotra u B nije dovoljan, onda B ne razapinje prostor V. S druge strane, ako je broj vektora u B prevelik, onda su vektori u B linenarno zavisni.

Primjer 1.9. Niz vekora

$$e_1 = (1,0,\ldots,0), \quad e_2 = (0,1,0,\ldots,0), \quad \ldots \quad e_n = (0,0,\ldots,1) \tag{1.60}$$

tvori bazu prostora $\mathbb{F}^n$. Baza $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ se naziva *kanonska* ili *standarna* baza prostora $\mathbb{F}^n$. $\square$

Primjer 1.10. Neka je P_n skup polinoma stupnja do uključivo n,

$$P_n = \left\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{F},\ 1 \leq i \neq n\right\}. \tag{1.61}$$

Svaki polinom u P_n je linearna kombinacija monoma $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Ovaj skup monoma je linearno nezavisan jer iz elementarne matematike znamo da niti jedan monom iz ovog skupa ne možemo napisati kao linearnu kombinaciju preostalih monoma. Dakle, niz monoma $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ je baza prostora P_n. $\square$

Primjer 1.11. Odredite bazu prostora

$$V = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\big\}. \tag{1.62}$$

Ako je $(x, y, z) \in V$, onda je $x = -y - z$ pa vektor (x, y, z) možemo zapisati kao

$$(x, y, z) = (-y - z, y, z) = (-y, y, 0) + (-z, 0, z) = y\,(-1, 1, 0) + z\,(-1, 0, 1). \tag{1.63}$$

Dakle, svaki vektor u V je linearna kombinacija vektora $(-1, 1, 0)$ i $(-1, 0, 1)$; stoga ovi vektori razapinju prostor V. Pretpostavimo da je

$$\alpha(-1, 1, 0) + \beta(-1, 1, 0) = (0, 0, 0). \tag{1.64}$$

Ovo implicira

$$(-\alpha - \beta, \alpha, \beta) = (0, 0, 0) \tag{1.65}$$

iz čega slijedi da je $\alpha = \beta = 0$. Zaključujemo da su vektori $(-1, 1, 0)$ i $(-1, 0, 1)$ linearno nezavisni pa je niz vektora $B = \big((-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\big)$ baza prostora V. $\square$

Potrebno je naglasiti da baza vektorskog prostora nije jedinstvena. Na primjer, niz vektora $B_1 = ((1, 0), (0, 1))$ i $B_2 = ((1, 1), (0, 1))$ tvore bazu prostora $\mathbb{R}^2$. Također, ako u zadanoj bazi promijenimo poredak vektora, onda dobivamo drugu bazu jer je u bazi važan poredak u kojem su poredani vektori baze. Iako baza zadanog prostora nije jedinstvena, može se pokazati da svake dvije baze imaju isti broj elemenatan. Ovo nam omogućava da definiramo dimenziju vektorkskog prostora.

Definicija 1.7. *Dimenzija prostora V, u oznaci $\dim_{\mathbb{F}} V$, je broj elementa u bilo kojoj bazi od V. Dimenzija trivijalnog prostora $\{\mathbf{0}\}$ je nula.*

Ako je polje sklalara podrazumijeva, onda dimenziju prostora kraće označavamo sa $\dim V$.

Prostor $\mathbb{F}^n$ ima kanonsku bazu $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, stoga je $\dim \mathbb{F}^n = n$. Prostor polinoma P_n ima bazu koja se sastoji od monoma $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ pa je $\dim P_n = n+1$. Uočimo da baza vektorskog prostora V može ovisiti o polju skalara ako se V može promatrati kao realni ili kao kompleksni vektorski prostor.

Primjer 1.12. Ako prostor $\mathbb{C}$ promatramo kao realni vektorski prostor, onda je baza od $\mathbb{C}$ dana sa $B_1 = (1, i)$ jer svaki $z \in \mathbb{C}$ možemo na jedinstveni način napisati kao

$$z = a \cdot 1 + b \cdot i, \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.66}$$

Stoga je $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. S druge strane, ako $\mathbb{C}$ promatramo kao kompleksni vektorski prostor, onda njegova baza ima samo jedan element $B_2 = (1)$ jer je

$$z = z \cdot 1 \quad \text{za svaki} \quad z \in \mathbb{C} \tag{1.67}$$

pa nam je u linearnoj kombinaciji s kompleksnim koeficijentima potreban samo jedan vektor $1 \in \mathbb{C}$. Stoga je $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$. $\square$

Teorem 1.1. *Niz $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ je baza prostora V ako i samo ako se svaki vektor $v \in V$ može napisati kao jedinstvena linearna kombinacija vektora iz B.*

Dokaz Neka je $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ baza od V i neka je $v \in V$. Pretpostavimo da se vektor $v \in V$ može na dva načina zapisati kao linearna kombinacija vektora iz B:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n, \tag{1.68}$$

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n. \tag{1.69}$$

Oduzimanjem ovih jednakosti dobivamo

$$\mathbf{0} = (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) v_n. \tag{1.70}$$

Vektori $v_1, v_2, \dots, v_n$ su linearno nezavisni pa jednakost (1.70) implicira

$$\alpha_1 = \beta_1, \ \alpha_2 = \beta_2, \quad \dots \quad \alpha_n = \beta_n. \tag{1.71}$$

Pretpostavimo sada da se svaki vektor $v \in V$ može na jedinstveni način napisati kao linearna kombinacija vektora iz B. Ovo implicira da vektori iz B razapinju prostor V. Pokažimo da su vektori iz B linearno nezavisni. Neka je

$$\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_n v_n = \mathbf{0}, \tag{1.72}$$

Prema pretpostavci, nul–vektor se može napisati samo kao jedinstvena linearna kombinacija

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n = \mathbf{0} \tag{1.73}$$

pa usporedbom (1.72) i (1.73) zaključujemo da je $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_n = 0$. Dakle, B je niz linearno nezavisnih vektora koji razapinju V pa je B baza prostora V. ■

Ako odaberemo bazu prostora V, $B = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, onda svakom vektoru $v \in V$ možemo na jedinstveni način pridružiti skalare $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ takve da je

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n. \tag{1.74}$$

Definicija 1.8. *Uređenu n–torku $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ nazivamo reprezentacija vektora v u bazi B i pišemo*

$$[v]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n). \tag{1.75}$$

Koeficijent α_i je i–ta komponeneta vektora v u bazi B.

1.3 Podprostori

Promotrimo podskup Euklidskog prostora $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ definiran sa $U = \{(x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Skup U čine sve točke u ravnini koje leže na pravcu $y = 3x$. Ako su $(x, 3x)$ i $(x', 3x')$ dvije točke na pravcu U, onda njihov zbroj daje

$$(x, 3x) + (x', 3x') = (x + x', 3(x + x')) \in U. \tag{1.76}$$

Nadalje, za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ imamo

$$\lambda(x, 3x) = (\lambda x, 3(\lambda x)) \in U.$$

Dakle, zbrajanjem dviju točaka na pravcu U i množenje točke iz U skalarom $\lambda \in \mathbb{R}$ dobivamo točku koja leži na pravcu U. Stoga na U možemo definirati zbrajanje vektora i množenje vektora skalarima. Obzirom da se asocijativnost, distributivnost i ostala svojstva ovih operacija nasljeđuju od prostora $\mathbb{R}^2$, zaključujemo da je pravac U vektorski prostor koji leži u prostoru $\mathbb{R}^2$. Takav skup je prirodno nazvati podprostor od $\mathbb{R}^2$. Ovo razmatranje motivira sljedeću definiciju.

Definicija 1.9. *Neprazan podskup $U \subseteq V$ vektoskog prostora V nazivamo podprostor od V ako je U vektorski prostor obzirom na iste binarne operacije definirane na V.*

Iz definicije 1.9 slijedi da je podskup U podprostor od V ako zadovoljava sljedeća svojstva:

(1) nul–vektor je element od U: $\mathbf{0} \in U$,

(2) U je zatvoren na zbrajanje vektora: $u, v \in U$ implicira $u + v \in U$,

(3) U je zatvoren na množenje vektora skalarima: $\lambda \in F$, $u \in U$ implicira $\lambda u \in U$.

Da bismo utvrdili je li neki podskup $U \subseteq V$ podprostor od V, dovoljno provjeriti svojstva (2)–(3), odnosno zatvorenost skupa na zbrajanje vektora i množenje vektora skalarima. Svaki prostor V ima trivijalne podprostore $U = \{\mathbf{0}\}$ i $U = V$.

Primjer 1.13. Skup točaka $U = \{(x, y, z) \mid ax + by + cz = 0\}$ predstavlja ravninu u prostoru $\mathbb{R}^3$ koja prolazi kroz ishodište. Pokažimo da je U podprostor od $\mathbb{R}^3$. Neka su $(x, y, z), (x', y', z') \in U$. Onda ove točke zadovoljavaju jednadžbu ravnine

$$ax + by + cz = 0, \quad ax' + by' + cz' = 0. \tag{1.77}$$

Zbrajanjem dobivamo

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z') \tag{1.78}$$

pa dobivena točka leži u ravnini U jer je

$$a(x + x') + b(y + y') + c(z + z') = ax + by + cz + ax' + by' + cz' = 0 + 0 = 0. \tag{1.79}$$

Dakle, $(x, y, z) + (x', y', z') \in U$. Nadalje, ako je $\lambda \in \mathbb{R}$, onda je

$$\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \tag{1.80}$$

pa dobivena točka zadovoljava jednadžbu ravnine jer je

$$a(\lambda x) + b(\lambda y) + c(\lambda z) = \lambda(ax + by + cz) = \lambda \cdot 0 = 0. \tag{1.81}$$

Stoga je skup U zatvoren na zbrajanje vektora i množenje vektora skalarima. Nadalje, $(0, 0, 0) \in U$ što povlači da je U podprostor od $\mathbb{R}^3$. $\square$

Primjer 1.14. Pokažite da je skup polinoma

$$\mathcal{P}_1 = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\} \tag{1.82}$$

podprostor prostora

$$\mathcal{P}_3 = \{a + bx + cx^3 + dx^3 \mid, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}. \tag{1.83}$$

$\square$

Primjer 1.15. Zadan je skup $U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 = x_n\}$. Skup U sadrži sve točke u Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$ kojima su prva i zadnja koordinata jednake. Pokažimo da je U podprostor od $\mathbb{R}^n$. Neka su $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in U$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada je $x_1 = x_n$ i $y_1 = y_n$. Zbrajanjem vektora dobivamo

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in U \tag{1.84}$$

jer je $x_1 + y_1 = x_n + y_n$. Nadalje,

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \in U \tag{1.85}$$

jer je $\lambda x_1 = \lambda x_n$. Dakle, skup U je zatvoren na zbrajanje vektora i množenje vektora skalarima. Nadalje, $(0, 0, \ldots, 0) \in U$ pa zaključujemo da je skup U podprostor od $\mathbb{R}^n$. $\square$

Inituitivno je jasno da je dimenzija podprostora $U \subseteq V$ manja ili jednaka dimenziji prostora V. Promotrimo pravac $U = \{(x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ koji je podprostor ravnine $\mathbb{R}^2$. Svaki vektor na pravcu U se može prikazati kao linearna kombinacija jednog vektora $(1, 3) \in U$ jer je

$$(x, 3x) = x\,(1, 3) \quad \text{za svaki} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.86}$$

Stoga je $\dim(U) = 1$ dok je $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ pa je $\dim(U) \leq \dim(\mathbb{R}^2)$. Sljedeći teorem je generalizacija ovog opažanja i navodimo ga bez dokaza.

Teorem 1.2. *Neka je U podprostor vektorskog prostora V. Onda je $dim(U) \leq dim(V)$.*

1.4 Presjek i suma podprostora

Ako su U i V podprostori vektorskog prostora W, onda se njihovim presijecanjem dobiva novi podprostor od W. Na primjer, ako su U i V dvije ravnine u prostoru $\mathbb{R}^3$ koje nisu paralelne, onda se njihovim presijecanjem dobiva pravac koji je također podprostor od $\mathbb{R}^3$. Općenito, vrijedi sljedeća tvrdnja.

Propozicija 1.4. *Neka su U i V podprostori vektorskog prostora W. Onda je $U \cap V$ podprostor od W.*

Dokaz Odaberimo vektore $u, v \in U \cap V$ i skalar $\lambda \in \mathbb{F}$. Onda su $u, v \in U$ i $u, v \in V$ pa vrijedi $u + v \in U$ i $u + v \in V$ jer su podprostori U i V zatvoreni na zbrajanje vektora. Dakle, $u + v \in U \cap V$. Nadalje, $u \in U$ i $u \in V$ povlači da je $\lambda u \in U$ i $\lambda u \in V$ jer su U i V zatvoreni na množenje vektora skalarima. Dakle, $\lambda u \in U \cap V$. Nadalje, $\mathbf{0} \in U \cap V$ pa slijedi da je $U \cap V$ podprostor od W. ■

Ovaj zaključak se može generalizirati na proizvoljni broj podprostora:

ako su $U_1, U_2, \dots, U_n$ podprostori od W, onda je $\cap_{i=1}^n U_i$ podprostor od W.

Prirodno je zapitati se je li unija dvaju podprostora od V podprostor od V. Da bi odgovorili na ovo pitanje, promotrimo sljedeći primjer. Neka su $U_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ i $U_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ podprostori prostora $\mathbb{R}^2$ koji predstavljaju osi x i y, redom. Odaverimo točke $(1, 0) \in U_1$ i $(0, 1) \in U_2$. Onda je

$$(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin U_1 \cup U_2 \tag{1.87}$$

jer točka $(1,1)$ ne pripada niti jednom od skupova U_1 ili U_2. Dakle, unija $U_1 \cup U_2$ nije zatvorena na zbrajanje vektora pa $U_1 \cup U_2$ nije podprostor od $\mathbb{R}^2$. Da bismo skup $U_1 \cup U_2$ upotpunili do podprostora, moramo uzeti u obzir sume svih vektora iz U_1 i U_2. Ovo motivira pojam sume podprostora koja je dana sljedećom definicijom.

Definicija 1.10. *Neka su $U_1, U_2, \ldots, U_n$ podprostori vektorskog prostora V. Suma podprostora $U_1, U_2, \ldots, U_n$, u oznaci $U_1 + U_2 + \cdots + U_n$, je skup*

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n = \{v_1 + v_2 + \cdots + v_n \mid v_i \in U_i,\ 1 \leq i \leq n\}. \tag{1.88}$$

Primjer 1.16. Neka su U i V podprostori prostora $\mathbb{R}^3$ definirani sa

$$U = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{(0,y,0) \mid y \in \mathbb{R}\}. \tag{1.89}$$

Onda je njihova suma dana sa

$$U + V = \{(x,y,0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}. \tag{1.90}$$

Primijetimo da je $U + V$ skup svih točaka ravnine x, y u prostoru $\mathbb{R}^3$. $\square$

Propozicija 1.5. *Neka su $U_1, U_2, \ldots, U_n$ podprostori vektorskog prostora V. Onda je $U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ podprostor od V.*

Dokaz Odaberimo vektore $u, v \in U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ i $\lambda \in \mathbb{F}$. Onda su

$$u = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad \text{i} \quad v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n \tag{1.91}$$

za neke $u_i \in U_i$ i $v_i \in V_i$, $1 \leq i \leq n$. Zbrajanjem dobivamo

$$u + v = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots + (u_n + v_n) \in U_1 + U_2 + \cdots + U_n \tag{1.92}$$

jer je $u_i + v_i \in U_i$ za svaki $1 \leq i \leq n$. Nadalje,

$$\lambda u = \lambda u_1 + \lambda u_2 + \cdots + \lambda u_n \in U_1 + U_2 + \cdots + U_n \tag{1.93}$$

jer je $\lambda u_i \in U_i$ za svaki $1 \leq i \leq n$. Očigledno je

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0} \in U_1 + U_2 + \cdots + U_n \tag{1.94}$$

pa slijedi da je $U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ podprostor od V. ■

Ako se svaki vektor iz V može napisati kao

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n, \quad v_i \in V_i, \tag{1.95}$$

onda pišemo

$$V = U_1 + U_2 + \cdots + U_n \tag{1.96}$$

i kažemo da je V suma podprostora $U_1, U_2, \ldots, U_n$.

Promotrimo sada podprostore Euklidskog prostora $\mathbb{R}^3$ definirane sa

$$U_1 = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad U_2 = \{(0,y,0) \mid y \in \mathbb{R}^2\}, \quad U_3 = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\} \tag{1.97}$$

te podprostore

$$W_1 = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}, \quad W_2 = \{(0,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\} \tag{1.98}$$

U oba slučaja sume ovih podprostora daju čitavi prostor $\mathbb{R}^3$ jer svaki vektor $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ možemo rastaviti kao sumu vektora iz $U_1 + U_2 + U_3$ i $W_1 + W_2$,

$$(x,y,z) = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z) \in U_1 + U_2 + U_3, \tag{1.99}$$

$$(x,y,z) = (x, \frac{1}{2}y, 0) + (0, \frac{1}{2}y, z) \in W_1 + W_2. \tag{1.100}$$

Međutim, prvi rastav možemo napisati samo na jedan način, drugi rastav nije jedinstven jer (x,y,z) možemo napisati i kao

$$(x,y,z) = (x, 2y, 0) + (0, -y, z) \in W_1 + W_2. \tag{1.101}$$

Razlog zbog kojeg rastav (1.100) nije jedinstven leži u činjenici da W_1 i W_2 imaju netrivijalni presjek

$$W_1 \cap W_2 = \{(0,y,0) \mid y \in \mathbb{R}\} \tag{1.102}$$

koji predstavlja os y. U teoriji vektorskih prostora jedinstveni rastavi vektora su posebno važni pa im dajemo zasebni naziv: direktna suma.

Definicija 1.11. *Kažemo da je vektorski prostor W direktna suma podprostora U i V i pišemo $W = U \oplus V$ ako vrijedi*

(i) $W = U + V$,

(ii) $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$.

U direktnoj sumi podprostora $U \oplus V$ svaki vektor ima jedinstveni rastav na zbroj vektora iz U i V, kako pokazuje sljedeći rezultat.

Propozicija 1.6. *Neka su U i V podprostori vektorskog prostora W. Onda je $W = U \oplus V$ ako i samo ako se svaki $w \in W$ može na jedinstveni način napisati kao*

$$w = u + v, \quad u \in U,\ v \in V. \tag{1.103}$$

Dokaz Neka je $W = U \oplus V$. Pretpostavimo da se vektor $w \in W$ može na dva načina rastaviti kao

$$w = u_1 + v_1 = u_2 + v_2, \quad u_1, u_2 \in U,\ v_1, v_2 \in V. \tag{1.104}$$

Odavde slijedi da je $u_1 - u_2 = v_2 - v_1$ što implicira da se vektori $u_1 - u_2$ i $v_2 - v_1$ nalaze u oba prostora U i V, dakle

$$u_1 - u_2 \in U \cap V, \quad v_2 - v_1 \in U \cap V. \tag{1.105}$$

Kako je $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$, zaključujemo da je $u_1 - u_2 = \mathbf{0}$ i $v_2 - v_1 = \mathbf{0}$, odnosno $u_1 = u_2$ i $v_1 = v_2$. Time smo pokazali da je rastav (1.104) jedinstven.
Pokažimo sada drugi smjer tvrdnje. Pretpostavimo da se svaki vektor $w \in W$ može jednoznačno rastaviti kao

$$w = u + v, \quad u \in U,\ v \in V. \tag{1.106}$$

Želimo dokazati da je $W = U \oplus V$. Prema pretpostvci (1.106) vrijedi $W = U + V$ pa je dovoljno pokazati da je $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$. Pretpostavimo da je $U \cap V \neq \{\mathbf{0}\}$. Onda postoji vektor $x \in U \cap V$ takav da je $x \neq \mathbf{0}$ pa vektor $w \in W$ možemo napisati kao

$$w = (u - x) + (v + x). \tag{1.107}$$

Primijetimo da je $u - x \in U$ i $v + x \in V$ jer je $x \in U \cap V$. Ovo implicira da w možemo rastaviti na različite načine kao sumu vektora iz U i V što je u kontradikciji s početnom pretpostavkom. Dakle, $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$ pa je W direktna suma podprostora U i V, odnosno $W = U \oplus V$. ■

Ako je $W = U \oplus V$, onda kažemo da su U i V direktni sumandi prostora W i da je U direktni komplement od V i obratno.

Sljedeći teorem nam kazuje kakav je odnos među dimenzijama prostora $W = U \oplus V$ i prostora U i V.

Teorem 1.3. *Ako je $W = U \oplus V$ direktna suma podprostora, onda je*

$$dim(W) = dim(U) + dim(V). \tag{1.108}$$

Dokaz Označimo dimenzije podprostora sa $\dim(U) = l$ i $\dim(V) = k$. Neka je $B_U = (u_1, u_2, \ldots, u_l)$ baza od U i neka je $B_V = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ baza od V. Pokažimo da je niz vektora

$$B = (u_1, u_2, \ldots, u_l, v_1, v_2, \ldots, v_k) \tag{1.109}$$

baza prostora W. Neka je $w \in W$. Onda w ima jedinstsveni rastav

$$w = u + v, \quad u \in V,\ v \in V. \tag{1.110}$$

Vektore u i v možemo raspisati po bazama prostora U i V kao

$$u = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i\, u_i, \quad v = \sum_{i=1}^{k} \beta_i\, v_i \tag{1.111}$$

za neke skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{F}$. Stoga je

$$w = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i\, u_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i\, v_i \tag{1.112}$$

što pokazuje da niz B razapinje prostor W.
Pokažimo sada da je B linearno nezavisan niz vektora. Neka je

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_l\, u_l + \beta_1\, v_1 + \beta_2\, v_2 + \cdots + \beta_k\, v_k = \mathbf{0}. \tag{1.113}$$

Definirajmo vektore $u = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i\, u_i$ i $v = \sum_{i=1}^{k} \beta_i\, v_i$. Onda iz jednakosti (1.113) slijedi da je $u = -v$ što implicira da oba vektora u i v pripadaju prostorima U i V, odnosno $u, v \in U \cap V$. Međutim, $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$ jer je W direktna suma podprostora U i V pa slijedi da je $u = v = \mathbf{0}$. Stoga je

$$\alpha_1\, u_1 + \alpha_2\, u_2 + \cdots + \alpha_l\, u_l = \mathbf{0} \tag{1.114}$$

pa zaključujemo da je $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_l = 0$ je su vektori $u_1, u_2, \ldots, u_l$ linearno nezavisni. Slično,

$$\beta_1\, v_1 + \beta_2\, v_2 + \cdots + \beta_k\, v_k = \mathbf{0} \tag{1.115}$$

implicira da je $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$ jer su vektori $v_1, v_2, \ldots v_k$ linearno nezavisni. Dakle, niz vektora $B = (u_1, \ldots, u_l, v_1, \ldots, v_k)$ je linearno nezavisan pa je B baza prostora W. Obzirom da B ima $l + k$ elemenata, imamo

$$\dim(W) = l + k = \dim(U) + \dim(V). \tag{1.116}$$

■

Ako presjek podprostora U i V nije trivijalan, $U \cap V \neq \{\mathbf{0}\}$, onda se može pokazati da je dimenzija prostora $W = U + V$ dana sa

$$\dim(W) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V). \tag{1.117}$$

U posebnom slučaju kada je $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$, onda je $\dim(U \cap V) = 0$ pa se jednakost (1.117) svodi na jednakost (1.116).

Primjer 1.17. Neka je $W = \mathbb{R}^3$ i neka su

$$U = \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}. \tag{1.118}$$

Podprostor U prestavlja ravninu xz, a podprostor V predstavlja y–os. Svaki vektor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ možemo rastaviti kao

$$(x, y, z) = (x, 0, z) + (0, y, 0) \in U + V. \tag{1.119}$$

Nadalje, $U \cap V = \{(0, 0, 0)\}$ jer y–os probada ravninu x, z u isodištu. Stoga je $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$. □

Primjer 1.18. Neka je W prostor trigonometrijskih polioma

$$W = \{a\cos(\theta) + b\sin(\theta) \mid a, b \in \mathbb{R}\}. \tag{1.120}$$

Očigledno je da je W vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Ako su $a\cos(\theta) + b\sin(\theta)$ i $a'\cos(\theta) + b'\sin(\theta)$ elementi od W, onda je

$$\big(a\cos(\theta) + b\sin(\theta)\big) + \big(a'\cos(\theta) + b'\sin(\theta)\big) = (a + a')\cos(\theta) + (b + b')\sin(\theta) \in W. \tag{1.121}$$

Nadalje, ako je $\lambda \in \mathbb{R}$, onda je

$$\lambda\big(a\cos(\theta) + b\sin(\theta)\big) = (\lambda a)\cos(\theta) + (\lambda b)\sin(\theta) \in W. \tag{1.122}$$

Stoga na W možemo definirati zbrajanje vektora i množenje vektora skalarima. Lako se provjeri da binarne operacije na W zadovoljavaju svojstva vektorskog prostora. Definirajmo podprostore

$$U = \{a\cos(\theta) \mid a \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{b\sin(\theta) \mid b \in \mathbb{R}\}. \tag{1.123}$$

Slijedi da je $W = U + V$. Ako je $v \in U \cap V$, onda je

$$v = a\cos(\theta) = b\sin(\theta) \tag{1.124}$$

za neke $a, b \in \mathbb{R}$. Jednakost (1.124) implicira $a = b = 0$ jer iz elementarne matematike znamo da funkcije $\sin(\theta)$ i $\cos(\theta)$ nisu međusobno proporcionalne. Dakle, $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$ pa je $W = U \oplus V$. $\square$

Ako želimo definirati direktnu sumu tri ili više podprostora $U_1, U_2, \ldots, U_n$, onda nije dovoljno provjeriti je li za svaki par podprostora vrijedi $U_i \cap U_j = \{\mathbf{0}\}$. U tom slučaju je definiciju potrebno generalizirati na sljedeći način.

Definicija 1.12. *Prostor V je direktna suma podprostora $V_1, V_2, \ldots, V_n$ ako je*

(i) $V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$,

(ii) $V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots V_n) = \{\mathbf{0}\}$.

Tada pišemo

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n. \tag{1.125}$$

Uvjet (ii) povlači da se vektori iz U_i ne mogu napisati kao linearna kombinacija vektora iz ostalih podprostora pa je rastav svakog vektora $w \in W$ na sumu

$$w = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \quad u_i \in U_i, \tag{1.126}$$

jedinstven. Bez dokaza navodimo da vrijedi

Teorem 1.4. *Vektorski prostor V je direktna suma podprostora $V_1, V_2, \ldots, V_n$ ako i samo ako sve svaki vektor $v \in V$ može na jedinstveni način napisati kao*

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n, \quad v_i \in V_i. \tag{1.127}$$

U tom slučaju je

$$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2 + \cdots + \dim V_n. \tag{1.128}$$

Jednostavan primjer ovakvog rastava je direktna suma $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$ gdje su

$$U_1 = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad U_2 = \{(0,y,0) \mid y \in \mathbb{R}\}, \quad U_3 = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}. \tag{1.129}$$

Lako se vidi da su ispunjeni uvjeti

$$U_1 \cap (U_2 + U_3) = \{\mathbf{0}\}, \quad U_2 \cap (U_1 + U_3) = \{\mathbf{0}\} \quad \text{i} \quad U_3 \cap (U_1 + U_2) = \{\mathbf{0}\} \tag{1.130}$$

pa Eukliski prostor $\mathbb{R}^3$ možemo shvatiti kao direktnu sumu jednodimenzionalnih podprostora koji predstavljaju osi x, y i z.

Poglavlje 2

Linearni operatori

2.1 Prostor linearnih operatora

Jedan od ključnih pojmova u linearnoj algebri su linearni operatori. Linearni operatori se pojavljuju u geometriji kao rotacije, refleksije, projekcije, sklaliranja i druge tranformacije. Veliki dio linearne algebre se bavi proučavanjem svojstava linearnih operatora i vezom između linearnog operatora i njegovog matričnog prikaza.

Definicija 2.1. *Neka su U i V vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $T\colon U \to V$ se naziva linearni operator ili homomorfizam vektoskih prostora ako vrijedi*

(i) $T(u+v) = T(u) + T(v)$,

(ii) $T(\lambda u) = \lambda T(u), \quad \lambda \in \mathbb{F}$.

Skup svih linearih operatora $T\colon U \to V$ označavamo sa $\mathcal{L}(U, V)$.

Promotrimo neke primjere linearih operatora.

Primjer 2.1.

Neka je $\mathcal{P}_n$ prostor polinoma stupnja $\leq n$ na poljem $\mathbb{R}$. Množenje polinoma varijablom

x, $T\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n+1}$ definirano sa $T(p(x)) = xp(x)$, je linearni operator. Doista,

$$T\big(p(x) + q(x)\big) = x\big(p(x) + q(x)\big) = xp(x) + xq(x) = T\big(p(x)\big) + T\big(q(x)\big), \tag{2.1}$$

$$T(\lambda p(x)) = x(\lambda p(x)) = \lambda(xp(x)) = \lambda T(p(x)), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

□

Primjer 2.2. Neka je $D\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1}$ operator deriviranja,

$$D\big(p(x)\big) = \frac{dp}{dx}. \tag{2.3}$$

Derivacija je linearni operator jer iz analize znamo da je

$$D\big(p(x) + q(x)\big) = \frac{d}{dx}\big(p(x) + q(x)\big) = \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dx} = D\big(p(x)\big) + D\big(q(x)\big), \tag{2.4}$$

$$D\big(\lambda p(x)\big) = \frac{d}{dx}\big(\lambda p(x)\big) = \lambda\frac{dp}{dx} = \lambda D\big(p(x)\big). \tag{2.5}$$

□

Primjer 2.3. Neka je $C^0[a, b]$ prostor neprekidnih funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Operator integriranja

$$I[f] = \int_a^b f(x)dx \tag{2.6}$$

je linearni operator je je

$$I[f + g] = \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = I[f] + I[g], \tag{2.7}$$

$$I[\lambda f] = \int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx = \lambda I[g]. \tag{2.8}$$

□

Primjer 2.4. Preslikavanje $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiramo sa $P(x, y) = (x, 0)$ nazivamo projekcija na os x. Analogno se definira projekcija na os y sa $Q(x, y) = (0, y)$. Projekcija je linearan operator jer je

$$P((x, y) + (x', y')) = P(x + x', y + y') = (x, 0) + (x', 0) = P(x, y) + P(x', y'), \tag{2.9}$$

$$P(\lambda(x, y)) = P(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x, 0) = \lambda P(x, y). \tag{2.10}$$

Operatori P i Q su projekcije Euklidskog prostora $\mathbb{R}^2$ na jednodimenzionalne podprostore što ih čine osi x i y. □

Dokažimo neka elementarna svojstva linearnih operatora.

Propozicija 2.1. *Neka je* $T\colon U \to V$ *linearni operator. Onda vrijedi*

(i) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,

(ii) $T(-u) = -T(u), \quad u \in U.$

Ovdje smo radi jednostavnosti nul–vektore u oba prostora označili istim simbolom $\mathbf{0}$.

Dokaz (i) Zbog linearnosti operatora T imamo

$$T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = T(\mathbf{0}) + T(\mathbf{0}) \tag{2.11}$$

Oduzimanjem vektora $T(\mathbf{0})$ na obje strane jednakosti 2.11 dobivamo $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
(ii) Neka je $\lambda = -1$ u Definiciji 2.1 (ii). Kako je $(-1)u = -u$, odavde dobivamo $T(-u) = -T(u)$. ■

Kombiniranjem svojstva (i) i (ii) iz Definicije 2.1 slijedi

$$T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2) \tag{2.12}$$

za sve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ i $u_1, u_2 \in U$. Ovu jednakost možemo proširiti na proizvoljnu linearnu kombinaciju vektora iz U pa imamo

$$T\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(u_i). \tag{2.13}$$

Navedimo još nekoliko važnih definicija u vezi linearnih operatora. Preslikavanje $T\colon U \to V$ je *injekcija* ako $T(u) = T(v)$ implicira $u = v$. Ekvivalentno, kažemo da je T injekcija ako $u \neq v$ implicira $T(u) \neq T(v)$, odnosno ako se različiti elementi preslikavaju u različite slike. Kažemo da je T *surjekcija* ako za svaki $v \in V$ postoji $u \in U$ takav da je $T(u) = v$. Ako je preslikavanje $T\colon U \to V$ injekcija i surjekcija, onda kažemo da je T *bijekcija*.

Definicija 2.2. *Neka je $T\colon U \to V$ linearni operator.*

(i) Ako je T bijekcija, onda kažemo daje T izomorfizam vektorskih prostora i pišemo $U \simeq V$.

(ii) Ako je T bijekcija i $U = V$, onda kažemo da je T automorfizam prostora U.

Na skupu linearnih operatora $\mathcal{L}(U, V)$ možemo definirati zbrajanje operatora i množenje operatora skalarima.

Definicija 2.3. *Neka su $S, T \in \mathcal{L}(U, V)$ i neka je $\lambda \in \mathbb{F}$. Zbroj operatora $S + T$ i umnožak λT definiramo sa*

$$(S + T)(u) = S(u) + T(u), \quad (\lambda T)(u) = \lambda T(u). \tag{2.14}$$

Izravnim računom se lako provjeri da uz operacije zbrajanja i množenja skalarima definiranim u (2.14) vrijedi

Teorem 2.1. *Skup linearnih operatora $\mathcal{L}(U, V)$ je vekorski prostor.*

Primijetimo da je null–vektor u prostoru $\mathcal{L}(U, V)$ null–operator definiran sa $\mathbf{0}(u) = \mathbf{0}_V$ za svaki $u \in U$.

Definicija 2.4. *Neka su $T\colon U \to V$ i $S\colon V \to W$ linearni operatori. Kompozicija ili umnožak operatora je definiran sa*

$$(ST)(u) = S(T(u)). \tag{2.15}$$

Propozicija 2.2.

Umnožak linearnih operatora je linearni operator.

Dokaz Neka su $T\colon U \to V$ i $T\colon V \to W$ linearni operatori. Za svaki $u, v \in U$ vrijedi

$$\begin{aligned}(ST)(u+v) &= S(T(u+v)) = S(T(u)+T(v)) \\ &= S(T(u)) + S(T(v)) = (ST)(u) + (ST)(v).\end{aligned} \tag{2.16}$$

Neka je $\lambda \in \mathbb{F}$. Onda je

$$(ST)(\lambda u) = S(T(\lambda u)) = S(\lambda T(u)) = \lambda S(T(u)) = \lambda (ST)(u). \tag{2.17}$$

Dakle, umnožak operatora je linearni operator. ■

2.2 Jezgra i slika operatora

Sada ćemo definirati dva važna podprostora, jezgru i sliku operatora, koji su vezani uz svojstvo injekcije i surjekcije.

Definicija 2.5. *Neka je $T\colon U \to V$ linearni operator.*

(i) Jezgra operatora T je skup

$$\ker(T) = \{u \in U \mid T(u) = \mathbf{0}\}. \tag{2.18}$$

(ii) Slika operatora je skup

$$Im(T) = \{T(u) \mid u \in U\}. \tag{2.19}$$

Primjer 2.5. Neka je $D\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1}$ operator deriviranja, $D = \frac{d}{dx}$. Jezgra operatora je skup

$$\ker(D) = \left\{p(x) \in \mathcal{P}_3 \mid \frac{dp}{dx} = 0\right\}. \tag{2.20}$$

Ako je derivacija polinoma $p(x)$ jednaka nuli, onda je $p(x) = c$ konstantni polinom. Dakle, jezgra operatora D je skup svih konstantnih polinoma

$$\ker(D) = \{p(x) = c \mid c \in \mathbb{R}\}. \tag{2.21}$$

□

Primjer 2.6. Neka je $M\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n+1}$ operator množenja varijablom x, $M(p(x)) = xp(x)$. Jezgra operatora M je skup

$$\ker(M) = \{p(x) \in \mathcal{P}_n \mid xp(x) = 0\}. \tag{2.22}$$

Primitimo daje $xp(x) = 0$ ako i samo ako je $p(x) = 0$ pa jezgra od M sadrži samo nul–polinom,

$$\ker(M) = \{p(x) = 0\}. \tag{2.23}$$

□

Sljedeći rezultat pokazuje da su jezgra i slika operatora vekorski podprostori.

Propozicija 2.3. *Neka je $T\colon U \to V$ linarni operator.*

(i) $\ker(T)$ *je podprostor od U.*

(ii) $Im(T)$ je podprostor od V.

Dokaz (i) Neka su $u, v \in \ker(T)$. Onda je $T(u) = T(v) = \mathbf{0}$ pa imamo

$$T(u+v) = T(u) + T(v) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \tag{2.24}$$

što implicira da je $u + v \in \ker(T)$. Slično, ako je $\lambda \in \mathbb{F}$, onda je

$$T(\lambda u) = \lambda T(u) = \lambda \mathbf{0} = \mathbf{0} \tag{2.25}$$

što povlači $\lambda u \in \ker(T)$. Dakle, $\ker(T)$ je podprostor od U.

(ii) Neka su $v_1, v_2 \in \mathrm{Im}(T)$. Onda postoje $u_1, u_2 \in U$ takvi da je $T(u_1) = v_1$ i $T(u_2) = v_1$ pa imamo

$$v_1 + v_2 = T(u_1) + T(u_2) = T(u_1 + u_2), \tag{2.26}$$

stoga je $v_1 + v_2 \in \mathrm{Im}(T)$. Nadalje, ako je $\lambda \in \mathbb{F}$, onda je

$$\lambda v_1 = \lambda T(u_1) = T(\lambda u_1) \tag{2.27}$$

što povlači $\lambda v_1 \in \mathrm{Im}(T)$. Zaključujemo da je $\mathrm{Im}(T)$ podprostor od V. ■

Prema definiciji slike, linearni operator $T\colon U \to V$ je surjekcija ako i samo ako je $\mathrm{Im}(T) = V$ Sljedeći teorem nam daje vezu između injektivnosti i jezgre operatora.

Teorem 2.2. *Linearni operator $T\colon U \to V$ je injekcija ako i samo ako je $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.*

Dokaz Pretpostavimo da je T injekcija. Neka je $u \in \ker(T)$. Iz Propozicije 2.1 slijedi

$$T(u) = \mathbf{0} = T(\mathbf{0}) \tag{2.28}$$

što implicira $u = \mathbf{0}$ jer je T injekcija.

Pretpostavimo sada da je $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$. Ako je $T(u) = T(v)$, onda je

$$\mathbf{0} = T(u) - T(v) = T(u - v) \tag{2.29}$$

što povlači $u - v \in \ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ pa zaključujemo da je $u = v$. Dakle, T je injekcija. ■

Jedno od važnih svojstava izomorfizama je da bazu domene preslikavaju u bazu kodomene. Drugim riječima, ako je $T\colon U \to V$ izomorfizam, bazu od V možemo dobiti tako da odaberemo bazu od U i onda vektore baze preslikamo putem izomorfizma u prostor V.

Teorem 2.3. *Ako je $T\colon U \to V$ izomorfizam vektorskih prostora onda T preslikava bazu od U u bazu od V.*

Dokaz Neka je $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ baza prostora U. Pokažimo da je $(T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n))$ baza prostora V. Potrebno je pokazati da ovaj niz vektora razapinje prostor V i da je linearno nezavisan.

(i) Neka je $v \in V$. Operator T je surjekcija pa postoji $u \in U$ takav da je $T(u) = v$. Vektor u možemo prikazati u zadanoj bazi kao

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \quad \text{za neke} \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}. \tag{2.30}$$

Iz linearnosti operatora T slijedi

$$v = T(u) = T\big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, T(u_i) \tag{2.31}$$

što povlači da vektori $T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)$ razapinju prostor V.

(ii) Pretpostavimo da je

$$\alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \cdots + \alpha_n T(u_n) = \mathbf{0}, \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}. \tag{2.32}$$

Gornju jednakost možemo zapisati kao

$$T\big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, u_i\big) = \mathbf{0} \tag{2.33}$$

što implicira da je $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, u_i \in \ker(T)$. Operator T je injekcija pa iz Teorema 2.2 slijedi da je $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = \mathbf{0}$ jer jezgra sadrži samo null–vektor. Kako su vektori $u_1, u_2, \ldots, u_n$ linearno nezavisni, ovo implicira

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0. \tag{2.34}$$

Time smo dokazali da su vektori $T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)$ linearno nezavisni. Zaključujemo da je niz $(T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n))$ baza prostora V. ■

Sljedeći rezultat pokazuje da svi vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$ dimenzije n imaju istu strukturu jer su svi izomorfni prostoru $\mathbb{F}^n$.

Propozicija 2.4. *Neka je U vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $\dim(U) = n$. Onda je $U \simeq \mathbb{F}^n$.*

Dokaz Neka je $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ baza prostora U. Svaki vektor $u \in U$ možemo zapisati kao jedinstvenu linearnu kombinaciju $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, u_i$. Skalari α_i su jedinstveno određeni vektorom u pa možemo definirati preslikavanje $T\colon U \to \mathbb{F}^n$ sa

$$T\big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, u_i\big) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n). \tag{2.35}$$

Pokažimo da je T linearni operator. Neka su $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, u_i$ i $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, u_i$ vektori iz U. Onda je

$$T(u+v) = T\Big(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)\, u_i\Big) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n) \tag{2.36}$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \ldots, \alpha_n) = T(u) + T(v). \tag{2.37}$$

Ako je $\lambda \in \mathbb{F}$, onda je

$$T(\lambda u) = T\Big(\lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, u_i\Big) = T\big(\sum_{i=1}^{n} \lambda \alpha_i\, u_i\big) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n) \tag{2.38}$$

$$= \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \lambda T(u). \tag{2.39}$$

Pokažimo sada da je T bijekcija. Ako je $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, u_i \in \ker(T)$, onda je

$$T(u) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0) \tag{2.40}$$

što implicira $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, odnosno $u = \mathbf{0}$. Dakle, $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ pa je T injekcija prema Teoremu 2.2. Preslikavanje T je očigledno surjekcija jer za svaki $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{F}$ postoji vektor $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, u_i$ takav da je $T(u) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Iz navedenog slijedi je T izomorfizam vektorskih prostora. ■

Korolar 2.1. *Neka su U i V vektorski prostori na poljem $\mathbb{F}$. Ako je* $\dim(U) = \dim(V)$*, onda je $U \simeq V$.*

Dokaz Neka je $\dim U = \dim V = n$. Prema Propoziciji 2.4, postoje izomorfizmi $T_1\colon U \to \mathbb{F}^n$ i $T_2\colon V \to \mathbb{F}^n$ pa je prema Propoziciji 2.2 umnožak operatora $T_2^{-1}T_1\colon U \to V$ izmomorfizam vektorskih prostora. ■

Primjer 2.7. Prostor polinoma $\mathcal{P}_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_i \in \mathbb{R},\ 0 \le i \le 2\}$ je realni vektorski prostor dimenzije $\dim \mathcal{P}_2 = 3$. Ako je $B_1 = (1, x, x^2)$ kanonska baza od $\mathcal{P}_2$, onda je $T\colon \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ definiran sa

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0, a_1, a_2) \tag{2.41}$$

standardni izomorfizam ovih prostora. Promjenom baze dobivamo druge izomorfizme prostora $\mathcal{P}_2$ i $\mathbb{R}^3$. Na primjer, $B_2 = (-1-x, -x, x^2)$ je druga baza od $\mathcal{P}_2$. U ovoj bazi svaki polinom možemo zapisati kao

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = -a_0(-1-x) + (a_0 - a_1)(-x) + a_2x^2. \tag{2.42}$$

Stoga je preslikavanje $S\colon \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ dano sa

$$S(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (-a_0, a_0 - a_1, a_2) \tag{2.43}$$

također izomorfizam vektorskih prostora. $\square$

2.3 Teorem o rangu i defektu

Jedan od fundamentalnih teorema linearne algebre povezuje rank i defekt operatora s dimenzijom domene.

Definicija 2.6. *Neka je $T\colon U \to V$ linearni operator.*

(i) Dimenzija slike $\mathrm{Im}(T)$ se naziva rang operatora.

(ii) Dimenzija jezgre $\ker(T)$ se naziva defekt operatora.

Za ilustraciju ove tvrdnje promotrimo projekciju $P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadanu sa $P(x,y,z) = (x,y)$. Slika operatora P je skup svih točaka u ravnini x, y,

$$\mathrm{Im}(P) = \{P(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2. \tag{2.44}$$

Stoga je rang operatora jednak $\dim \mathrm{Im}(P) = 2$. Jezgra operatora P je dana sa

$$\begin{aligned}\ker(P) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid P(x,y,z) = (0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) = (0,0)\} = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}.\end{aligned} \tag{2.45}$$

Jezgra projekcije P je jednodimenzionalni podprostor od $\mathbb{R}^3$ pa je defekt operatora jednak $\dim \ker(P) = 1$. Primijetimo da su dimenzija domene $\mathbb{R}^3$, rang i defekt operatora vezani relacijom

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker(P) + \dim \mathrm{Im}(P). \tag{2.46}$$

Ovo zapažanje vrijedi općenito za linearne operatore i naziva se Teorem o rangu i defektu.

Teorem 2.4 (Teorem o rangu i defektu)**.** *Ako je $T\colon U \to V$ linearni operator, onda je*

$$\dim U = \dim \ker(T) + \dim \mathit{Im}(T). \tag{2.47}$$

Dokaz Ako jer $\ker(T) = U$, onda se svi vektori iz U preslikavaju u $\mathbf{0} \in V$ pa je $\mathrm{Im}(T) = \{\mathbf{0}\}$. Tada je $\dim \ker(T) = \dim(U)$ i $\dim \mathrm{Im}(T) = 0$ pa vrijedi $\dim(U) = \dim \ker(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$.

Pretpostavimo da je $\ker(T)$ pravi podprostor od U. Neka je $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ baza jezgre od T. Ovu bazu možemo nadopuniti vektorima $v_1, v_2, \dots, v_l \in U$ tako da je niz $B = (u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l)$ baza od U. Tvrdimo da vektori $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_l)$ čine bazu slike slike operatora T.
(i) Pokažimo da su vektori $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_l)$ linearno nezavisni. Ako je

$$\beta_1 T(v_1) + \beta_2 T(v_2) + \cdots + \beta_l T(v_l) = \mathbf{0}, \tag{2.48}$$

onda zbog linearnosti operatora T imamo

$$T\Big(\sum_{i=1}^{l} \beta_i v_i\Big) = \mathbf{0} \quad \text{što implicira} \quad \sum_{i=1}^{l} \beta_i v_i \in \ker(T). \tag{2.49}$$

Vektor $\sum_{i=1}^{l} \beta_i v_i$ možemo napisati u bazi od $\ker(T)$ kao

$$\sum_{i=1}^{l} \beta_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \quad \text{za neke} \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F} \tag{2.50}$$

odakle dobivamo

$$\sum_{i=1}^{l} \beta_i \, v_i - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, u_i = \mathbf{0}. \tag{2.51}$$

Vektori $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_l$ su linearno nezavisni pa je $\alpha_i = 0$ i $\beta_i = 0$ za svaki i. Sada iz jednakosti (2.48) slijedi da su vektori $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_k)$ linearno nezavisni.
(ii) Pokažimo da vektori $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_k)$ razapinju prostor $\mathrm{Im}(T)$. Ako je $v \in \mathrm{Im}(T)$, onda je $v = T(u)$ za neki vektor $u \in U$. Vektor u možemo prikazati u bazi B kao linearnu kombinaciju

$$u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, u_i + \sum_{i=1}^{l} \beta_i \, v_i \tag{2.52}$$

za neke $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l \in \mathbb{F}$. Sada imamo

$$v = T(u) = T\big(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, u_i\big) + T\big(\sum_{i=1}^{l} \beta_i \, v_i\big) = \sum_{i=1}^{l} \beta_i \, T(v_i) \tag{2.53}$$

jer je $T(u_i) = 0$ za svaki $u_1, \ldots, u_k \in U$. Zaključujemo da vektori $T(v_1), \ldots, T(v_l)$ razapinju prostor $\mathrm{Im}(T)$. Sada iz (i) i (ii) slijedi da je $(T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_l))$ baza podprostora $\mathrm{Im}(T)$. Sada je $\dim \ker(T) = k$ i $\dim \mathrm{Im}(T) = l$ što implicira

$$\dim(U) = k + l = \dim \ker(T) + \dim \mathrm{Im}(T). \tag{2.54}$$

■

Primjer 2.8. Odredite rang operatora $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_3$ definiran sa $T(a, b) = a + ax + ax^2$. Rang operatora možemo odrediti tako da odredimo jezgru $\ker(T)$ i primijenimo Teorem o rangu i defektu. Ako je

$$T(a, b) = 0, \quad \text{onda je} \quad a + ax + ax^2 = 0 \quad \text{što implicira} \quad a = 0. \tag{2.55}$$

Dakle,

$$\ker(T) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid T(a, b) = 0\} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = 0\} = \{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\}. \tag{2.56}$$

Svaki element iz jezgre možemo napisati kao $b\,(0, 1)$, $b \in \mathbb{R}$, pa vektor $(0, 1)$ čini bazu prostora $\ker(T)$. Stoga je $\dim \ker(T) = 1$. Nadalje, $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ pa je prema Teoremu o rangu i defektu

$$\dim \mathrm{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \ker(T) = 2 - 1 = 1. \tag{2.57}$$

□

Uočimo neke posljedice Teorema o rangu i defektu.

Propozicija 2.5. *Neka su V i W vektorski prostori takvi da je* $\dim V > \dim W$*. Onda ne postoji injektivni linearni operator* $T\colon V \to W$*.*

Drugim riječima, ako T preslikava prostor veće dimenzije u prostor manje dimenzije, onda T ne može biti injekcija.

Dokaz Obzirom da je $\dim\, \mathrm{Im}(T) \leq \dim W$, prema Teoremu o rangu i defektu imamo

$$\dim \ker(T) = \dim V - \dim\, \mathrm{Im}(T) \geq \dim V - \dim W > 0. \tag{2.58}$$

Sada iz Teorema 2.2 slijedi da T nije injekcija jer $\ker(T)$ sadrži vektore $v \neq \mathbf{0}$. ■

Propozicija 2.6. *Neka su V i W vektorski prostori takvi da je* $\dim V < \dim W$*. Onda ne postoji surjektivni linearni operator* $T\colon V \to W$*.*

Ovaj razultat nam kazuje da ako T preslikava prostor manje dimenzije u prostor veće dimenzije, onda T ne može biti surjekcija.

Dokaz Prema Teoremu o rangu i defektu imamo

$$\dim \mathrm{Im}(T) = \dim V - \dim\, \ker(T) \leq \dim V < \dim W \tag{2.59}$$

što implicira da T nije injekcija. ■

2.4 Dualni prostor

Linearna preslikavanja iz vektorskog prostora u polje skalara imaju posebno važnu ulogu u linearnoj algebri.

Definicija 2.7. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Linearno preslikavanje $\varphi\colon V \to \mathbb{F}$ se naziva linearni funkcional.*

Primjer 2.9. Preslikavanje $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definirano sam

$$\varphi(x, y, z) = 4x - 5y + 2z \tag{2.60}$$

je linearni funkcional na $\mathbb{R}^3$.

Primjer 2.10. Odaberimo $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{F}^n$. Preslikavanje $\varphi_c\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ definirano sa

$$\varphi_c(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{2.61}$$

je linearni funkcional na $\mathbb{F}^n$.

Primjer 2.11. Određeni integral $I\colon \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}$,

$$I(p) = \int_0^1 p(x)dx \tag{2.62}$$

je linearni funkcional na prostoru polinoma $\mathcal{P}_n$.

Definicija 2.8. *Dualni prostor vektorskog prostora V, u oznaci V^* je vektorski prostor svih linearnih funkcionala $\varphi\colon V \to \mathbb{F}$.*

Prema ovoj definiciji, dualni prostor je $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$. Obzirom da je V^* vektorski prostor, zanima nas kako možemo konstruirati bazu od V^*. Pokazat ćemo da svakoj bazi od V možemo pridružiti tzv. dualnu bazu od V^*.

Definicija 2.9. *Neka je $B = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ baza prostora V. Dualna baza od B je niz linearnih funkcionala $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ takav da je*

$$\varphi_i(v_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{2.63}$$

Ovom definicijom su potpuno određeni elementi dualni baze jer je svaki linearni funkcional jedinstveno definiran svojim djelovanjem na bazu prostora V. Neka je $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ baza od V. Onda za svaki vektor $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in V$ imamo

$$\varphi_i(v) = \varphi_i\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \varphi_i(v_j) = \alpha_i. \tag{2.64}$$

Dakle, element dualne baze φ_i svakom vektoru $v \in V$ pridružuje njegovu i–tu komponenetu α_i.

Pokažimo sada da je termin “dualna baza” opravdan, odnosno da linearni funkcionali $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ doista čine bazu prostora V^*.

Teorem 2.5. *Linearni funkcionali iz Definicije 2.9 čine baz dualnog prostora V^*.*

Dokaz Neka je $B = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ baza prostora V i neka je $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ dualna baza od B. Pokažimo da su funkcionali $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ linearno nezavisni. Neka je

$$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots + a_n\varphi_n = 0. \tag{2.65}$$

Ako funkcional $\sum_{i=1}^{n} a_i \, \varphi_i$ evaluiramo na vektoru v_j, onda iz (2.65) dobivamo

$$0 = a_1\varphi_1(v_j) + a_2\varphi_2(v_j) + \cdots + a_n\varphi_n(v_j) = a_j \tag{2.66}$$

za svaki $1 \le j \le n$. Dakle, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ su linearno nezavisni. Neka je sada $\varphi \colon V \to \mathbb{F}$ linearni funkcional. Onda za svaki $v = \sum_{i=1}^{n} a_i \, v_i \in V$ imamo

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \varphi(v_i). \tag{2.67}$$

Prema jednakosti (2.64) imamo $a_i = \varphi_i(v)$ pa iz (2.67) slijedi

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(v_i) \, \varphi_i(v) \quad \forall \, v \in V. \tag{2.68}$$

Ovo implicira da je

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(v_i) \, \varphi_i \tag{2.69}$$

pa svaki linearni funkcional φ možemo napisati kao linearnu kombinaciju funkcionala $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Dakle, funkcionali $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ razapinju dualni prostor V^*. Time smo pokazali da je $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ baza od V^*. ■

Primjer 2.12. Neka je $I\colon \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}$ linearni funkcional definiran sa $I(p) = \int_0^1 p(x)dx$. Standarna baza prostora $\mathcal{P}_3$ je $B = (1, x, x^2, x^3)$. Ako elemente baze označimo sa $v_k = x^{k-1}$, $k = 1, 2, 3, 4$, onda je dualna baza dana sa

$$\varphi_i(v_k) = \varphi_i(x^{k-1}) = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \tag{2.70}$$

Prema Teoremu 2.5, funkcional I možemo napisati u dualnoj bazi kao

$$I = I(v_1)\,\varphi_1 + I(v_2)\,\varphi_2 + I(v_3)\,\varphi_3 + I(v_4)\,\varphi_4 \tag{2.71}$$

gdje je

$$I(v_k) = \int_0^1 x^{k-1}dx = \frac{1}{k}. \tag{2.72}$$

Dakle,

$$I = \varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_2 + \frac{1}{3}\varphi_3 + \frac{1}{4}\varphi_4. \tag{2.73}$$

Lako se provjeri da za svaki polinom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ vrijedi

$$\int_0^1 p(x)dx = \varphi_1(p) + \frac{1}{2}\varphi_2(p) + \frac{1}{3}\varphi_3(p) + \frac{1}{4}\varphi_4(p). \tag{2.74}$$

□

Poglavlje 3

Matrice

U ovom poglavalju uvodimo pojam matrice koju možemo pridružiti linearnom operatoru $T \colon U \to V$. Matrice predstavljaju efikasno sredstvo pomoću kojeg možemo računati djelovanje operatora T na vektore iz prostora U. Neka su $B_U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ i $B_V = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ baze prostora U i V, redom. Vektor $T(u_k)$ možemo napisati kao linearnu kombinaciju vektora iz B_V,

$$T(u_k) = a_{1k}\, v_1 + a_{2k}\, v_2 + \cdots + a_{mk}\, v_m \tag{3.1}$$

za neke skalare $a_{ij} \in \mathbb{F}$. Svaki vektor $u \in U$ se može napisati kao linearna kombinacija

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n \tag{3.2}$$

pa je djelovanje operatora T na vektor u dano sa

$$T(u) = \sum_{k=1}^{n} c_k T(u_k) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} c_k\, a_{jk}\, u_k. \tag{3.3}$$

Slijedi da je djelovanje operatora T potpuno određeno skalarima a_{jk}, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq n$. Ove skalare možemo zapisati u pravokutnu tablicu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Definicija 3.1. *Matrica A reda (m, n) je pravokutna tablica skalara sa m redaka i n stupaca. Element matrice A u i–tom retku i j–tom stupcu označavamo sa A_{ij}. Ako matrica A ima jednaki broj redaka i stupaca, $m = n$, onda kažemo da je A kvadratna matrica reda n.*

Matricu A kraće zapisujemo kao $A = [A_{ij}]$ ako je red matrice iz konteksta jasan.

Matrice su važno sredstvo pomoću kojega možemo zapisati zadani operator $T\colon U \to V$ u paru odabranih baza B_U i B_V. Matricu prdruženu operatoru T često označavamo sa $\mathcal{M}(T)$. Primijetimo da se u k–tom stupcu matrice $\mathcal{M}(T)$ nalaze komponente vektora $T(u_k)$. Stoga matricu $\mathcal{M}(T)$ možemo simbolički zapisati kao

$$\mathcal{M}(T) = [T(u_1)\ T(u_2)\ \ldots\ T(u_n)] \tag{3.5}$$

gdje $T(u_k)$ označava stupac u kojemu su posloženi koeficijenti $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{mk}$.

Primjer 3.1. Odredimo matrični prikaz operatora deriviranja $D\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ u paru standarnih baza $B_1 = (1, x, x^2, x^3)$ i $B_2 = (1, x, x^2)$ prostora polinoma $\mathcal{P}_3$ i $\mathcal{P}_2$.

Potrebno je odrediti kako operator deriviranja djeluje na svaki vektor baze B_1 i rezultat napisati kao linarnu kombinaciju vektora iz B_2:

$$D(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2, \tag{3.6}$$

$$D(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2, \tag{3.7}$$

$$D(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2, \tag{3.8}$$

$$D(x^3) = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2. \tag{3.9}$$

Matricu operatora D u paru baza (B_1, B_2) dobijemo tako da koeficijente linearnih kombinacija (3.6)–(3.9) posložimo u retke matrice redom,

$$\mathcal{M}(D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

Matrica $\mathcal{M}(D)$ je reda $(3, 4)$. Broj redaka odgovara dimenziji kodomene $\mathcal{P}_2$, a broj stupaca dimenziji domene $\mathcal{P}_3$. $\square$

Prikaz operatora pomoću matrica je naročito pogodan za računanje s operatorima na kompjuteru. Vidjet ćemo da se mnoga važna svojstva operatora mogu odrediti upravo iz njegovog matričnog prikaza.

Navedimo neke osnovne pojmove o matricama.

(1) Kažemo da je A realna matrica ako je $A_{ij} \in \mathbb{R}$ za sve elemente A_{ij}.

(2) Kažemo da je A kompleksna matrica ako je $A_{ij} \in \mathbb{C}$ za sve elemente A_{ij}.

(3) Retčana matrica je matrica koja ima jedan redak,

$$A = [A_{11}\, A_{12}\, \ldots\, A_{1m}]. \tag{3.11}$$

(4) Stupčana matrica je matrica koja ima jedan stupac,

$$M = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Definicija 3.2. *Kažemo da su matrice $A = [A_{ij}]$ i $B = [B_{ij}]$ jednake i pišemo $A = B$ ako su A i B istog reda i ako je $A_{ij} = B_{ij}$ za sve indekse i, j.*

3.1 Algebarske operacije s matricama

Na skupu matrica možemo definirati zbrajanje matrica i množenje matrica skalarima tako da skup matrica tvori vektorski prostor.

Definicija 3.3. *Skup svih matrica reda (n, m) nad poljem $\mathbb{F}$ označavamo sa $M_{nm}(\mathbb{F})$. Skup svih kvadratnih matrica reda n nad poljem $\mathbb{F}$ označavamo sa $M_n(\mathbb{F})$.*

Ako su A i B matrica istog reda, onda zbrajanje matrica definiramo na sljedeći način.

Definicija 3.4. *Neka su* $A = [A_{ij}]$ *i* $B = [B_{ij}]$ *matrice reda* (n, m) *na poljem* $\mathbb{F}$. *Zbroj matrica* A *i* B *je matrica*

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \dots & A_{1m} + B_{1m} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \dots & A_{2m} + B_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} + B_{n1} & A_{n2} + B_{n2} & \dots & A_{nm} + B_{nm} \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

Zbroj matrica kraće zapisujemo kao

$$[A_{ij}] + [B_{ij}] = [A_{ij} + B_{ij}]. \tag{3.14}$$

Primijetimo da je prema ovoj definiciji, element matrice $A + B$ na mjestu (i, j) dan sa

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}. \tag{3.15}$$

Primjer 3.2.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

Definicija 3.5. *Nul–matrica, u oznaci* $\mathbf{0}$, *je matrica čji su svi elementi jednaki nula.*

Za nul–matricu očigledno vrijedi

$$A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A \tag{3.17}$$

ako su matrice A i $\mathbf{0}$ istoga reda.

Sljedeća važna algebarska operacija je umnožak matrice i skalara koja je definirana na sljedeći način.

Definicija 3.6. *Neka je $A \in M_{nm}(\mathbb{F})$ i neka je $\lambda \in \mathbb{F}$. Umnožak matrice A i skalara λ je matrica*

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \dots & \lambda A_{1m} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \dots & \lambda A_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda A_{n1} & \lambda A_{n2} & \dots & \lambda A_{nm} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

Prema ovoj definiciji, element matrice λA na mjestu (i, j) je dan sa

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij}. \tag{3.19}$$

Primjer 3.3.

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 3 & -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -15 \\ 9 & -21 & 6 \end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

□

Osnovna svojstva zbrajanja matrica i množenja matrica skalarima su dana sljedećom propozicijom čija provjera se prepušta čitatelju.

Propozicija 3.1. *Zbrajanje matrica i množenje matrica skalarima ima sljedeća svojstva:*

(i) $A + B = B + A$,

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$,

(iii) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,

(iv) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,

(v) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i $A, B \in M_{nm}(\mathbb{F})$.

Lako se pokaže da skup matrica $M_{nm}(\mathbb{F})$ sa ovako definiranim operacijama zbrajanja matrica i množenja matrica skalarima zadovoljava svojstva vektorskog prostora. Nul–vektor u prostoru $M_{nm}(\mathbb{F})$ je nul–matrica $\mathbf{0} \in M_{nm}(\mathbb{F})$, dok je suprotni vektor dan sa

$$-A = [-A_{ij}]. \tag{3.21}$$

Stoga vrijedi

Teorem 3.1. *Skup $M_{nm}(\mathbb{F})$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ s binarnim operacijama zbrajanja matrica i množenja matrica skalarima.*

Prirodno se postavlja pitanje kolika je dimenzija prostora $M_{nm}(\mathbb{F})$. Radi jednostavnosti promotrimo prostor kvadratnih matrica $M_2(\mathbb{F})$. Uočimo da svaku matricu $A \in M_2(\mathbb{F})$ možemo napisati kao linearnu kombinaciju

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = A_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + A_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + A_{21} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + A_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.22}$$

Dakle, matrice

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

razapinju prostor $M_2(\mathbb{F})$. Ove matrice su očigledno linearno nezavisne. Ako je

$$\alpha_1 E_{11} + \alpha_2 E_{12} + \alpha_3 E_{21} + \alpha_4 E_{22} = \mathbf{0}, \tag{3.24}$$

onda je

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

što implicira $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Zaključujemo da matrice E_{ij}, $1 \leq i, j \leq 2$ čine bazu prostora $M_2(\mathbb{F})$ pa je $\dim M_2(\mathbb{F}) = 4$. Slično, svaku matricu $A = [A_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{F})$ možemo napisati kao jedinstvenu linearnu kombinaciju

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_{ij}\, E_{ij} \tag{3.26}$$

gdje je E_{ij} matrica koja u i–tom retku i j–tom stupcu ima jedinicu, a na ostalim mjestima nule. Stoga matrice E_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, tvore bazu prostora $M_{nm}(\mathbb{F})$ pa je

$$\dim M_{nm}(\mathbb{F}) = n\,m. \tag{3.27}$$

Sljedeća algebarska operacija koju možemo definirati je umnožak matrica. Vođeni analogijom sa zbrajanjem matrica, množenje matrica bi naivno mogli definirati tako da množimo elemente matrica na odgovarajućim mjestima. Pokazuje se, međutim, da ova definicija umnoška nije korisna, već množenje matrica treba definirati na složeniji način. Da bismo definirali matrično množenje, uvodimo pojam ulančanih matrica.

Definicija 3.7. *Kažemo da je par matrica (A, B) ulančan ako A ima onoliko stupaca koliko B ima redaka.*

Na primjer, ako je A matrica reda (n, m) i B matrica reda (m, p), onda je par matrica (A, B) ulančan jer A ima m stupaca i B ima m redaka. Za ulančane matrice množenje je definirano na sljedeći način.

Definicija 3.8. *Neka je (A, B) par ulančanih matrica gdje je $A = [A_{ij}]$ matrica reda (n, m) i $B = [B_{ij}]$ matrica reda (m, p). Umnožak matrica AB je matrica $C = [C_{ij}]$ reda (n, p) gdje je*

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}\, B_{kj}, \quad 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq p. \tag{3.28}$$

Element C_{ij} se dobije kao umnožak i–tog retka matrice A i j–tog stupca matrice B pa je iz ove definicije jasno da je umnožak AB definiran samo ako je par (A, B) ulančan.

Primjer 3.4. Neka su

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}. \tag{3.29}$$

Onda je

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 0\cdot 5 & 2\cdot 3 + 0\cdot 7 \\ 4\cdot 1 + 6\cdot 5 & 4\cdot 3 + 6\cdot 7 \\ 8\cdot 1 + 2\cdot 5 & 8\cdot 3 + 2\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 34 & 54 \\ 18 & 38 \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

$\square$

Uočimo na ovom primjeru da se prvi stupac umnoška AB može dobiti kao umnožak matrica A i prvog stupca matrice B,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 0\cdot 5 \\ 4\cdot 1 + 6\cdot 5 \\ 8\cdot 1 + 2\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 34 \\ 18 \end{bmatrix}. \tag{3.31}$$

Slično, drugi stupac umnoška AB je jednak umnošku matrice A i drugog stupca matrice B,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + 0\cdot 7 \\ 4\cdot 4 + 6\cdot 7 \\ 8\cdot 3 + 2\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 54 \\ 38 \end{bmatrix}. \tag{3.32}$$

Ovo zapažanje vrijedi općenito. Neka su A i B ulančane matrice i neka je $B = [B_1\, B_2 \ldots B_m]$ gdje B_i označava i–ti stupac matrice B. Onda se umnožak AB može računati kao

$$AB = [AB_1\, AB_2 \ldots AB_m]. \tag{3.33}$$

Naglasimo da množenje matrica nije komutativno. Drugim riječima, AB nije nužno jednako BA čak i ako su oba umnoška definirana. Na primjer, ako su

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

onda je

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad AB \neq BA. \tag{3.35}$$

Definicija 3.9. *Jedinična matrica I reda n je kvadratna matrica reda n oblika*

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.36}$$

Za svaku matricu A vrijedi

$$AI = A, \quad IA = A \tag{3.37}$$

kada je umnožak definiran. Dakle, jedinična matrica I je analogna broju 1 u skupu $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Slično, za nul–matricu imamo

$$A\mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{0}A = \mathbf{0} \tag{3.38}$$

pa je nul–matrica analogna broju 0 u skupu $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Iako množenje matrica nije komutativno, ono ima svojstva asocijativnosti i distibutivnosti koja vrijede u skupovima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

Propozicija 3.2. *Množenje matrica ima sljedeća svojstva:*

(i) asocijativnost

$$(AB)C = A(BC), \tag{3.39}$$

(ii) homogenost

$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B), \quad \lambda \in \mathbb{F} \tag{3.40}$$

(iii) distributivnost

$$A(B + C) = AB + AC, \tag{3.41}$$

$$(A + B)C = AC + BC \tag{3.42}$$

kada su navedene operacije definirane.

Dokaz (i) Neka su A, B i C matrice reda (m, n), (n, p) i (p, q) redom. Matrica AB je reda (m, p), a matrica BC je reda (n, q) pa su matrice $(AB)C$ i $A(BC)$ obje reda (m, q). Pokažimo da su elementi ovih matrica $(AB)C$ i $A(BC)$ na mjestu (i, j) jednaki. Imamo

$$\big((AB)C\big)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (AB)_{ik}\, C_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{l=1}^{n} A_{il} B_{lk} \Big) C_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} A_{il} B_{lk} C_{kj}. \tag{3.43}$$

S druge strane,

$$\big(A(BC)\big)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} A_{il}\, (BC)_{lj} = \sum_{l=1}^{n} A_{il} \Big(\sum_{k=1}^{p} B_{lk}\, C_{kj} \Big) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} A_{il} B_{lk} C_{kj}. \tag{3.44}$$

Usporedbom (3.43) i (3.44) zaključujemo da je

$$\big((AB)C\big)_{ij} = \big(A(BC)\big)_{ij} \quad \Rightarrow \quad (AB)C = A(BC). \tag{3.45}$$

(ii) Neka su A i B matrice reda (m, n) i (n, p) redom i neka je $\lambda \in \mathbb{F}$. Onda imamo

$$\big((\lambda A)B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\lambda A)_{ik}\, B_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \lambda A_{ik} B_{kj} = \lambda \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} = \lambda (AB)_{ij} = \big(\lambda(AB)\big)_{ij} \tag{3.46}$$

Dakle, $(\lambda A)B = \lambda(AB)$. Slično se pokazuje da je $A(\lambda B) = \lambda(AB)$.

(iii) Neka je A matrica reda (p, n) i neka su B i C matrice reda (n, m). Onda je

$$\begin{aligned} \big(A(B+C)\big)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\, (B+C)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(B_{kj} + C_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} + \sum_{k=1}^{n} A_{ik} C_{kj} \\ &= (AB)_{ij} + (AC)_{ij} = (AB + AC)_{ij}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Zakljkučujuemo da je $A(B+C) = AB+AC$. Slično se pokazuje da vrijedi $(A+B)C = AC + BC$. ■

Dijagonalu kvadratne matrice $A \in M_n(\mathbb{F})$ čine svi elementi A_{ii}, $1 \leq i \leq n$. U spektralnoj teoriji matrica kojom ćemo se baviti u kasnijim poglavljima, posebno su interesantne matrice koje izvan dijagonale imaju nule.

Definicija 3.10. *Dijagonalna matrica je kvadratna matrica koja izvan glavne dijagonale ima nule.*

Dijagonalna matrica ima oblik

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{3.48}$$

Množenje dijagonalnim matricama je vrlo jednostavno. Lako se provjeri da vrijede sljedeća pravila.

(1) Množenje matrice A dijagonalnom matricom slijeva skalira retke matrice A. Na primjer,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 A_{11} & \lambda_1 A_{12} & \lambda_1 A_{13} \\ \lambda_2 A_{21} & \lambda_2 A_{22} & \lambda_2 A_{23} \end{bmatrix}. \tag{3.49}$$

(2) Množenje matrice A dijagonalnom matricom zdesna skalira stupce matrica A. Na primjer,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 A_{11} & \lambda_2 A_{12} & \lambda_3 A_{13} \\ \lambda_1 A_{21} & \lambda_2 A_{22} & \lambda_3 A_{23} \end{bmatrix}. \tag{3.50}$$

(3) Umnožak dijagonalnih matrica je dijagonalna matrica,

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1\beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2\beta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n\beta_n \end{bmatrix}. \tag{3.51}$$

Definicija 3.11. *Neka je $A = [A_{ij}]$ matrica reda (n, m) nad poljem $\mathbb{F}$. Transponirana matrica A^T je matrica reda (m, n) čiji elementi su jednaki*

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}, \quad 1 \le i \le m, \ 1 \le j \le m. \tag{3.52}$$

Transponirana matrica A^T se dobije zamjenom stupaca i redaka matrice A, odnosno tako da se stupci matrice A presložeu retke matrice A^T, redom. Na primjer, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{onda je} \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{3.53}$$

Propozicija 3.3. *Neka su A i B matrice na poljem $\mathbb{F}$. Tada vrijedi*

(1) $(A^T)^T = A$,

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T, \quad \lambda \in \mathbb{F}$,

(4) $(AB)^T = B^T A^T$.

kada su navedene operacije definirane.

Dokaz Svojstva (1)–(3) slijede izravno iz definicije transponirane matrice. Dokažimo svojstvo (4). Neka je $A = [A_{ij}]$ matrica reda (n, m) i neka je $B = [B_{ij}]$ matrica reda (m, p). Matrica $(AB)^T$ na mjestu (i, j) ima element $(AB)_{ji}$ što povlači

$$\big((AB)^T\big)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{m} A_{jk} B_{ki}. \tag{3.54}$$

S druge strane, umnožak matrica $B^T A^T$ na mjestu (i, j) ima element

$$(B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (B^T)_{ik} \, (A^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{m} B_{ki} \, A_{jk} = \sum_{k=1}^{m} A_{jk} B_{ki}. \tag{3.55}$$

Usporedbom jednakosti (3.54) i (3.55) zaključujemo

$$\big((AB)^T\big)_{ij} = (B^T A^T)_{ij} \tag{3.56}$$

pa slijedi da je $(AB)^T = B^T A^T$. ■

Definicija 3.12. *Neka je* $A = [A_{ij}]$ *matrica nad poljem kompleksnih brojeva* $\mathbb{C}$.

(i) Kompleksno konjugirana matrica matrice A *je definirana sa* $\bar{A} = [\bar{A}_{ij}]$.

(ii) Hermitski adjungirana matrica matrice A *je definirana sa* $A^* = (\bar{A})^T$.

Primijetimno da je

$$A^* = (\bar{A})^T = \overline{A^T} \tag{3.57}$$

jer transpozicija i kompleksna konjugacija komutiraju.

Primjer 3.5. Hermitski adjungirana matrica matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3+4i & 7 \\ 1-6i & 5 & 8i \end{bmatrix} \tag{3.58}$$

je dana sa

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & 1+6i \\ 3-4i & 5 \\ 7 & -8i \end{bmatrix}. \tag{3.59}$$

□

U posebnom slučaju, ako je A realna matrica, onda je $A^* = A^T$. Svojstva hermitski adjungirane matrice su slična svojstvima transponirane matrice. Dokaz sljedeće propozicije koja se lako pokaže ostavljamo čitatelju.

Propozicija 3.4. *Neka su* A *i* B *matrice na poljem kompleksnih brojeva* $\mathbb{C}$. *Tada vrijedi*

(1) $(A^*)^* = A$,

(2) $(A + B)^* = A^* + B^*$,

(3) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*, \quad \lambda \in \mathbb{C}$,

(4) $(AB)^* = B^* A^*$.

kada su navedene operacije definirane.

3.2 Kvadratne matrice

Za kvadratne matrice možemo definirati pojam simetrične i antisimetrične matrice, odnosno hermitske i antihermitske matrice, te definirati trag matrice.

Definicija 3.13. *Kažemo da je kvadratna matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$*

(1) simetrična ako je $A^T = A$,

(2) antisimetrična ako je $A^T = -A$.

Istaknimo da simetrična, odnosno antisimetrična matrica, može biti realna ili kompleksna matrica. Za simetričnu matricu A vrijedi

$$A_{ij} = (A^T)_{ij} \quad \Rightarrow \quad A_{ij} = A_{ji}. \tag{3.60}$$

Na primjer, matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5+2i \\ 3 & 2i & -6 \\ 5+2i & -6 & 7 \end{bmatrix} \tag{3.61}$$

je simetrična jer zamjenom redaka i stupaca dobijemo istu matricu. Slično, za antisimetričnu matricu vrijedi

$$A_{ij} = -(A^T)_{ij} \quad \Rightarrow \quad A_{ij} = -A_{ji}. \tag{3.62}$$

Posebno, ova jednakost implicira $A_{ii} = -A_{ii}$ pa su dijagonalni elementi jednaki nula. Na primjer, lako se provjeri da je matrica

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5+2i \\ 3 & 0 & -6 \\ -5-2i & 6 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

antisimetrična.

Interesantno je da se svaka kvadratna matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ može rastaviti na zbroj simetrične i antisimetrične matrice na način

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T). \tag{3.64}$$

Doista, matrica $\frac{1}{2}(A+A^T)$ je simetrična jer je

$$\left(\frac{1}{2}(A+A^T)\right)^T = \frac{1}{2}\left(A^T + (A^T)^T\right) = \frac{1}{2}(A+A^T). \tag{3.65}$$

dok je matrica $A - A^T$ antisimetrična jer imamo

$$\left(\frac{1}{2}(A-A^T)\right)^T = \frac{1}{2}\left(A^T - (A^T)^T\right) = -\frac{1}{2}(A-A^T). \tag{3.66}$$

Za kvadratne matrice nad poljem kompleksnih brojeva možemo definirati hermitke i antihermitske matrice kao generalizaciju simetrične i antisimetrične matrice nad poljem realnih brojeva.

Definicija 3.14. *Kažemo da je kvadratna matrica $A \in M_n(\mathbb{C})$*

(i) hermitska ako je $A^* = A$,

(ii) antihermitska ako je $A^* = -A$.

Za hermitske matrice vrijedi $\bar{A}_{ji} = A_{ij}$. Ovo implicira da je $\bar{A}_{ii} = A_{ii}$ pa su dijagonalni elementi realni brojevi. Dakle, hermitska matrica na dijagonali ima realne elemente. Ako je A antihermitska matrica, onda $\bar{A}_{ji} = -A_{ij}$. Posebno, za dijagonalne elemente imamo $\bar{A}_{ii} = -A_{ii}$ što implicira da je $\bar{A}_{ii} + A_{ii} = 0$ pa su elementi na dijagonali čisto imaginari brojevi ili nula. Odavde zaključujemo da vrijedi

$$A^* = A \quad \Rightarrow \quad A_{ii} \in \mathbb{R}, \tag{3.67}$$

$$A^* = -A \quad \Rightarrow \quad A_{ii} = \sqrt{-1}a_i, \;\; a_i \in \mathbb{R}. \tag{3.68}$$

Slično kao u rastavu (3.64), svaku kvadratnu kompleksnu matricu A možemo napisati kao zbroj hermitske i antihermitske matrice

$$A = \frac{1}{2}(A+A^*) + \frac{1}{2}(A-A^*) \tag{3.69}$$

gdje je $\frac{1}{2}(A+A^*)$ hermitska, a $\frac{1}{2}(A-A^*)$ antihermitska matrica.

Primjer 3.6. Rastavite matricu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3+4i \\ 5i & -2 \end{bmatrix} \tag{3.70}$$

na zbroj hermitske i antihermitkse matrice. Imamo

$$A + A^* = \begin{bmatrix} 2 & 3+4i \\ 5i & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -5i \\ 3-4i & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3-i \\ 3+i & -4 \end{bmatrix}, \tag{3.71}$$

$$A - A^* = \begin{bmatrix} 2 & 3+4i \\ 5i & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -5i \\ 3-4i & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3+9i \\ -3+9i & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.72}$$

Sada je

$$\begin{bmatrix} 2 & 3+4i \\ 5i & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 3-i \\ 3+i & -4 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 3+9i \\ -3+9i & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.73}$$

Provjerite da je matrica $A + A^*$ hermitska, i da je $A - A^*$ antihermitska. □

Svakoj kvadratnoj matrici možemo pridružiti trag matrice kao zbroj njezinih elemenata na dijagonali.

Definicija 3.15. *Neka je $A = [A_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ kvadratna matrica. Trag matrice A je suma njezinih elemenata na dijagonali,*

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}. \tag{3.74}$$

Sljedeći rezultat pokazuje da je preslikavanje $Tr\colon M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$, $A \mapsto Tr(A)$ linearni funkcional na prostoru kvadratnih matrica $M_n(\mathbb{F})$.

Propozicija 3.5. *Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ i neka je $\lambda \in \mathbb{F}$. Tada vrijedi*

(i) $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$,

(ii) $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$.

Dokaz Ova svojstva proizlaze izravno iz definicije traga. Imamo da je

$$Tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(A+B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(A_{ii} + B_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} + \sum_{i=1}^{n} B_{ii} = Tr(A) + Tr(B) \tag{3.75}$$

i

$$Tr(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda A)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda A_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} A_{ii} = \lambda Tr(A). \tag{3.76}$$

■

Kada računamo trag umnoška matrica, trag se ne mijenja ako se promijeni poredak matrica.

Propozicija 3.6. *Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Onda je*

$$Tr(AB) = Tr(BA). \tag{3.77}$$

Dokaz Elementi na dijagonali matrica AB i BA su dani sa

$$(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki}, \quad (BA)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} B_{ik} A_{ki}. \tag{3.78}$$

Stoga je

$$Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki}. \tag{3.79}$$

S druge strane,

$$Tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} (BA)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} B_{ik} A_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{ki} A_{ik} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki}. \tag{3.80}$$

Usporedbom jednakosti (3.79) i (3.80) zaključujemo $Tr(AB) = Tr(BA)$. ■

Iz asocijativnosti množenja i primjenom pravila (3.77) lako se pokaže da trag zadovoljava

$$Tr(ABC) = Tr(BCA) = Tr(CAB). \tag{3.81}$$

Dakle, trag se ne mijenja ako se matrice A, B i C ciklički permutiraju u umnošku.

3.3 Rang matrice

Svakoj matrici možemo pridružiti nenegativni broj, tzv. rang matrice, koji ima važnu ulog u primjeni matrica na rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nm} \end{bmatrix} \tag{3.82}$$

matrica na poljem $\mathbb{F}$. Stupce matrice A

$$S_i = \begin{bmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \\ \vdots \\ A_{ni} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq i \leq m, \tag{3.83}$$

možemo promatrati kao vektore u prostoru stupčanih matrica $M_{n1}(\mathbb{F})$. Zbrajanje stupaca i množenje stupaca skalarima je definirano na uobičajeni način sa

$$S_i + S_j = \begin{bmatrix} A_{1i} + A_{1j} \\ A_{2i} + A_{2j} \\ \vdots \\ A_{ni} + A_{nj} \end{bmatrix}, \quad \lambda S_i = \begin{bmatrix} \lambda A_{1i} \\ \lambda A_{2i} \\ \vdots \\ \lambda A_{ni} \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{F}. \tag{3.84}$$

Definicija 3.16. *Rang po stupcima matrice A, u oznaci $r_S(A)$, je maksimalni broj linarno nezavisnih stupaca matrice A.*

Neka je

$$U = \text{span}\{S_1, S_2, \dots, S_m\} \tag{3.85}$$

prostor razapet stupcima $S_1, S_2, \dots, S_m$. Maksimalni broj linearno nezavisnih stupaca daje dimenziju prostora U pa je

$$r_S(A) = \dim U \leq m. \tag{3.86}$$

Na sličan način, retke matrice A,

$$R_i = [A_{i1}\, A_{i2}\, \ldots\, A_{im}], \quad 1 \leq i \leq n, \tag{3.87}$$

možemo promatrati kao vektore u prostoru redaka $M_{1m}(\mathbb{F})$ gdje je zbrajanje redaka i množenja redaka skalarima dano sa

$$R_i + R_j = [A_{i1} + A_{j1}\; A_{i2} + A_{j2}\; \ldots\; A_{im} + A_{jm}], \quad \lambda R_i = [\lambda A_{i1}\; \lambda A_{i2}\; \ldots\; \lambda A_{im}]. \tag{3.88}$$

Definicija 3.17. *Rang po retcima matrice A, u oznaci $r_R(A)$, je maksimalni broj linearno nezavisnih redaka matrice A.*

Neka je

$$V = \operatorname{span}\{R_1, R_2, \ldots, R_n\} \tag{3.89}$$

prostor razapet retcima matrice A. Onda je

$$r_R(A) = \dim V \leq n. \tag{3.90}$$

Primjer 3.7. Odredite rang po stupcima matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.91}$$

Stupci matrice A su

$$S_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.92}$$

Primijetimo da je $S_2 = 2S_1$ pa su jedini mogući linearno nezavisni stupci $\{S_1, S_3\}$ i $\{S_2, S_3\}$. Pokažimo da je skup $\{S_1, S_3\}$ linearno nezavisan.

$$\alpha S_1 + \beta S_3 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 3\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.93}$$

što implicira da α i β zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$2\alpha + \beta = 0, \quad 3\alpha + \beta = 0. \tag{3.94}$$

Oduzimanjem prve jednadžbe od druge dobivamo $\alpha = 0$ što odmah implicira $\beta = 0$. Dakle, ovaj sustav ima jedinstveno rješenje $\alpha = \beta = 0$ pa su stupci S_1 i S_3 linearno nezavisni. Odavde slijedi da je $r_S(A) = 2$. $\square$

Primjer 3.8. Odredite rang po retcima matrice

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}. \tag{3.95}$$

Retci matrice B su

$$R_1 = [2 \;\; 4 \;\; 6], \quad R_2 = [3 \;\; 6 \;\; 9]. \tag{3.96}$$

Ispitajmo jesu li R_1 i R_2 linearno nezavisni.

$$\alpha R_1 + \beta R_2 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad [2\alpha + 3\beta \;\; 4\alpha + 6\beta \;\; 6\alpha + 9\beta] = [0 \;\; 0 \;\; 0] \tag{3.97}$$

što implicira da su α i β zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$2\alpha + 3\beta = 0, \quad 4\alpha + 6\beta = 0, \quad 6\alpha + 9\beta = 0. \tag{3.98}$$

Primijetimo da su prva i druga jednadžba ekvivalentne jer prvu jednadžbu dobijemo iz druge dijeljenjem s 2. Dakle, sustav se svodi na dvije jednadžbe

$$2\alpha + 3\beta = 0, \quad 6\alpha + 9\beta = 0. \tag{3.99}$$

Međutim, ove dvije jednadžbe su također ekvivalentne jer se prva jednadžba dobije dijeljenjem druge s 3. Odavde slijedi da se sustav svodi samo na jednu jednadžbu $2\alpha + 3\beta = 0$. Ova jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja jer za svaki $\beta \in \mathbb{R}$ imamo $\alpha = -\frac{3}{2}\beta$. Na primjer, ako odaberemo $\beta = 1$, onda je $\alpha = -\frac{3}{2}$ pa jednadžba (3.97) povlači

$$-\frac{3}{2}R_1 + R_2 = \mathbf{0}. \tag{3.100}$$

Zaključujemo da je skup $\{R_1, R_2\}$ je linearno zavisan što implicira $r_R(B) = 1$. $\square$

Sljedeći važan rezultat o rangu matrice navodimo bez dokaza.

Teorem 3.2. *Za svaku matricu $A \in M_{nm}(\mathbb{F})$ je rang po stupcima jedank je rangu po retcima matrice A.*

Obzirom da ne treba razlikovati rang po stupcima i rang po retcima, možemo definirati rang matrice kao bilo koji od ova dva broja.

Definicija 3.18. *Rang matrice A, u oznaci $r(A)$, je rang po stupcima ili rang po retcima matrice A. Rang nul–matrice jednak je nula.*

Iz teorema 3.2 odmah slijedi da je

$$r(A) = r(A^T) \tag{3.101}$$

jer su u transponiranoj matrici zamijenjeni stupci i retci matrice A. Za neke tipove matrica, kao što su trokutaste ili dijagonalne matrice, rang se može vrlo lako odrediti.

Definicija 3.19. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ kvadratna matrica. Kažemo da je*

(i) A gornje trokutaska matrica ako su njezini elementi ispod dijagonale jednaki nula,

(ii) donje trokutasta matrica ako su njezini elementi iznad dijagonale jednaki nula.

Primjer 3.9. Odredite rang gornje trokutaske matrice

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \tag{3.102}$$

gdje je $A_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, 3$. Linearna kombinacija stupaca matrice

$$a \begin{bmatrix} A_{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.103}$$

implicira da koeficijenti a, b i c zadovoljavaju jednadžbe

$$aA_{11} + bA_{12} + cA_{13} = 0, \quad bA_{22} + cA_{23} = 0, \quad cA_{33} = 0. \tag{3.104}$$

Obzirom da je $A_{33} \neq 0$, zadnja jednadžba implicira $c = 0$. Sada iz prethodne jednadžbe imamo $bA_{22} = 0$ što povlači $b = 0$ jer je $A_{22} \neq 0$. Konačno, prva jednadžba daje $A_{11}a = 0$ što implicira $a = 0$ jer je $A_{11} \neq 0$. Zaključujemo da stupci matrice A čine linearno nezavisan skup pa je $r(A) = 3$. $\square$

Općenito, ako je A gornje trokutasta matrica reda n takva da je $A_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, onda je $r(A) = n$. Lako se vidi da ako matrica A ima na dijagonali ima k elemenata koji su različiti od nule,, onda je $r(A) = k$. Analogni zaključak vrijedi za donje trokutastu matricu. Očigledno, rang dijagonalne matrice je jednak broju njezinih elemenata na dijagonali koji su različiti od nule.

3.4 Elementarne transformacija na matricama

Rang matrice se može na efikasniji način odrediti pomoću elementarnih transformacija na matricama. Ideja ovog postupka je da se uvedu transformacije na matricama koje ne mijenjaju rang matrice te da se pomoću tih transformacija zadana matrica svede na oblik čiji se rang lako odredi. Računanje ranga matrice je posebno važno u rješavanju sustava linearnih jednadžbi kao i u određivanju ranga linearnog operatora kojemu je pridružena matrica operatora.

Elementarne transformacija na matricama dijelimo na

(1) Zamjena dvaju stupaca (redaka).

(2) Množenje stupca (retka) skalarom $\lambda \neq 0$.

(3) Pribrajanje jednog stupca (retka) drugom stupcu (retku).

Definicija 3.20. *Kažemo da su matrice A i B ekvivalentne i pišemo $A \sim B$ ako se B može dobiti konačnim brojem elemenarnih transformacija na matrici A.*

Teorem 3.3. *Ako je matrica B dobivena konačim brojem elenetarnih transformacija na matrici A, onda A i B imaju isti rang.*

Dokaz Dovoljno je pokazati da niti jedna elementarna transformacija ne mijenja rang matrice. Neka su $S_1, S_2, \ldots, S_m$ stupci matrice $A \in M_{nm}(\mathbb{F})$. Neka je $U = \text{span}\{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ prostor razapet stupacima matrice A. Onda je $r(A) = \dim U$.

Elementarna transformacija (1) očigledno ne mijenja rang matrice A jer zamjenom dva stupca $A_i \leftrightarrow A_j$ dobivamo isti skup stupaca koji razapinju prostor U. Ako stupac S_i pomnožimo skalarom $\lambda \neq 0$, onda stupci $S_1, S_2, \ldots, S_m$ i $S_1, S_2, \ldots, \lambda S_i, \ldots, S_m$ razapinju isti prostor pa transformacija (2) ne mijenja rang matrice.

Pokažimo sada da transformacija (3) ne mijenja rang matrice. Pretpostavimo da je matrica B dobivena iz matrice A tako da je stupac S_j pridodan stupcu S_i. Neka je $V = \text{span}\{S_1, \ldots, S_{i-1}, S_i + S_j, S_{i+1}, \ldots, S_m\}$. Onda je $r(B) = \dim V$. Tvrdimo da je $U = V$. Ako je $u \in U$, onda je u linearna kombinacija stupaca

$$u = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \cdots + \alpha_m S_m \tag{3.105}$$

za neke $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{F}$. Vektor u možemo zapisati kao

$$u = \alpha_1 S_1 + \cdots + \alpha_{i-1} S_{i-1} + \alpha_i (S_i + S_j) + \alpha_{i+1} S_{i+1} + \cdots + (\alpha_j - \alpha_i) S_j + \cdots + \alpha_m S_m \tag{3.106}$$

gdje smo u linearnoj kombinaciji (3.106) dodali i oduzeli vektor $\alpha_i S_j$. Dakle, $u \in V$ što implicira $U \subseteq V$. Neka je sada $v \in V$. Onda je v dan sa

$$v = \beta_1 S_1 + \cdots + \beta_{i-1} S_{i-1} + \beta_i (S_i + S_j) + \beta_{i+1} S_{i+1} + \cdots + \beta_m S_m \tag{3.107}$$

za neke $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in \mathbb{F}$. Linearnu kombinaciju (3.107) možemo zapisati kao

$$v = \beta_1 S_1 + \cdots + \beta_i S_i + \cdots + (\beta_j + \beta_i) S_j + \cdots + \beta_m S_m \tag{3.108}$$

što povlači $v \in U$ pa je $V \subseteq U$. Zaključujemo da je $U = V$ pa je $\dim U = \dim V$ što implicira $r(A) = r(B)$. Na isti način se pokazuje da se rang ne mijenja ako se elementarne transformacije provode na retcima matrice A. Iz navedenog slijedi da ako je matrica B dobivena konačnim brojem elemenatarnih transformacija na stupcima (retcima) matrice A, onda je $r(B) = r(A)$. ■

Korolar 3.1. *Ekvivalentne matrice imaju isti rang.*

Kako smo naveli u uvodu, zadanu matricu možemo elementarnim transformacijama prevesti na tzv. kanonski oblik čiji rang lako možemo odrediti. Pri tome, polazna matrica i dobiveni kanonski oblik imaju isti rang.

Definicija 3.21. *Kažemo da je $D_r \in M_{nm}(\mathbb{F})$ kanonska matrica ranga $r \geq 0$ ako D_r ima oblik*

$$D_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Ako je $r > 0$, onda matricu D_r simbolički zapisujemo kao blok–matricu

$$D_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.109}$$

gdje je I_r jedinična matrica reda r. Ako je $r = 0$, onda je D_0 nul–matrica. Matrica D_r ima r linearno nezavisnih stupaca (i redaka) u kojima se nalaze jedinice pa je rang matrice jednak r. Koristeći elementarne transformacije na matricama, svaku matricu možemo svesti na kanonski oblik D_r.

Teorem 3.4. *Svaka matrica je ekvivalentna kanonskoj matrici D_r istog reda za neki $r \geq 0$.*

Dokaz Ako je $A = \mathbf{0}$ nul–matrica, onda je $A = D_0$ pa je dokaz gotov. Pretpostavimo da je $A \neq 0$. Onda postoji element $A_{ij} \neq 0$. Zamjenom redaka i stupaca matrice A, element A_{ij} možemo dovesti na mjesto $(1, 1)$. Dijeljenjem prvog retka ili stupca s A_{ij} postižemo da se na mjestu $(1, 1)$ nalazi jedinica pa je A ekvivalentna matrici

$$B = \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nm} \end{bmatrix}. \tag{3.110}$$

Množenjem prvog stupca s $-B_{12}$ i dodavanjem drugom stupcu postižemo da se na mjestu $(1,2)$ nalazi nula. Ponavljanjem postupka, tj. množenjem prvog stupca s $-B_{1k}$ i dodavanjem k–tom stupcu postižemo da se u prvom retku nalaze elementi $1,0,\ldots,0$, redom. Slično, množenjem prvog retka s $-B_{21}$ i dodavanjem drugom retku postižemo da je element na mjestu $(2,1)$ jednak nula. Ponavljanjem postupka tako da prvi redak pomnožimo s $-B_{k1}$ i dodamo k–tom retku, postižemo da su elementi u prvom stupcu jednaki $1,0,\ldots,0$, redom. Sada je matrica A ekvivalentna matrici

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & C_{22} & \ldots & C_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & C_{m2} & \ldots & C_{mn}\end{bmatrix}. \tag{3.111}$$

Ako su svi $C_{ij}=0$ onda je postupak gotov i $A\sim D_1$. U protivnom, postupak se ponavlja na podmatrici s elementima C_{ij}. Primijetimo da prilikom izvođenja elementarnih transformacija na podmatrici $[C_{ij}]$, prvi redak i stupac matrice C ostaju nepromijenjeni. Nakon konačnog broja koraka dolazimo do kanonskog oblika matrice D_r pa je $A\sim D_r$. ■

Kod prevođenja matrice na kanonski oblik korisno je uvesti sljedeće oznake za elementarne transformacije:

(1) $S_i\leftrightarrow S_j$ (stupcima S_i i S_j zamijenimo mjesta),

(2) λS_i (stupac S_i pomnožimo skalarom $\lambda\neq 0$),

(3) $S_i+S_j\to S_j$ (stupac S_i pribrojimo stupcu S_j).

Analogno označavamo elementarne transformacije na retcima matrice.

Primjer 3.10. Odredite rang matrice

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 4\end{bmatrix}. \tag{3.112}$$

Elemetarnim transformacijama dobivamo

$$\begin{gathered}\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 4\end{bmatrix}\overset{R_1\leftrightarrow R_2}{\sim}\begin{bmatrix}2 & 2 & 4\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}\overset{\frac12 R_1}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}\overset{-S_1+S_2\to S_2}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}\overset{\frac12 S_2}{\sim}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\overset{-2S_1+S_3\to S_3}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}\overset{-3S_2+S_3\to S_3}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.\end{gathered} \tag{3.113}$$

Dakle, $A \sim D_2$ što povlači $r(A) = 2$. $\square$

Poglavlje 4

Determinante

Svakoj kvadratnoj matrici $A = [A_{ij}]$ možemo pridružiti skalar koji nazivamo determinanta matrice i označavamo sa $\det(A)$ ili

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}. \tag{4.1}$$

Determinanta matrice ima važne primjene u teoriji operatora, naročito u proučavanju njihovih spektralnih svojstava te u rješavanju sustava linearnih jednadžbi. Prvo ćemo definirati determinantu matrice prvog, drugog i trećeg reda, a zatim ćemo definiciju generalizirati na matrice proizvoljnog reda. Kažemo da je $\det(A)$ determinanta n–tog reda ako je A kvadratna matrica n–tog reda. Determinantu prvog, drugog i trećeg reda se definiramo na sljedeći način.

(1) **Determinanta prvog reda**

Ako je $A = [a]$ matrica prvog reda, onda je $\det(A) = a$.

(2) **Determinanta drugog reda**

Ako je $A = [A_{ij}]$ kvadratna matrica drugog reda, onda definiramo

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}. \tag{4.2}$$

(3) **Determinanta trećeg reda**

Neka je $A = [A_{ij}]$ kvadratna matrica trećeg reda. Onda je

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} &= A_{11}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{12}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{13}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \\ &= A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} \\ &- A_{13}A_{22}A_{31} - A_{12}A_{21}A_{33} - A_{11}A_{23}A_{32}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Determinanta trećeg reda se lako pamti pomoću tzv. *Sarrusovog pravila.* Pored matrice A dopišemo prva dva stupca i dobijemo proširenu matricu

$$\left|\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}. \\ A_{31} & A_{32} \end{matrix} \tag{4.4}$$

Umnošci na dijagonalama

$$A_{11}A_{22}A_{33}, \quad A_{12}A_{23}A_{31} \text{ i } A_{13}A_{21}A_{32} \tag{4.5}$$

imaju pozivitvni predznak, dok umnošci na suprotno orijetiranim dijagonalama

$$A_{13}A_{22}A_{31}, \quad A_{11}A_{23}A_{32} \text{ i } A_{12}A_{21}A_{33} \tag{4.6}$$

imaju negativni predznak.

Primjer 4.1. Odredite determinatu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Primjenom Sarussovog pravila dobivamo

$$\begin{aligned}\det(A) = \left|\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 1 & -3 \end{matrix} &= 2\cdot 5\cdot 4 + 1\cdot(-2)\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot(-3) \\ &- 1\cdot 5\cdot 1 - 2\cdot(-2)\cdot(-3) - 1\cdot 0\cdot 4 \\ &= 40 - 2 - 5 - 12 = 21. \end{aligned} \tag{4.8}$$

□

Iako se naizgled determinante drugog i trećeg reda ne računaju po zajedničkom obrascu, primijetimo da se u determinanti drugog reda pojavljuju faktori $A_{1i}A_{2j}$ gdje su indeksi i i j permutacije brojeva 1 i 2. Slično, u determinanti trećeg reda pojavljuju se faktori $A_{1i}A_{2j}A_{3k}$ gdje su i, j i k permutacije elemenata $1, 2$ i 3. Da bismo mogli definirati determinantu n–tog reda potrebno je pobliže promotriti permutacije na skupu od n elemenata.

4.1 Permutacije

U ovom poglavlju navodimo osnovne definicije i elementarna svojstva permutacija koja su potrebna za definiciju determinante.

Definicija 4.1. *Permutacija na skupu $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ je svaka bijekcija $\sigma\colon X \to X$. Skup svih permutacija na skupu od n elemenata označavamo sa S_n.*

Na skupu od n elemenata imamo $n! = n \cdot (n-1) \ldots 2 \cdot 1$ permutacija. Permutaciju $\sigma\colon X \to X$ označavamo kao matricu s dva retka

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

gdje je $\sigma(i)$ slika elementa $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Permutaciju

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

nazivamo identiteta jer je $\sigma(i) = i$ za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ako sliku elementa k označimo sa $\sigma(k) = i_k$, onda gornju permutaciju možemo kraće zapisati kao niz

$$\sigma = i_1\, i_2\, \ldots i_n. \tag{4.11}$$

Na primjer, na skupu $X = \{1, 2, 3\}$ imamo ukupno $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutacija koje su dane sa

$$\sigma_1 = 1\,2\,3, \quad \sigma_2 = 1\,3\,2, \quad \sigma_3 = 2\,1\,3, \quad \sigma_4 = 2\,3\,1, \quad \sigma_5 = 3\,1\,2, \quad \sigma_6 = 3\,2\,1. \tag{4.12}$$

Na primjer, permutacija σ_4 je zapis za preslikavanje $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 3$ i $3 \mapsto 1$ što u dužem zapisu pišemo kao

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Definicija 4.2. *Neka su $\sigma, \tau \in S_n$ permutacije na skupu od n elemenata. Umnožak permutacija $\sigma\tau$ je kompozicija preslikavanja $\sigma\tau = \sigma \circ \tau$.*

Umnožak permutacija se lako računa koristeći pravilo za računanje kompozicije funkcija. Na primjer, umnožak permutacija $\sigma_3\sigma_4$ daje

$$\sigma_3\,\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Umnožak računamo tako da pratimo preslikavanje svakog elementa $i \in \{1, 2, 3\}$ gdje na i prvo djeluje permutacija σ_4, a zatim σ_3. Dakle, umnožak $\sigma_3\,\sigma_4$ predstavlja sljedeću kompoziciju preslikavanja:

$$1 \mapsto 2 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 3 \mapsto 3, \quad 3 \mapsto 1 \mapsto 2. \tag{4.15}$$

Definicija 4.3. *Neka je $\sigma = i_1\, i_2 \ldots i_n$ permutacija na skupu $\{1, 2, \ldots, n\}$. Inverzija je uređeni par (i_k, i_l) takav da i_k prethodi i_l i $i_k > i_l$. Broj inverzija u permutaciji σ označavamo sa $I(\sigma)$.*

Primjer 4.2. U permutaciji $\sigma = 3\,5\,1\,4\,2$ imamo sljedeće inverzije:

$$(3,1), \quad (3,2), \quad (5,1), \quad (5,4), \quad (5,2) \quad \text{i} \quad (4,2). \tag{4.16}$$

$\square$

Definicija 4.4. *Kažemo da je σ parna (neparna) permutacija ako σ ima parni (neparni) broj inverzija. Preznak permutacije, u oznaci $sgn(\sigma)$, definiramo sa*

$$sgn(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)} \tag{4.17}$$

gdje je $I(\sigma)$ broj inverzija u permutaciji σ.

Iz definicije slijedi da je

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \sigma \text{ parna permutacija,} \\ -1, & \text{ako je } \sigma \text{ neparna permutacija} \end{cases}. \tag{4.18}$$

Permutacija iz Primjera 4.2 ima šest inverzija, stoga je σ parna permutacija i vrijedi $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^6 = 1$.

Definicija 4.5. *Transpozicija na skupu* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *je permutacija koja zamjenjuje poredak točno dva elementa u nizu* $1\,2\ldots n$.

Očigledno, predznak transpozicije τ je jednak $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$. Na primjer, permutacija $\tau = 4\,2\,3\,1$ je transpozicija jer je u nizu $1\,2\,3\,4$ zamijenjen poredak elemenata 1 i 4, stoga je $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$.

Predznak permutacije zadovoljava sljedeće svojstvo koje navodimo bez dokaza.

Propozicija 4.1. *Ako su* σ_1 *i* σ_2 *permutacije na skupu* $\{1, 2, \ldots, n\}$, *onda je*

$$sgn(\sigma_1\sigma_2) = sgn(\sigma_1)\, sgn(\sigma_2). \tag{4.19}$$

Ovaj rezultat slijedi iz činjenice da je $\sigma_1\sigma_2$ parna permutacija kada su σ_1 i σ_2 obje parne ili obje neparne, a $\sigma_1\sigma_2$ je neparna permutacija ako je σ_1 parna i σ_2 neparna permutacija, ili obratno.

4.2 Determinanta matrice općeg reda

Sada možemo definirati determinantu kvadratne matrice n–tog reda.

Definicija 4.6. *Determinanta je funkcija det*: $M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ *koja matrici* $A = [A_{ij}]$ *pridružuje skalar*

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)\, A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \ldots A_{n\sigma(n)}. \tag{4.20}$$

U gornjoj definicij suma $\sum_{\sigma \in S_n}$ označava sumu po svim permutacijama na skupu $\{1, 2, \ldots, n\}$. Primijetimo da je $A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \ldots A_{n\sigma(n)}$ umnožak od n elemenata matrice A tako da je svaki element uzet točno iz jednog stupca i jednog retka. Dakle, determinantu dobivamo tako da množimo elemente iz različitih redaka i stupaca pomnoženih s predznakom odgovarajuće permutacije na drugom indeksu.

Raspišimo ovu definiciju za determinantu reda $n = 2$. U tom slučaju sumiramo po svim permucijama na skupu $\{1, 2\}$. Ovdje imamo samo dvije permutacije

$$\sigma_1 = 1\,2, \quad \sigma_2 = 2\,1 \tag{4.21}$$

s pripadnim predznacima

$$\operatorname{sgn}(\sigma_1) = (-1)^0 = 1, \quad \operatorname{sgn}(\sigma_2) = (-1)^1 = -1. \tag{4.22}$$

Stoga je determinanta drugog reda jednaka

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} &= \sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \\ &= \operatorname{sgn}(\sigma_1)\, A_{1\sigma_1(1)} A_{2\sigma_1(2)} + \operatorname{sgn}(\sigma_2)\, A_{1\sigma_2(1)} A_{2\sigma_2(2)} \\ &= A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Determinanta matrice se može alternativno definirati i na sljedeći način. Sumande u definiciji (4.20) možemo napisati tako da su indeksi po stupcima poredani u nizu $1, 2, \ldots, n$. Pri tome se permutiraju indeksi po retkcima pa imamo da je

$$A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \ldots A_{n\sigma(n)} = A_{\rho(1)1} A_{\rho(2)2} \ldots A_{\rho(n)n} \tag{4.24}$$

gdje je $\rho = \sigma^{-1}$ inverzna permutacija permutacije $\sigma \in S_n$. Kako σ i σ^{-1} imaju isti broj inverzija, to je $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$ pa izraz (4.20) možemo napisati kao

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)1} A_{\sigma(2)2} \ldots A_{\sigma(n)n}. \tag{4.25}$$

Dakle, determinantu matrice A možemo računati tako da permutiramo indekse po stupcima ili indekse po retcima matrice A.

Računanje determinante prema Definiciji 4.6 postaje kompleksnije kako n raste jer broj računskih operacija raste otprilike kao $(n+1)!$. Međutim, determinanta ima određena svojstva koja nam omogućavaju da se determinante visokog reda mogu izračunati relativno lako. Stoga je neophodno upoznati se s nekim osnovnim svojstvima determinanti.

4.3 Svojstva determinanti

U ovom poglavlju ćemo proučiti kako se determinanta matrice mijenja kada na matrici vrišimo elementarne transformacija na matricama. Prisjetimo se da elementarne transformacije na matricama dijelimo na: (i) zamjena dvaju stupaca (redaka), (ii) množenje stupca (retka) skalarom $\lambda \neq 0$, (iii) pribrajanje jednog stupca (retka) drugom stupcu (retku).

Propozicija 4.2. *Neka je $A = [A_{ij}]$ kvadratna matrica reda n. Onda je*

$$det(A^T) = det(A). \tag{4.26}$$

Dokaz Neka je $B = A^T$. Onda je $B_{ij} = A_{ji}$ pa iz (4.25) slijedi

$$\begin{aligned}\det(B) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, B_{1\sigma(1)} B_{2\sigma(2)} \dots B_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, A_{\sigma(1)1} A_{\sigma(2)2} \dots A_{\sigma(n)n} = \det(A). \end{aligned} \tag{4.27}$$

■

Propozicija 4.3. *Neka je A kvadratna matrica reda n. Ako je matrica B dobivena iz matrice A zamjenom dvaju njezinih redaka ili stupaca, onda je $det(B) = -det(A)$.*

Drugim riječima, determinanta matrice mijenja predznak ako u matrici zamijenimo dva retka ili stupca.

Dokaz Dokaz provodimo za slučaj kada u matrici $A = [A_{ij}]$ zamijenimo dva stupca. Pretpostavimo da smo zamijenili stupce k i l. Onda su elementi matrice $B = [B_{ij}]$ dani sa $B_{ij} = A_{i\,\tau(j)}$ gdje je τ transpozicija

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & l & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & l & \dots & k & \dots & n \end{pmatrix}. \tag{4.28}$$

Sada je determinanta matrice B jednaka

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, B_{1\sigma(1)} B_{2\sigma(2)} \dots B_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, A_{1\,\tau\sigma(1)} A_{2\,\tau\sigma(2)} \dots A_{n\,\tau\sigma(n)}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Drugi indeks u faktoru $A_{i\,\tau\sigma(i)}$ je kompozicija permutacija $\tau\sigma(i)$. Kako je $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$ jer je τ transpozicija, to je prema Propoziciji 4.1

$$\operatorname{sgn}(\tau\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma) = -\operatorname{sgn}(\sigma). \tag{4.30}$$

Stoga iz (4.29) i (4.30) slijedi da je

$$\det(B) = -\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau\sigma)\, A_{1\tau\sigma(1)} A_{2\tau\sigma(2)} \dots A_{n\tau\sigma(n)}. \tag{4.31}$$

Ako σ prolazi po svim permutacijama u S_n, onda $\tau\sigma$ takodjer prolazi po svim permutacijama u S_n pa suma u izrazu (4.31) daje determinantu matrice A. Stoga zaključujemo da je $\det(B) = -\det(A)$. Slično, koristeći alternativni izraz za determinantu (4.25) pokazuje se da determinanta mijenja predznak ako u matrici zamijenimo dva retka. ■

Neposredna posljedica prethodnog rezultata je

Korolar 4.1. *Ako matrica A ima dva jednaka stupca (retka), onda je $det(A) = 0$.*

Sljedeća propozicija nam kazuje kako se determinanta mijenja ako se stupac ili redak matrice pomnoži nekim skalarom.

Propozicija 4.4. *Ako je matrica B dobivena iz matrice A množenjem jednog retka (stupca) skalarom $\lambda \in \mathbb{F}$, onda je $det(B) = \lambda\, det(A)$.*

Dokaz Pretpostavimo da je matrica B dobivena iz matrice A množenjem k–tog retka skalarom $\lambda \in \mathbb{F}$. Onda je

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{k1} & \lambda A_{k2} & \dots & \lambda A_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}. \tag{4.32}$$

Elementi matrice B su dani sa $B_{ij} = A_{ij}$ za $i \neq k$ i $B_{kj} = \lambda A_{kj}$. Sada imamo

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, B_{1\sigma(1)} \dots B_{k\sigma(k)} \dots B_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, A_{1\sigma(1)} \dots \lambda A_{k\sigma(k)} \dots A_{n\sigma(n)} \\ &= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} \dots A_{k\sigma(k)} \dots A_{n\sigma(n)} = \lambda \det(A). \end{aligned} \tag{4.33}$$

Pretpostavimo sada da je matrica B dobivena tako da je k–ti stupac matrice A pomnožen skalarom $\lambda \in \mathbb{F}$. Onda je k–ti redak transponirane matrice B^T pomnožen skalarom λ pa (4.33) Propozicije 4.2 slijedi

$$\det(B) = \det(B^T) = \lambda \det(A^T) = \lambda \det(A). \tag{4.34}$$

■

Korolar 4.2. *Ako je A kvadratna matrica n–tog reda, onda je $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.*

Dokaz Svaki redak matrice λA je pomnožen skalarom λ pa uzastopnom primjenom Propozicije 4.4 na svaki redak dobivamo $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$. ■

Propozicija 4.5. *Ako je redak (stupac) matrice A proporcionalan nekom drugom retku (stupcu) te matrice, onda je $det(A) = 0$.*

Dokaz Pretpostavimo da je stupac k matrice A proporcionalan stupcu l. Onda je matrica A dana sa

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{l1} & \lambda A_{l2} & \dots & \lambda A_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{l1} & A_{l2} & \dots & A_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

gdje se u stupcu k nalaze elementi $\lambda A_{l1}, \lambda A_{l2} \dots, \lambda A_{ln}$. Sada iz Propozicije 4.4 slijedi

$$\det(A) = \lambda \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{l1} & A_{l2} & \dots & A_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{l1} & A_{l2} & \dots & A_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{4.36}$$

jer su retci k i l jednaki. Ako je stupac k matrice A proporcionalan stupcu l, onda je redak k matrice A^T proporcionalan retku l. Stoga iz (4.36) slijedi

$$0 = \det(A^T) = \det(A). \tag{4.37}$$

■

Propozicija 4.6. *Neka su A, B i C matrice reda n takve da je*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A'_{k1} & A'_{k2} & \dots & A'_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \tag{4.38}$$

i

$$C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k1} + A'_{k1} & A_{k2} + A'_{k2} & \dots & A_{kn} + A'_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

Onda je

$$det(C) = det(A) + det(B). \tag{4.40}$$

Dokaz Elementi matrice C su dani sa

$$C_{ij} = A_{ij} \ \text{ za } \ i \neq k \quad \text{i} \quad C_{kj} = A_{kj} + A'_{kj}. \tag{4.41}$$

Sada je

$$\begin{aligned} \det(C) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, C_{1\sigma(1)} \dots C_{k\sigma(k)} \dots C_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, A_{1\sigma(1)} \dots (A_{k\sigma(k)} + A'_{k\sigma(k)}) \dots A_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, A_{1\sigma(1)} \dots A_{k\sigma(k)} \dots A_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, A_{1\sigma(1)} \dots A'_{k\sigma(k)} \dots A_{n\sigma(n)} \\ &= \det(A) + \det(B). \end{aligned} \tag{4.42}$$

■

Potrebno je naglasiti da općenito ne vrijedi $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$. Na primjer, ako je

$$A = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.43}$$

onda je $\det(A+B) = 4$, ali $\det(A) + \det(B) = 2$.

Kao izravnu posljedicu Propozicije 4.6 imamo

Propozicija 4.7. *Ako je matrica B dobivena iz kvadratne matrice A pribrajanjem nekog njezinog retka (stupca) drugom retku (stupcu) te matrice, onda je $det(B) = det(A)$.*

Dokaz Neka je $A = [A_{ij}]$ kvadratna matrica reda n. Pretpostavimo da je matrica B dobivena pribrajanjem retka l retku k. Onda je

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k1} + A_{l1} & A_{k2} + A_{l2} & \dots & A_{kn} + A_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

gdje matrica B u rektu k ima elemente $A_{1k} + A_{1l}, A_{2k} + A_{2l}, \dots, A_{nk} + A_{nl}$. Prema Propoziciji 4.6 imamo

$$\det(B) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{l1} & A_{l2} & \dots & A_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} = \det(A) + 0 = \det(A) \tag{4.45}$$

jer su retci k i l u drugoj determinanti jednaki pa je druga determinanta jednaka nuli. Ako je matrica B dobivena iz A pribrajanjem stupca l stupcu k, onda je B^T dobivena iz A^T pribrajanjem retka l retku k. Stoga je prema (4.45), $\det(B^T) = \det(A^T)$ što implicira $\det(B) = \det(A)$. ■

Korolar 4.3. *Ako nekom retku (stupcu) kvadratne matrice dodamo linearnu kombinaciju ostalih redala (stupaca) te matrice, njezina determinanta se ne mijenja.*

Dokaz Neka je $A = [A_{ij}]$ kvadrana matrica reda n. Pretpostavimo da je matrica B dobivena iz matrice A tako da se k–tom retku pribroji neka linearna kombinacija redaka matrice A. Onda B ima oblik

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ A_{k1} + \sum_{i\neq k} \lambda_i A_{i1} & A_{k2} + \sum_{i\neq k} \lambda_i A_{i2} & \dots & A_{kn} + \sum_{i\neq k} \lambda_i A_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

pa je determinanta od B jednaka

$$\begin{aligned} \det(B) &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} + \sum_{i\neq k} \lambda_i \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \det(A) + \sum_{i\neq k} \lambda_i\, 0 = \det(A) \end{aligned} \tag{4.47}$$

jer sve determinante koje su pomnožene s λ_i, $i \neq k$, imaju dva retka jednaka (redak k jednak je retku i). Slično, ako je matrica B dobivena iz matrice A tako se k–tom stupcu doda linearna kombinacija ostalih stupaca matrice A, onda primjenom (4.47) na transponiranu matricu B^T zaključujemo da je $\det(B) = \det(A)$. ■

Jedan od važnih rezultata o determinanti matrice je *Binet–Cauchyev teorem* prema kojem je determinanta umnoška dviju matrica jednaka umnošku njihovih determinanti. Dokaz ovog teorema je složen, stoga ćemo ga ovdje ilustrirati na primjeru matrica drugog reda jer se u tom slučaju tvrdnja može dokazati izravnim računom. Pri tome koristimo svojstva determinanti koja smo upravo dokazali.

Neka su $A = [A_{ij}]$ i $B = [B_{ij}]$ matrice drugog reda. Onda je njihov umnožak jednak

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}. \tag{4.48}$$

Prvi redak dobivene determinante je zbroj dvaju redaka pa prema Propoziciji 4.6 determinantu od AB možemo rastaviti kao zbroj

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{vmatrix}. \tag{4.49}$$

Sada svaku od ovih determinanti možemo napisati kao zbroj dvije determinante koristeći rastav po drugom retku,

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \begin{vmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} \\ A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{vmatrix} \\ &= B_{11}B_{12} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{11} \\ A_{21} & A_{21} \end{vmatrix} + A_{11}A_{22} \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} \\ &+ A_{12}A_{21} \begin{vmatrix} B_{21} & b_{22} \\ B_{11} & B_{12} \end{vmatrix} + A_{12}A_{22} \begin{vmatrix} B_{21} & B_{22} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} \\ &= A_{11}A_{22} \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} - A_{12}A_{21} \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} \\ &= (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}) \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Dakle,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \quad \text{za sve} \quad A, B \in M_2(\mathbb{F}). \tag{4.51}$$

Može se pokazati da ovaj rezulat vrijedi za kvadratne matrice svakog reda. Stoga imamo

Teorem 4.1 (Binet-Cauchy)**.** *Neka su A i B kvadratne matrice istog reda. Onda je*

$$det(AB) = det(A)\, det(B). \tag{4.52}$$

Iz Binet-Cauchyevog teorema slijedi da je

$$\det(BA) = \det(B)\det(A) = \det(A)\det(B) = \det(AB). \tag{4.53}$$

4.4 Laplaceov razvoj determinante

Računanje determinante prema Definiciji 4.6 je računski vrlo zahtjevno iziskuje više od $n!$ računskih operacija. Na primjer, za računanje determinante petog reda potrebno je više od 120 računskih radnji! U ovom poglavlju ćemo upoznati alternativnu metodu računanja determinante pomoću Laplaceovog razvoja po odabranom retku ili stupcu matrice. Promotrimo za početak determinantu trećeg reda i primijetimo da se ona može zapisati na sljedeći način. Koristeći Sarussovo pravilo dobivamo

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} \\
&= a_{11}(a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}) - a_{12}(a_{21}\,a_{33} - a_{23}\,a_{31}) + a_{13}(a_{21}\,a_{32} - a_{22}\,a_{31}) \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

U jednakosti (4.54) primijetimo sljedeće:

(1) Determinanta trećeg reda je izražena kao suma determinanti drugog reda.

(2) Determinanta koja množi element a_{ij} se dobije brisanjem stupca i retka u kojem se nalazi a_{ij}.

(3) Predznak elementa a_{ij} je $(-1)^{i+j}$.

Ova zapažanja motiviraju sljedeće definiciju.

Definicija 4.7. *Neka je $A = [a_{ij}]$ kvadratna matrica reda n. Neka je M_{ij} kvadratna matrica reda $n-1$ koja se dobije iz A brisanjem i–tog retka i j–tog stupca.*

(i) Minora elementa a_{ij} je determinanta $det(M_{ij})$.

(ii) Algebarski komplement ili kofaktor elementa a_{ij} je skalar $A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$.

Koristeći navedene definicije determinantu trećeg reda možemo zapisati kao

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \tag{4.55}$$

Ovakav zapis determinante nazivamo Laplaceov razvoj po prvom retku. Lako se vidi da se ista determinanta može zapisati kao Laplaceov razvoj po bilo kojem retku ili stupcu matrice. Generalizacije ovog zapažanja daje sljedeći važan rezultat.

Teorem 4.2 (Laplaceov razvoj determinante)**.** *Neka je $A = [a_{ij}]$ kvadratna matrica reda n. Onda se determinanta matrice A može zapisati na sljedeći način:*

(i) Laplaceov razvoj po i–tom retku

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, A_{ij}, \quad 1 \le i \le n, \tag{4.56}$$

(ii) Laplaceov razvoj po j–tom stupcu

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, A_{ij}, \quad 1 \le j \le n. \tag{4.57}$$

Koristeći Laplaceov razvoj možemo lako izračunati determinantu trokutaste ili dijagonalne matrice.

Definicija 4.8. *Kažemo da je kvadratna matrica A gornje (donje) trokutasta ako su svi elementi od A ispod (iznad) dijagonale jednaki nuli.*

Primijetimo da je dijagonalna matrica posebni slučaj gornje, odnosno donje trokutaske matrice. Kao primjer promotrimo gornje trokutastu matricu četvrtog reda

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}. \tag{4.58}$$

Obzirom da prvi stupac ima najviše nula, determinantu je najlakše izračunati Laplaceovim razvojem po prvom stupcu,

$$\det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}. \tag{4.59}$$

Općenito, ako je A gornje ili donje trokutaska matrica n–tog reda, onda je

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}. \tag{4.60}$$

Efektivno računanje determinante

Sada ćemo navesti postupak za efektivno računanje determinate pomoću Laplaceovog razvoja. Postupak kojim se dolazi do konačnog rezultata nije jedinstven, a pametnim odabirom redaka ili stupaca po kojima vršimo Laplaceov razvoj možemo značajno smanjiti broj računskih operacija.

(1) Odaberite element $a_{ij} \neq 0$ ili $a_{ij} = 1$, ako postoji.

(2) Množenjem nekog retka skalarom različitim od nule i dodavanjem nekom drugom retku $k \neq i$ postižemo da su svi elementi u stupcu j jednaki nula osim elementa a_{ij}. Slično, množenjem nekog stupca skalarom različtim od nule i dodavanjem nekom drugom stupcu $k \neq j$ možemo postići da su svi elementi u retku i jednaki nula osim elementa a_{ij}.

(3) Primijenite Laplaceov razvoj determinante na taj redak (odnosno stupac).

(4) Ponovite korake (1)–(3) dok ne dobijete determinantu drugog ili trećeg reda koju lako direktno izračunate.

Primjer 4.3. Izračunajte determinantu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}. \tag{4.61}$$

Odaberimo element $a_{23} = 1$ i koristimo elementarne operacije na retcima matrice kako bi u trećem stupcu postigli da su svi elementi osim a_{23} jednaki nula.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} &\overset{-2R_2+R_1\to R_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \overset{3R_2+R_3\to R_3}{=} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} &\overset{R_2+R_4\to R_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -(-38) = 38 \end{aligned} \tag{4.62}$$

gdje smo zadnju determinantu izračunali Sarussovim pravilom. □

4.5 Regularne matrice

Za svaki realni broj $a \neq 0$ postoji realni broj $a^{-1} = 1/a$ takav da je

$$a\,a^{-1} = a^{-1}\,a = 1. \tag{4.63}$$

Broj a^{-1} nazivamo multiplikativni inverz broja a. U ovom poglavlju ćemo pojam multiplikativnog inverza proširiti na skup kvadratnih matrica. Inverz matrice A, ako postoji, definiramo po analogiji s jednakosti (4.63).

Definicija 4.9. *Kažemo da je kvadratna matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ invertibilna ili regularna ako postoji matrica $X \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je*

$$AX = XA = I \tag{4.64}$$

gdje je I jedinična matrica reda n. Matricu X nazivamo inverz matrice A i označavamo s A^{-1}.

Zbog nekomutativnosti množenja, u definiciji inverzne matrice zahtijevamo da vrijedi $AA^{-1} = I$ i $A^{-1}A = I$, odnosno

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I. \tag{4.65}$$

Ako je A invertibilna matrica, onda iz jednakosti (4.65) odmah slijedi da je

$$(A^{-1})^{-1} = A. \tag{4.66}$$

Primjer 4.4. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.67}$$

Direktnim računom provjerite da matrica

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -7 \end{bmatrix} \tag{4.68}$$

zadovoljava jednakost (4.64), odnosno da je

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.69}$$

i

$$XA = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.70}$$

□

Promotrimo sada pitanje je li svaka kvadratna matrica A ima inverz. Lako se vidi već na primjeru matrica drugog reda da je odgovor na ovo pitanje negativan. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{4.71}$$

matrica nad poljem $\mathbb{F}$. Pretpostavimo da je

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \tag{4.72}$$

inverz matrice A, odnosno da je $AX = XA = I$. Iz uvjeta $AX = I$ dobivamo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cs + dz & cy + dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.73}$$

što implicira da varijable x, y, z i w zadovoljavaju sustav linearnih jednadžbi

$$ax + bz = 1, \quad ay + bw = 0 \tag{4.74}$$

$$cx + dz = 0, \quad cy + dw = 1. \tag{4.75}$$

Ove jednadžbe predstavljaju dva sustava od dvije jednadžbe za varijable x, z i y, w, redom. Rješenje sustava je dano sa

$$x = \frac{d}{ad - bc}, \quad y = \frac{-b}{ad - bc}, \tag{4.76}$$

$$z = \frac{-c}{ad - bc}, \quad w = \frac{a}{ad - bc}. \tag{4.77}$$

Uočavamo da sustav ima rješenje ako i samo ako je $\det(A) = ad - bc \neq 0$. Koristeći rješenja (4.76)–(4.77) lako provjerimo da matrica X zadovoljava

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa + yc & xb + yd \\ za + wc & zb + wd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.78}$$

Zaključujemo da je inverz matrice A dan sa $A^{-1} = X$, odnosno

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & d \end{bmatrix}, \qquad ad - bc \neq 0. \tag{4.79}$$

Odavde slijedi da je matrica drugog reda ima invertibilna ako i samo ako je ispunjen uvjet $\det(A) = ad - bc \neq 0$, stoga je matrica drugog reda regularna ako i samo ako je njezina determinanta različita od nule.

Primjer 4.5. Odredite A^{-1} ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$. Prvo provjerimo uvjet

$$\det(A) = ad - bc = 1 \cdot (-4) - 3 \cdot (-2) = 2 \neq 0. \tag{4.80}$$

Sada prema (4.79) imamo

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{4.81}$$

Promotrimo sada neka osnovna svojstva regularnih matrica.

Lema 4.1. *Inverz kvadratne matrice, ako postoji, je jedinstven.*

Dokaz Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Pretpostavimo da su $X, Y \in M_n(\mathbb{F})$ inverzi matrice A. Onda X i Y zadovoljavaju

$$AX = XA = I \quad \text{i} \quad AY = YA = I. \tag{4.82}$$

Sada zbog asocijativnosti množenja imamo

$$X = XI = X(AY) = (XA)Y = IY = Y. \tag{4.83}$$

■

Lema 4.2. *Ako su A i B invertibilne matrice istog reda, onda je AB invertibilna matrica i vrijedi*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \tag{4.84}$$

Dokaz Neka je $X = B^{-1}A^{-1}$. Onda je

$$X(AB) = (B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I, \tag{4.85}$$

$$(AB)X = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I. \tag{4.86}$$

Iz definicije inverzne matrice slijedi da je $X = (AB)^{-1}$, odosno $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$.
■

Općenito, ako su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ invertibilne matrice istog reda, onda vrijedi

$$(A_1 A_2 \ldots A_n)^{-1} = A_n^{-1} A_{n-1}^{-1} \ldots A_1^{-1}. \tag{4.87}$$

Lema 4.3. *Ako je A regularna matrica, onda je $det(A) \neq 0$ i vrijedi*

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}. \tag{4.88}$$

Dokaz Ako je A regularna matrica, onda postoji matrica A^{-1} istoga reda takva da je $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Prema Binet–Cauchyevom teoremu imamo

$$\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = 1 \tag{4.89}$$

jer je $\det(I) = 1$. Ova jednakost implicira da je $\det(A) \neq 0$ i $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.
■

Dakle, $\det(A) \neq 0$ je nužan uvjet da je matrica A regularna. Kasnije ćemo vidjeti da je ovaj uvjet također dovoljan.
Sada ćemo se pozabaviti pitanjem kako se može eksplicitno izračunati inverz kvadratne matrice proizvoljnog reda. Za tu svrhu nam je potreban pojam adjunkte matrice.

Definicija 4.10. *Neka je $A = [a_{ij}]$ kvadratna matrica reda n i neka je $[A_{ij}]$ matrica kofatora elemenata a_{ij}. Adjunkta matrice A, u oznaci $\tilde{A}$, je transponirana matrica matrice kofaktora $[A_{ij}]$, odnosno*

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{bmatrix}. \tag{4.90}$$

Primjer 4.6. Odredite adjunktu matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \tag{4.91}$$

Kofaktori elemenata su dani sa

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\det([d]) = d, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\det([c]) = -c, \tag{4.92}$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}\det([b]) = -b, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\det([a]) = a. \tag{4.93}$$

Stoga je adjunkta matrice A jednaka

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{4.94}$$

□

Ako usporedimo izraz (4.94) s izrazom (4.79), onda inverz matrice A možemo zapisati kao

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A} \quad \text{ako je} \quad \det(A) \neq 0. \tag{4.95}$$

Pokažimo sada da ovaj rezultat vrijedi za regularnu kvadratnu matricu proizvoljnog reda.

Teorem 4.3. *Za svaki kvadratnu matricu A vrijedi*

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = det(A)I. \tag{4.96}$$

Ako je $det(A) \neq 0$, onda je

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\tilde{A}. \tag{4.97}$$

Dokaz Neka je $A = [a_{ij}]$ kvadratna matrica reda n i neka je A_{ij} kofaktor elementa a_{ij}. Pokažimo da je

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \det(A), & i = j. \end{cases} \tag{4.98}$$

Pretpostavimo da je $i \neq j$. Neka je matrica B dobivena iz matrice A tako da u redak j zamijenimo retkom i, dok su ostali retci nepromijenjeni. Tada matrica B ima oblik

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i2} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{4.99}$$

jer su retci i i j jednaki. Elemente matrice B možemo zapisati kao

$$b_{kl} = a_{kl} \text{ ako je } k \neq j \quad \text{i} \quad b_{jl} = a_{il}. \tag{4.100}$$

Laplaceov razvoj determinante od B po j–tom retku daje

$$\det(B) = \sum_{l=1}^{n} b_{jl}\, B_{jl} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}\, A_{jl} = 0 \tag{4.101}$$

jer B ima dva jednaka retka. Ovdje su algebarski komplementi B_{jl} i A_{jl} jednaki jer se oni računaju brisanjem j–tog retka i l–tog stupca pa je nevažno koji se elementi nalaze u j–tom retku. S druge strane, Laplaceov razvoj $\det(A)$ po j–tom retku daje

$$\sum_{l=1}^{n} a_{jl}\, A_{jl} = \det(A). \tag{4.102}$$

Jednakosti (4.101) i (4.102) možemo zajedno napisati u obliku

$$\sum_{l=1}^{n} a_{il}\, A_{jl} = \det(A)\, \delta_{ij} \tag{4.103}$$

gdje je δ_{ij} Kroneckerov delta simbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{4.104}$$

Sada iz (4.103) slijedi da je element matrice $A\tilde{A}$ na mjesti (i, j) jednak

$$(A\tilde{A})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, (\tilde{A})_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, A_{jk} = \det(A)\, \delta_{ij}. \tag{4.105}$$

Jedinična matrica I na mjestu (i, j) ima element δ_{ij} pa iz gornje jednakosti slijedi da je

$$A\tilde{A} = \det(A)I. \tag{4.106}$$

Na sličan način se pokaže da je $\tilde{A}A = \det(A)I$ koristeći Laplaceov razvoj determinante po stupcima matrice A. Time smo pokazali da je

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A)I. \tag{4.107}$$

Ako je $\det(A) \neq 0$, onda se gornja jednakost može zapisati kao

$$A\left(\frac{1}{\det(A)}\tilde{A}\right) = \left(\frac{1}{\det(A)}\tilde{A}\right)A = I \tag{4.108}$$

odakle slijedi da je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}. \tag{4.109}$$

■

Ovaj teorem pokazuje da je $\det(A) \neq 0$ nužan i dovoljan uvjet za regularnost matrice A.

Korolar 4.4. *Kvadratna matrica A je regularna ako i samo i ako je $det(A) \neq 0$.*

Dokaz Ako je A regularna matrica, onda postoji matrica A^{-1} takva da je $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ pa iz Binet–Cauchyevog teorema slijedi da je $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$. Ovo implicira $\det(A) \neq 0$. Obrnuto, ako je $\det(A) \neq 0$, onda iz prethodnog teorema slijedi da je A regularna matrica jer je njezin inverz dan sa $A^{-1} = \tilde{A}/\det(A)$. ■

Na kraju istaknimo da je regularnost kvadratne matrice povezan s rangom matrice na sljedeći način.

Propozicija 4.8. *Neka je A kvadratna matrica reda n. Ako je $r(A) = n$, onda je A regularna matrica.*

Dokaz Pretpostavimo da je rang matrice $A \in M_n(\mathbb{F})$ jednak n. Onda se A može konačnim brojem elementarnih transformacija prevesti na jediničnu matricu reda n. Dakle, A je ekvivalentna jediničnoj matrici I, $A \sim I$. Iz ovisnosti determinante o elementarnim transformacijama slijedi da $A \sim I$ implicira $\det(A) = c \det(I) = c$ za neki $c \neq 0$. Odavde zaključujemo da je $\det(A) \neq 0$ što povlači da je A regularna matrica. $\blacksquare$

Poglavlje 5

Sustavi linearnih jednadžbi

Rješavanje sustava linearnih jednadžbi susrećemo u različitim primjenama. Stoga je korisno pročiti osnovna svojstva i metode rješavanja ovih sustava jednadžbi.

Sustav od m linearih jednadži sa n nepoznanica $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je sustav oblika

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1, \tag{5.1}$$
$$a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n = b_2,$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n = b_m. \tag{5.2}$$

Skalare a_{ij} nazivamo koeficijenti sustava, a skalare b_i nazivamo slobodni koeficijenti. Sustav (5.1)–(5.2) kraće pišemo u obliku

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\,x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{5.3}$$

Rješenje sustava je svaka uređena n–torka brojeva $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ koja zadovoljava sustav.

U rješavanju sustava linearnih jednadžbi značajnu ulogu ima matrični račun koji nam omogućava da sustav jednadžbi (5.1)–(5.2) promatramo kao matričnu jednadžbu u čijem proučavanju možemo primijeniti teoriju linearnih operatora. Definirajmo prvo osnovne pojmove koje ćemo koristiti u daljenjem izlaganju.

Matrica sustava (5.1)–(5.2) je matrica koeficijenata sustava

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Matrica nepoznanica je stupčana matrica

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \tag{5.5}$$

a matrica slobodnih koeficijenata je stupčana matrica

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{5.6}$$

Sustav linearnih jednadžbi možemo zapisati kao matričnu jednadžbu

$$AX = B. \tag{5.7}$$

Proširena matrica sustava, u oznaci A_p, se dobije kada matrici A zdesna dopišemo stupac B što simbolički pišemo kao

$$A_p = [A \mid B]. \tag{5.8}$$

Osnovni problemi koji nas zanimaju o sustavima linearih jednadžbi su

(a) egistencija rješenja (pod kojim uvjetima sustav ima rješenje),

(b) struktura rješenja (koliko rješenja ima sustav),

(c) efektivno rješanje sustava (efikasni algoritmi za pronalaženje rješenja).

Razmotrimo nekoliko jednostavnih primjera.

(1) Sustav

$$x + 2y = 1, \quad 2x + 3y = -2 \tag{5.9}$$

ima jedinstveno rješenje $x = -7, y = 4$. Ove dvije jednadžbe možemo geometrijski interpretirati kao dva pravca koja se sijeku u točki $(-7, 4)$.

(2) Sustav

$$x + 2y = 2, \quad -2x - 4y = 1 \tag{5.10}$$

nema rješenja jer ove jednadžbe predstavljaju dva paralelna prava koja se ne sijeku.

(3) Sustav

$$x + 3y = 5, \quad -2x - 6y = -10 \tag{5.11}$$

ima beskonačno mnogo rješenja. Ako drugu jednadžbu podijelimo s -2, onda vidimo da ovaj sustav predstavlja dva pravca koja leže jedan na drugom i sijeku se u beskonačno mnogo točaka. U tom slučaju rješenje sustava možemo zapisati kao

$$x = -3y + 5, \quad y \in \mathbb{R} \tag{5.12}$$

gdje je y tzv. parametar koji može biti proizvoljni realni broj.

Promatranje ovih jednostavnih primjera nam ukazuje da se kod rješavanja linearnih sustava susreću različite mogućnosti. Naš zadatak je istražiti kako rješenje sustava ovisi o koeficijentima i slobodnim koeficijentima sustava te o broju jednadžbi i nepoznanica. U tim razmatrnjima ćemo se pomoći teorijom operatora.

Neka je $M_{n1}(\mathbb{F})$ vektorski prostor stupčanih matrica

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad a_i \in \mathbb{F}. \tag{5.13}$$

Znamo da je kanonska baza prostora $M_{n1}(\mathbb{F})$ dana vektorima

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{5.14}$$

Matrici $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ možemo pridružiti operator

$$T_A \colon M_{n1}(\mathbb{F}) \to M_{m1}(\mathbb{F}) \quad \text{definiran sa} \quad T_A(X) = AX. \tag{5.15}$$

Primijetimo da je A matrica operatora T_A u paru kanonskih baza prostora $M_{n1}(\mathbb{F})$ i $M_{m1}(\mathbb{F})$. Stoga linearni sustav jednadžbi $AX = B$ možemo interpretirati kao operatorsku jednadžbu $T_A(X) = B$. Ovaj sustav ima rješenje ako i samo ako se vektor B nalazi u slici operatora T_A, odnosno ako je $B \in Im(T_A)$. Slika operatora T_A je podprostor od $M_{m1}(\mathbb{F})$ razapet vektorima $T_A(e_1), T_A(e_2), \ldots, T_A(e_n)$,

$$Im(T_A) = \operatorname{span}_{\mathbb{F}}\big\{T_A(e_1), T_A(e_2), \ldots, T_A(e_n)\big\}. \tag{5.16}$$

Dakle, $B \in Im(T_A)$ ako i samo ako postoje skalari $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ takvi da je

$$B = \sum_{k=1}^{n} c_k \, T_A(e_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k \, Ae_k = \sum_{k=1}^{n} c_k \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}. \tag{5.17}$$

Odavde slijedi da sustav ima rjevšenje ako i samo ako je posljednji stupac proširene matrice $A_p = [A \mid B]$ linearna kombinacija stupaca matrice A. Ovo implicira da A i A_p imaju jednaki maksimalni broj linearno nezavisnih stupaca, odnosno $r(A) = r(A_p)$. Ovaj zaključak daje osnovno teorem o egistenziji rješenja linearnog sustava.

Teorem 5.1 (Kronecker–Capelli). *Linearni sustav jednadžbi $AX = B$ ima rješenje ako i samo ako matrica sustava A i proširena matrica sustava $A_p = [A \mid B]$ imaju isti rang.*

Odavde odmah slijedi

Korolar 5.1. *Ako je rang matrice sustava jednak broju jednadžbi, onda je sustav rješiv.*

Dokaz Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ matrica sustava od m jednadžbi u n nepoznanica i neka je $r(A) = m$. Proširena matrica sustava $A_p = [A \mid B]$ se dobiva dodavanjem stupca matrici A pa se broj linearno nezavisnih redaka ne mijenja. Stoga je $r(A_p) = r(A)$ pa Kronecker–Capellijev teorem implicira da sustav ima rješenje. ■

5.1 Cramerov sustav

Jedan od najjednostavnihih sustava linearnih jednadžbi je Cramerov sustav.

Definicija 5.1. *Kažemo da je $AX = B$ Cramerov sustav ako je*

(i) *A je kvadratna matrica reda n,*

(ii) $r(A) = n$.

Uočimo sljedeće:

(1) A je kvadratna matrica pa je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica,

(2) $r(A) = n$ što implicira da je A regularna matrica.

Prema korolaru 5.1 Cramerov sustav je rješiv i ima jedinstveno rješenje $X = A^{-1}B$. Rješenje se u principu može dobiti invertiranjem matrice A, međutim u praksi se takav sustav rješava drukčijim metodama. Ovdje ćemo bez dokaza opisati postupak za efektivno rješavanje Cramerovog sustava.

Neka je $AX = B$ Cramerov sustav gdje su

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{5.18}$$

Neka je $D = \det(A)$ i neka je D_k determinanta matrice koja se dobije tako da se k–ti stupac matrice A zamijeni stupcem slobodnih koeficijenata,

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{5.19}$$

Onda je rješenje Cramerovog sustava dano sa

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{5.20}$$

Primjer 5.1. Odredite rješenje sustava jednadžbi

$$2x - 3y + 5z = 1, \tag{5.21}$$

$$x + 2y - 2z = 2, \tag{5.22}$$

$$3x - y - z = 3. \tag{5.23}$$

Determinanta matrice sustava je

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -28. \tag{5.24}$$

Nadalje,

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -32, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -12, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0. \tag{5.25}$$

Stoga je rješenje sustava dano sa

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{8}{7}, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{3}{7}, \quad z = \frac{D_3}{D} = 0. \tag{5.26}$$

□

5.2 Homogeni sustavi jednadžbi

Definicija 5.2. *Za sustav linearnih jednadžbi kažemo da je homogen ako su svi slobodni koeficijenti sustava jednaki nuli.*

Homogeni sustav liearnih jednadžbi ima oblik

$$AX = 0 \quad \text{gdje je} \quad A \in M_{mn}(\mathbb{F}). \tag{5.27}$$

Primijetimo da homogeni sustav uvijek ima trivijalno rješenje $X = 0$. Zanima nas pod kojim uvjetima sustav ima i netrivijalna rješenja. Neka je $T_A \colon M_{n1}(\mathbb{F}) \to M_{m1}(\mathbb{F})$, $T_A(X) = AX$, linearni operator pridružen matrici A. Onda je

$$AX = 0 \quad \text{ako i samo ako je} \quad X \in \ker(T_A). \tag{5.28}$$

Sljedeći teorem nam kazuje da postojanje netrivijalnih rješenja homogenog sustava ovisi o rangu matrice A.

Teorem 5.2. *Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Homogeni sustav $AX = 0$ ima*

(i) samo trivijalno rješenje ako i samo ako je $r(A) = n$,

(ii) netrivijalna rješenja ako i samo ako je $r(A) < n$.

Dokaz Neka je $T_A \colon M_{n1}(\mathbb{F}) \to M_{m1}(\mathbb{F})$ linearni operator $T_A(X) = AX$. Prema teoremu o rangu i defektu imamo

$$n = \dim \ker(T_A) + \dim \operatorname{Im}(T_A). \tag{5.29}$$

Budući da je $\dim \operatorname{Im}(T_A) = r(A)$ gdje je $r(A)$ rang matrice A, iz (5.29) slijedi

$$r(A) = n - \dim \ker(T_A). \tag{5.30}$$

Sada iz jednakosti (5.30) zaključujemo da sustav $AX = 0$ ima

(i) samo trivijalno rješenje ako i samo ako je $\ker(T_A) = \{\mathbf{0}\}$, odnosno ako i samo ako je $r(A) = n$ (jer je dimenzija trivijalnog podprostora $\{\mathbf{0}\}$ jednaka nuli),

(ii) netrivijalna rješenja ako i samo ako je $\dim \ker(T_A) > 0$, odnosno ako i samo ako je $r(A) < n$.

■

Korolar 5.2. *Homogeni sustav $AX = 0$ kod kojeg je broj jednadžbi manji od broja nepoznantica ima uvijek netrivijalna rješenja.*

Dokaz Neka je A matrica tipa (m, n) gdje je $m < n$. Onda je $r(A) \leq m < n$ pa prema prethodnom teoremu homogenu sustav $AX = 0$ ima netrivijalna rješenja. ■

Korolar 5.3 (Rouche)**.** *Homogeni sustav $AX = 0$ kod kojeg je broj jednadžbi jednak broju nepoznanica ima netrivijalna rješenja ako i samo ako je $det(A) = 0$.*

Dokaz Neka je A kvadratna matrica reda n. Prema teoremu 5.2 sustav $AX = 0$ ima netrivijlano rješenje ako i samo ako je $r(A) < n$, odnosno ako i samo ako je A singularna matrica što je ekvivalentno sa $\det(A) = 0$. ■

Primjer 5.2. Zadan je sustav jednadžbi

$$x + 2y - 3z = 0, \tag{5.31}$$

$$2x + 5y + 2z = 0, \tag{5.32}$$

$$3x - y - 4z = 0. \tag{5.33}$$

Matrica sustava je dana

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{bmatrix}. \tag{5.34}$$

Kako je $\det(A) = 61 \neq 0$, iz Rocheovog teorema slijedi da sustav ima samo trivijalno rješenja $x = y = z = 0$. □

5.3 Struktura rješenja linearnog sustava jednadžbi

Promotrimo sada strukturu rješenja linearnog sustava m jednadžbi sa n nepoznanica,

$$AX = B, \quad A \in M_{mn}(\mathbb{F}). \tag{5.35}$$

Za početak proučimo homogeni sustav koji ima netrivijalna rješenja,

$$AX = 0 \quad \text{gdje je} \quad r(A) < n. \tag{5.36}$$

U tom slučaju je jezgra operatora $T_A \colon M_{n1}(\mathbb{F}) \to M_{m1}(\mathbb{F})$, $T_A(X) = AX$, netrivijalni podprostor od $M_{n1}(\mathbb{F})$. Iz jednakosti (5.30) slijedi da je dimenzija jezgre operatora T_A jednaka

$$d = n - r(A) > 0. \tag{5.37}$$

Stoga jezgra operatora T_A ima d linearno nezavisnih vektora $X_1, X_2, \dots, X_d \in M_{n1}(\mathbb{F})$, $X_i \neq \mathbf{0}$. Rješenja $X_1, X_2, \dots, X_d$ nazivamo *fundamentalnim rješenjima* sustava $AX = 0$. Svako rješenje homogenog sustava $AX = 0$ se može prikazati kao linearna kombinacija

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_d X_d \tag{5.38}$$

jer je $X \in \ker T_A$. Linearnu kombinaciju (5.38) nazivamo *opće rješenje* homogenog sustava $AX = 0$. Ovdje su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d \in \mathbb{F}$ proizvoljni skalari koje nazivamo *parametri rješenja*. Ova zapažanja možemo formulirati kao sljedeći teorem.

Teorem 5.3. *Homogeni sustav $AX = 0$ gdje je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$ ima $d = n - r(A)$ linearno nezavisnih (fundamentalnih) rješenja. Svako rješenje sutava se može napisati kao linearna kombinacija fundamentalnih rješenja.*

U ovom teoremu je obuhvaćen i slučaj kada je $r(A) = n$ jer tada $d = 0$ pa sustav nema netrivijalnih rješenja.

Sada nas zanima što možemo kazati o strukturi rješenja nehomogenog sustava

$$AX = B, \quad B \neq 0 \tag{5.39}$$

gdje je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Sustavu (5.39) možemo pridružiti homogeni sustav $AX = 0$. Pretpostavimo da je sustav (5.39) rješiv, odnosno da je $r(A) = r([A \mid B])$. Pretpostavimo da je X_0 bilo koje rješenje nehomogenog sustava, $AX_0 = B$. Ako je X bilo koje drugo rješenje sustava $AX = B$, onda je

$$A(X - X_0) = AX - AX_0 = B - B = 0 \tag{5.40}$$

što implicira da je $X - X_0$ rješenje pripadnog homogenog sustava. Svako rješenje homogenog sustava je linearna kombinacija fundamentalnih rješenja $X_1, X_2, \ldots, X_d$ gdje je $d = n - r(A)$ pa odavde slijedi da je

$$X = X_0 + \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_d X_d, \quad \lambda_i \in \mathbb{F}. \tag{5.41}$$

Rješenje X_0 nazivamo *partikularno* rješenje, a izraz (5.41) nazivamo *opće rješenje* sustava $AX = B$. Time smo dokazali teorem o strukturi rješenja nehomogenog sustava.

Teorem 5.4. *Opće rješenje rješivog nehomogenog sustava $AX = B$ je zbroj partikularnog rješenja i općeg rješenja homogenog sustava $AX = 0$.*

5.4 Gaussova metoda

U ovom odjeljku ćemo ukratko opisati *Gaussovu metodu* za rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Ona se sastoji u tome da se zadani sustav elementarnim transformacijama svede na jednostavniji ekvivalentni sustav jednadžbi čije se rješenje lako odredi. Kažemo da su dva sustava jednadžbi *ekvivalentna* ako imaju isti skup rješenja. Elementarne transformacije koje pritom koristimo su:

(i) zamjena dva retka u jednadžbi,

(ii) množenje retka skalarom različitim od nule,

(iii) pribrajanje nekom retku drugog retka pomnoženog skalarom različitim od nule.

Tijekom ovog postupka dovoljno je ispisati samo koeficijente jednadžbe pa se cijeli postupak može prikazati elementarnim transformacijama na retcima proširene matrice sustava $A_p = [A \mid B]$. Ako je sustav homogen, tj. $B = 0$, onda je dovoljno ispisati samo koeficijente matrice A. Ispisivanjem samo koeficijenata jednadžbe olakšavamo postupak rješavanja.

Primjer 5.3. Odredite opće rješenje homogenog sustava

$$2x + 4y - 5z + 3t = 0, \tag{5.42}$$
$$3x + 6y - 7z + 4t = 0, \tag{5.43}$$
$$5x + 10y - 11z + 6t = 0. \tag{5.44}$$

Prema teoremu 5.2 ovaj sustav ima netrivijalna rješenja jer je broj jednadžbi manji od broja nepoznanica. Neka su R_1, R_2 i R_3 retci matrice sustava, redom. Elementarnim transformacijama na R_1, R_2 i R_3 možemo matricu sustava svesti na gornje trokutasti oblik.

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 & 3 \\ 3 & 5 & -7 & 4 \\ 5 & 10 & -11 & 5 \end{bmatrix} \overset{-3R_1+2R_2\to R_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -6 & -12 & 15 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & 10 & -11 & 6 \end{bmatrix} \overset{R_1+R_3\to R_3}{\longrightarrow} \\
&\begin{bmatrix} -6 & -12 & 15 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \overset{R_1-6R_3\to R_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -6 & -12 & 15 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{3}R_1}{\longrightarrow} \\
&\begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & -9 \end{bmatrix} \overset{-9R_2+R_3\to R_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -2 & -4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Dakle, početni sustav je ekvivalentan sustavu

$$-2x - 4y + 5z - 3t = 0, \tag{5.46}$$
$$z - t = 0. \tag{5.47}$$

Iz jednadžbe (5.47) slijedi $z = t$ pa iz jednadžbe (5.46) dobivamo

$$-2x - 4y + 2t = 0. \tag{5.48}$$

Stoga varijablu x možemo izraziti kao funkciju varijabli y i t pa rješenje sustava pišemo u obliku

$$x = -2y + t, \quad z = t, \quad y,\, t \in \mathbb{R}. \tag{5.49}$$

gdje su y i t slobodne varijable, odnosno parametri rješenja. Primijetimo da varijablu y možemo izraziti kao funkciju varijabli x i t čime dobivamo ekvivalentni oblik rješenja

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}t, \quad z = t, \quad x,\, t \in \mathbb{R}. \tag{5.50}$$

Sva rješenja dobivena na ovaj način su ekvialentna jer opisuju sva moguća rješenja početnog sustava. Ako odaberemo oblik (5.49), onda je opće rješenje sustava dano sa

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-2y \\ y \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y,\, t \in \mathbb{R}. \tag{5.51}$$

Vektori

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.52}$$

su fundamentalna rješenja homogenog sustava, a varijable y i t su proizvoljni parametri. Dakle, opće rješenje ima oblik $X = tX_1 + yX_2$ gdje su $t, y \in \mathbb{R}$. Primijetimo da su X_1 i X_2 linearno nezavisni vektori koji tvore bazu jezgre operatora $T_A \colon M_{41}(\mathbb{F}) \to M_{31}(\mathbb{F})$ definiranog sa $T_A(X) = AX$. □

Primjer 5.4. Odredite opće rješenje sustava

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5, \tag{5.53}$$

$$2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 3, \tag{5.54}$$

$$3x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 1. \tag{5.55}$$

Elementarnim transformacijma na retcima proširene matrice sustava dobivamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & -14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.56}$$

Odavde dobivamo ekvivalentni sustav jednadžbi

$$x_1 + x_2 - 10x_4 = -9, \tag{5.57}$$

$$x_3 - 7x_4 = -7, \tag{5.58}$$

odnosno

$$x_1 = -9 - x_2 + 10x_4, \tag{5.59}$$

$$x_3 = -7 + 7x_4 \tag{5.60}$$

gdje su x_2 i x_4 slobodne varijable. Opće rješenje sustava je dano sa

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 - x_2 + 10x_4 \\ x_2 \\ -7 + 7x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.61}$$

pri čemu je

$$X_0 = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.62}$$

partikularno rješenje, a

$$X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.63}$$

su fundamentalna rješenja pripadnog homogenog sustava. $\square$

Poglavlje 6

Matrična reprezentacija linearnog operatora

6.1 Koordinate u vektorskom prostoru

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza od V. Svaki vektor $v \in V$ ima jedinstveni prikaz kao

$$v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n \tag{6.1}$$

za neke skalare $\alpha_i \in \mathbb{F}$. Skalare $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nazivamo koordinate vektora v u bazi B, a stupac matricu

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

nazivamo koordinatna matrica vektora v u bazi B. Važno je naglasiti da koordinatni prikaz vektora v ovisi o izboru baze, stoga isti vektor v ima različite koordinatne matrice u različitim bazama od V. Funkcije $\lambda_i \colon V \to \mathbb{F}$ definirane sa $\lambda_i(v) = \alpha_i$, $1 \leq i \leq n$, nazivamo koordinatne funkcije. Očigledno je da su koordinatne funkcije linearna preslikavanja iz prostora V u polje skalara $\mathbb{F}$ pa je λ_i element dualnog prostora V^*.

Promotrimo kako izgledaju koordinatne matrice vektora baze $e_1, e_2, \ldots, e_n$ u bazi B. Imamo

$$e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \cdots + 0 \cdot e_n, \tag{6.3}$$

$$e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + \cdots + 0 \cdot e_n, \tag{6.4}$$

$$\vdots$$

$$e_n = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \cdots + 1 \cdot e_n, \tag{6.5}$$

stoga je

$$[e_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [e_2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots \quad [e_n] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{6.6}$$

Obzirom da u vektorskom prostoru V možemo birati različite baze, zanima nas kako se mijenja kooridnatni prikaz vektora $v \in V$ ako promijenimo bazu od V. Pretpostavimo da je $B' = \{e_1', e_2', \ldots, e_n'\}$ neka druga baza prostora V. Vektor e_k' u polaznoj bazi B ima prikaz

$$e_k' = \beta_{1k} e_1 + \beta_{2k} e_2 + \cdots + \beta_{nk} e_n \tag{6.7}$$

za neke skalare $\beta_{ij} \in \mathbb{F}$. Koordinatna matrica vektora e_k' u bazi B je dana sa

$$[e_k']_B = \begin{bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \\ \vdots \\ \beta_{nk} \end{bmatrix}. \tag{6.8}$$

Definirajmo matricu

$$P = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \ldots & \beta_{nn} \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

gdje su stupci matrice P koordinate vektora $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ u bazi B. Vektori $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ su linearno nezavisni što povlači da matrica P ima n linearno nezavisnih stupaca. Stoga je rang matrice $r(P) = n$ pa je P regularna matrica.

Definicija 6.1. *Matricu P nazivamo matrica prijelaza iz baze B u bazu B'.*

Matrica prijelaza P se tvori tako da se vektori nove baze B' izraze kao linearna kombinacija vektora polazne baze B i dobiveni koeficijenti u linearnoj kombinaciji se posložе u stupce matrice P. Poznavajući matricu prijelaza možemo lako odrediti koordinate vektora u novoj bazi.

Teorem 6.1. *Neka su $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ i $B' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ baze prostora V i neka su $[v]_B$ i $[v]_{B'}$ koordinatne matrice vektora $v \in V$. Ako je P matrica prijelaza iz baze B u bazu B', onda je*

$$P[v]_{B'} = [v]_B \quad i \quad P^{-1}[v]_B = [v]_{B'}. \tag{6.10}$$

Dokaz Neka je $v \in V$. Vektor v ima prikaza u bazama B i B' kao

$$v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, e_k, \tag{6.11}$$

$$v = \sum_{k=1}^{n} \alpha'_k \, e'_k \tag{6.12}$$

za neke skalare $\alpha_k, \alpha'_k \in \mathbb{F}$, $1 \leq k \leq n$. Ako je $P = [\beta_{ij}]$ matrica prijelaza iz baze B u bazu B', onda je vektor e'_k u bazi B dan sa

$$e'_k = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ik} \, e_i \tag{6.13}$$

Supstitucijom izraza (6.13) u (6.12) dobivamo

$$v = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_{ik} \, e_i \Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} \alpha'_k \Big) e_i. \tag{6.14}$$

Usporedbom jednakosti (6.14) i (6.11) zaključujemo da je $\alpha_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} \alpha'_k$. U matričnom obliku imamo

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix}, \tag{6.15}$$

što povlači da je $[v]_B = P[v]_{B'}$. Budući je P regularna matrica, slijedi da je $P^{-1}[v]_B = [v]_{B'}$. ■

Primijetimo da zapravo matrica P^{-1} prevodi koordinate vektora v iz baze B u bazu B' iako se P naziva matrica prijelaza iz baze B u bazu B'.

Primjer 6.1. Neka su $B = \{(1,0),(0,1)\}$ i $B' = \{(1,2),(3,5)\}$ dvije baze Euklidskog prostora $\mathbb{R}^2$. Ako vektor v ima prikaz u bazi B'

$$[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \tag{6.16}$$

odredite prikaz vektora v u standardnoj bazi B. Ovaj problem možemo riješiti na dva načina: direktno i pomoću matrice prijelaza P iz baze B u bazu B'. Odredimo matricu prijelaza P. Uvedimo oznake

$$e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1), \quad e'_1 = (1,2),\ e'_2 = (3,5). \tag{6.17}$$

Onda je

$$e'_1 = 1e_1 + 2e_2, \quad e'_2 = 3e_1 + 5e_2 \tag{6.18}$$

pa je matrica prijelaza dana sa

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}. \tag{6.19}$$

Prema teoremu 6.1 imamo

$$[v]_B = P[v]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}. \tag{6.20}$$

Ovaj rezultat možemo direktno provjeriti jer iz (6.16) sijedi da je

$$v = -1e'_1 + 2e'_2 = -1 \cdot (1,2) + 2 \cdot (3,5) = (5,8) = 5e_1 + 8e_2. \tag{6.21}$$

Stoga je

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} \tag{6.22}$$

što se slaže s jednakosti (6.20). $\square$

6.2 Matrični prikaz operatora

Neka su U i V vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$ s bazama $A = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ i $B = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ redom. Općenito pretpostavljamo da U i V nemaju istu dimenziju, odnosno $n \neq m$. Linearnom operatoru $T\colon U \to V$ možemo pridružiti matricu $[T]_{(A,B)}$ u paru baza (A, B) pomoću koje možemo odrediti kao operator T djeluje na vektore iz prostora V. Prikaz operatora pomoću matrice je od velike praktične i teorijske vrijednosti jer se iz matrice mogu lako vidjeti mnoga svojstva operatora.

Operator $T\colon U \to V$ je jedinstveno određen djelovanjem na vektore baze $e_k \in U$. Vektor $T(e_k) \in V$ možemo napisati kao jedinstvenu linearnu kombinaciju vektora iz baze B,

$$T(e_k) = \alpha_{1k} f_1 + \alpha_{2k} f_2 + \cdots + \alpha_{mk} f_m \tag{6.23}$$

za neke skalare $\alpha_{ij} \in \mathbb{F}$.

Definicija 6.2. *Matrica*

$$[T]_{(A,B)} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \tag{6.24}$$

se naziva matrica operatora T u paru baza (A, B).

Ako podrazumijevamo o kojim se bazama radi, onda matricu operatora možemo označiti s $[T]$. Primijetimo da matricu operatora T tvorimo tako da kooridate vektora $T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n)$ posložimo u stupce matrice $[T]_{(A,B)}$.

Primjer 6.2. Neka su $A = \{1, x, x^2\}$ i $B = \{1, x-1, x^2-x, x^3-x^2\}$ baze prostora polinoma $\mathcal{P}_2$ i $\mathcal{P}_3$ redom. Odredite matrični prikaz operatora množenja $T\colon \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$, $T(p(x)) = x\,p(x)$, u paru baza (A, B).

Polinome $T(1)$, $T(x)$ i $T(x^2)$ je potrebno napisati kao linearne kombinacije vektora iz baze B. Imamo

$$T(1) = x = 1 + (x-1) + 0\cdot(x^2-x) + 0\cdot(x^2-x^2), \tag{6.25}$$

$$T(x) = x^2 = 1 + (x-1) + (x^2-x) + 0\cdot(x^3-x^2), \tag{6.26}$$

$$T(x^2) = x^3 = 1 + (x-1) + (x^2-x) + (x^3-x^2), \tag{6.27}$$

pa je matrica operatora dana sa

$$[T]_{(A,B)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.28}$$

□

Ako poznajemo matricu operatora $T\colon U \to V$, možemo lako odrediti kako T djeluje na vektore iz prostora V jer se djelovanje operatora prikazuje pomoću matričnog množenja.

Teorem 6.2. *Neka je $T\colon U \to V$ linearni operator i neka su A i B baze prostora U i V, redom. Onda je*

$$[T(u)]_B = [T]_{(A,B)}\,[u]_A \tag{6.29}$$

za svaki vektor $u \in U$.

Prema ovom teoremu, koordinatna matrica vektora $T(u)$ je jednaka umnošku matrice operatora T i kooridnatne matrice vektora u.

Dokaz Neka su $A = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ i $B = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ baze prostora U i V redom. Neka je $[T]_{(A,B)} = [\alpha_{ij}]$ matrica operatora T u paru baza (A, B). Onda je

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} f_i, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.30}$$

Ako je $u = \sum_{k=1}^{n} c_k\, e_k \in U$, iz linearnosti operatora T slijedi

$$T(u) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, T(e_k) = \sum_{k=1}^{k} c_k \Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} f_i \Big) = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} c_k \Big) f_i. \tag{6.31}$$

Ovo povlači da je koordinatna matrica vektora $T(u)$ u bazi B dana sa

$$[T(u)]_B = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{1k} c_k \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_{2k} c_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_{mk} c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = [T]_{(A,B)} [u]_A. \tag{6.32}$$

■

Primjer 6.3. Neka je $D\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ operator deriviranja $D(p(x)) = p'(x)$. Odredite koordinatnu matricu polinoma $D(p(x))$ gdje je $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ u standarnoj bazi $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ tako da odredite matricu operatora $[D]_{(B,B)}$.

Imamo

$$D(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3, \tag{6.33}$$
$$D(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3, \tag{6.34}$$
$$D(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3, \tag{6.35}$$
$$D(x^3) = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^3 + 0 \cdot x^3, \tag{6.36}$$

stoga je matrica operatora D u paru baza (B, B) dana sa

$$[D]_{(B,B)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.37}$$

Sada je

$$[D(p(x))]_B = [D]_{(B,B)} [p(x)]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2c \\ 3d \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6.38}$$

Odavde slijedi da je $D(p(x)) = b + 2cx + 3dx^2$ što je, naravno, derivacija polinoma $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. $\square$

Promotrimo sada kako se računaju matrice zbroja operatora $T + S$ i umnožka operatora skalarom λT.

Teorem 6.3. *Neka su U i V vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$ i neka su $T, S\colon U \to V$ linearni operatori. Neka su A i B baze prostora U i V redom. Onda vrijedi*

(i) $[T + S]_{(A,B)} = [T]_{(A,B)} + [S]_{(A,B)}$,

(ii) $[\lambda T]_{(A,B)} = \lambda [T]_{(A,B)}, \quad \lambda \in F.$

Dokaz (i) Neka je $A = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza od U i neka je $B = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ baza od V. Neka su $[T]_{(A,B)} = [\alpha_{ij}]$ i $[S]_{(A,B)} = [\beta_{ij}]$ matrice operatora T i S u zadanim bazama. Onda vrijedi

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} f_i, \quad S(e_k) = \sum_{k=1}^{m} \beta_{ik} f_i, \tag{6.39}$$

stoga je

$$(T + S)(e_k) = T(e_k) + S(e_k) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} f_i + \sum_{k=1}^{m} \beta_{ik} f_i = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{ik} + \beta_{ik})\, f_i. \tag{6.40}$$

Ovo implicira da je matrica operatora $T + S$ dana sa

$$[T + S]_{(A,B)} = [\alpha_{ij} + \beta_{ij}] = [\alpha_{ij}] + [\beta_{ij}] = [T]_{(A,B)} + [S]_{(A,B)}. \tag{6.41}$$

(ii) Neka je $\lambda \in \mathbb{F}$. Za operator λT vrijedi

$$(\lambda T)(e_k) = \lambda T(e_k) = \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} f_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda \alpha_{ik}) f_i. \tag{6.42}$$

Ovo povlači da je

$$[\lambda T]_{(A,B)} = [\lambda \alpha_{ij}] = \lambda [\alpha_{ij}] = \lambda [T]_{(A,B)}. \tag{6.43}$$

$\blacksquare$

Sljedeći teorem nam kazuje kako se računa matrica kompozicije dvaju operatora.

Teorem 6.4. *Neka su $T: U \to V$ i $S: V \to W$ linearni operatori na prostorima U, V i W nad poljem $\mathbb{F}$. Neka su A, B i C baze prostora U, V i W redom. Onda je matrica kompozicije operatora $S \circ T: U \to W$ dana sa*

$$[S \circ T]_{(A,C)} = [S]_{(B,C)}[T]_{(A,B)}. \tag{6.44}$$

Dokaz Neka su $A = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $B = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ i $C = \{h_1, h_2, \ldots, h_r\}$ baze prostora U, V i W redom. Pretpostavimo da u ovim bazama operatori T i S imaju matrice

$$[T]_{(A,B)} = [\alpha_{ij}], \quad [S]_{(B,C)} = [\beta_{ij}]. \tag{6.45}$$

Matrica $[T]_{(A,B)}$ je reda (m, n) dok je matrica $[S]_{(B,C)}$ reda (r, m). Onda je

$$T(e_j) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kj} f_k \quad \text{i} \quad S(f_k) = \sum_{i=1}^{r} \beta_{ik} h_i. \tag{6.46}$$

Da bismo izračunali matricu operatora $S \circ T \to U \to W$, vektore $(S \circ T)(e_j)$ moramo napisati kao linearnu kombinaciju vektora $h_1, h_2, \ldots, h_r$. Imamo

$$\begin{aligned}(S \circ T)(e_j) = S(T(e_j)) &= S\big(\sum_{k=1}^{m} \alpha_{kj} f_k\big) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kj}\, S(f_k)\\ &= \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kj} \Big(\sum_{i=1}^{r} \beta_{ik} h_i\Big) = \sum_{i=1}^{r} \Big(\sum_{k=1}^{m} \beta_{ik} \alpha_{kj}\Big) h_i.\end{aligned} \tag{6.47}$$

Definirajmo matricu $\Gamma = [\gamma_{ij}]$ gdje je

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \beta_{ik}\, \alpha_{kj}, \quad 1 \le i \le r,\ 1 \le j \le n. \tag{6.48}$$

Onda je

$$(S \circ T)(e_j) = \sum_{i=1}^{r} \gamma_{ij}\, h_i \tag{6.49}$$

što povlači da je $\Gamma = [T \circ S]_{(A,C)}$ matrica operatora $S \circ T$ u paru baza (A, C). Sada iz (6.48) slijedi da je

$$[S \circ T]_{(A,C)} = [S]_{(B,C))}\, [T]_{(A,B)}. \tag{6.50}$$

■

6.3 Promjena baze i matrice operatora

Prethodno izlaganje pokazuje da matrica operatora $T: V \to V$ ovisi o izboru baze prostora V. Prirodno se postavlja pitanje kako se mijenja matrica operatora T ako u prostoru V promijenimo bazu. Odgovor na ovo pitanje daje sljedeći teorem.

Teorem 6.5. *Neka je $T: V \to V$ linearni operator na prostoru V i neka je P matrica prijelaza iz baze B u bazu B' prostora V. Onda vrijedi*

$$[T]_{B'} = P^{-1}\,[T]_B\,P. \tag{6.51}$$

Dokaz Neka je $v \in V$. Prema teoremu 6.2, u bazama B i B' vrijedi

$$[T(v)]_B = [T]_B[v]_B, \quad [T(v)]_{B'} = [T]_{B'}[v]_{B'}. \tag{6.52}$$

Ako je P matrica prijelaza iz baze B u B', onda za vektore v i $T(v)$ imamo

$$P\,[v]_{B'} = [v]_B, \quad P\,[T(v)]_{B'} = [T(v)]_B. \tag{6.53}$$

Sada iz (6.52) i (6.53) dobivamo

$$[T(v)]_B = P\,[T(v)]_{B'} = P\,[T]_{B'}[v]_{B'} = P\,[T]_{B'}P^{-1}[v]_B. \tag{6.54}$$

S druge strane je $[T(v)]_B = [T]_B[v]_B$ pa iz jednakosti (6.53) slijedi

$$[T]_B[v]_B = P\,[T]_{B'}P^{-1}[v]_B. \tag{6.55}$$

Obzirom da gornja jednakost vrijedi za sve vektore $v \in V$, zaključujemo da je $[T]_B = P\,[T]_{B'}P^{-1}$, odnosno

$$[T]_{B'} = P^{-1}\,[T]_B\,P. \tag{6.56}$$

■

Definicija 6.3. *Ako za kvadratne matrice $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ postoji regularna matrica $P \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je*

$$B = P^{-1}AP, \tag{6.57}$$

onda kažemo da su A i B slične matrice i da je B dobivena iz A transformacijom sličnosti ili konjugacijom.

Dakle, svake dvije matrice operatora $T\colon V \to V$ su slične. Slične matrice imaju mnoga zajednička svojstva koja su od velike važnosti u problemu dijagonalizacije operatora koji ćemo proučavati i sljedećem poglavlju. Primijetimo da slične matrice imaju jednake determinante i trag jer za svaku matricu $A \in M(n, \mathbb{F})$ vrijedi

$$\det(A) = \det(P^{-1}AP) \quad \text{i} \quad \mathrm{Tr}(A) = Tr(P^{-1}AP) \tag{6.58}$$

za svaku regularnu matricu $P \in M(n, \mathbb{F})$. Stoga determinantu i trag možemo definirati za svaki operator $T\colon V \to V$ sa

$$\det(T) = \det([T]_B) \quad \text{i} \quad \mathrm{Tr}(T) = \mathrm{Tr}([T]_B) \tag{6.59}$$

gdje je B bilo koja baza prostora V.

Primjer 6.4. Neka su $B = \{(1,0),(0,1)\}$ i $B' = \{(1,-2),(2,-5)\}$ dvije baze Euklidskog prostora $\mathbb{R}^2$. Neka je $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearni operator definiran sa $T(x,y) = (2x-3y, 4x+y)$. Odredite matricu operatora T u bazi B'.

Neka je P matrica prijelaza iz baze B u B'. Uvedimo oznake $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ i $e_1' = (1,-2)$, $e_2' = (2,-5)$. Onda je

$$e_1' = e_2 - 2e_2, \quad e_2' = 2e_1 - 5e_2, \tag{6.60}$$

stoga je matrica prijelaza dana sa

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}. \tag{6.61}$$

Odredimo matricu operatora T u kanonskoj bazi B. Imamo

$$T(e_1) = (2,4) = 2e_1 + 4e_2, \tag{6.62}$$

$$T(e_2) = (-3,1) = -3e_1 + e_2, \tag{6.63}$$

što povlači

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6.64}$$

Sada je matrica operatora T u bazi B' dana sa

$$[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 & 101 \\ -18 & -41 \end{bmatrix}. \tag{6.65}$$

□

Ako je linearni operator $T\colon V \to V$ bijekcija, onda možemo definirati inverzni operator $T^{-1}\colon V \to V$. Bijektivne operatore nazivamo *regularni operatori*. Inverz regularnog operatora zadovoljava

$$T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = id_V \tag{6.66}$$

gdje je id_V jedinični operator na V definiran sa $id_V(v) = v$ za svaki $v \in V$. Ako je poznata matrica operatora T u nekoj bazi prostora V, zanima nas kako se računa matrica inverznog operatora T^{-1}.

Teorem 6.6. *Neka je $T\colon V \to V$ regularni operator i neka je B baza prostora V. Onda je*

$$[T^{-1}]_B = [T]_B^{-1}. \tag{6.67}$$

Drugim riječima, matrica inverznog operatora T^{-1} jednaka je inverznoj matrici operatora T.

Dokaz Inverz regularnog operatora zadovoljava $T^{-1} \circ T = T \circ T^{-1} = id_V$. Ako je B baza prostora V, onda je prema teoremu 6.4

$$[T^{-1}]_B[T]_B = [T]_B[T^{-1}]_B = [id_V]. \tag{6.68}$$

Matrica jediničnog operatora id_V u bilo kojoj bazi B je jednaka jediničnoj matrici I, stoga iz jednakosti (6.68) slijedi da je

$$[T^{-1}]_B = [T]_B^{-1}. \tag{6.69}$$

■

Poglavlje 7

Vlastite vrijednosti, vlastiti vektori i dijagonalizacija operatora

Neka je $T\colon V \to V$ linearni operator na prostoru V. Iz prethodnih razmatranja znamo da matrica operatora T ovisi o izboru baze prostora V. S obzirom da se algebarske operacije na matricama najlakše izvode s dijagonalnim matricama, zanima nas je li za zadani operator T postoji baza od V takva je matrica operator u toj bazi dijagonalna. Ako takva baza postoji, kažemo da se operator može dijagonalizirati. U ovom poglavlju ćemo proučiti problem dijagonalizacije operatora i odrediti za koje operatore je moguće odabrati takvu bazu. Ovaj problem je povezan s tzv. karakterističnim polinomom operatora te vlastitim vrijednostima i vlastitim vektorima operatora.

7.1 Karakteristični polinom

Neka je $f(t) = \alpha_n t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0$ polinom nad poljem $\mathbb{F}$. Ako je A kvadratna matrica, onda definiramo

$$f(A) = \alpha_n A^n_+ \alpha_{n-1} A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I \tag{7.1}$$

gdje je I jedinična matrica reda n. Na taj način svakom polinomu $f(t)$ pridružujemo preslikavanje $f\colon M(n,\mathbb{F}) \to M(n,\mathbb{F})$ definiramo pomoću (7.1). Posebno, kažemo da je matrica A korijen polinoma $f(t)$ ako je $f(A) = 0$.

Primjer 7.1. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ i neka su $f(t) = 2t^2 - 3t + 7$ i $g(t) = t^2 - 5t - 2$.

Onda je

$$f(A) = 2\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}^2 - 3\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}18 & 14\\ 21 & 39\end{bmatrix}, \tag{7.2}$$

$$g(A) = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}^2 - 5\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}. \tag{7.3}$$

Dakle, matrica A je korijen polinoma $g(t)$. □

Lako se pokazuje da za sve polinome $f(t)$ i $g(t)$ vrijedi

(i) $(f+g)(A) = f(A) + g(A)$,

(ii) $(\lambda f)(A) = \lambda f(A)$,

(iii) $(fg)(A) = f(A)g(A)$

za sve $A \in M(n, \mathbb{F})$ i $\lambda \in \mathbb{F}$.

U dijagonalizaciji operatora posebnu ulogu ima tzv. karakteristični polinom matrice.

Definicija 7.1. *Karakteristični polinom kvadratne matrice A je polinom*

$$\Delta_A(t) = det(tI - A). \tag{7.4}$$

Ako je $A = [a_{ij}]$, onda je

$$\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & t - a_{nn} \end{vmatrix} = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0 \tag{7.5}$$

za neke skalare $\alpha_i \in \mathbb{F}$ koji ovise o elementima matrice A. Primijetimo da je

$$\alpha_0 = \Delta(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A). \tag{7.6}$$

Ako se iz konteksta podrazumijeva kvadratna matrica A, onda karakteristični polinom matrice A označavamo sa $\Delta(t)$.

Neki posebni slučajevi karakterističnih polinoma

Promotrimo neke primjere karakterističnih polinoma koji se lako mogu odrediti. Karakteristični polinom kvadratne matrice drugog reda

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

se jednostavno može napisati u obliku

$$\begin{aligned} \Delta(t) = \begin{vmatrix} t - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & t - a_{22} \end{vmatrix} &= t^2 - (a_{11} + a_{22})t + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= t^2 - \mathrm{tr}(A)t + \det(A) \end{aligned} \tag{7.8}$$

Ako je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{7.9}$$

kvadratna matrica trećeg reda, onda je karakteristični polinom dan sa

$$\Delta(t) = t^3 - \mathrm{tr}(A)t^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})t - \det(A) \tag{7.10}$$

gdje su A_{11}, A_{22} i A_{33} kofaktori dijagonalnih elemenata a_{11}, a_{22} i a_{33}.

Karakteristični polinom dijagonalne matrice $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ je posebno jednostavan jer je matrica $tI - D$ dijagonalna pa je njezina determinanta jednaka umnošku elemenana na dijagonali,

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} t - \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & t - \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & t - \lambda_n \end{vmatrix} = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)\ldots(t - \lambda_n). \tag{7.11}$$

Jedan od važnih rezultata u linearnoj algebri je Hamilton–Cayleyev theorem prema kojemu je kvadratna matrica A korijen svog karakterističnog polinoma $\Delta_A(t)$.

Teorem 7.1 (Hamilton–Cayley). *Ako je $\Delta(t)$ karakteristični polinom kvadratne matrice A, onda je $\Delta(A) = 0$.*

Dokaz Prisjetimo se da adjunkta $\tilde{M}$ kvadratne matrice M zadovoljava jednakost

$$M\tilde{M} = \tilde{M}M = \det(M)I. \tag{7.12}$$

Dokaz ovog teorema se dobije ako gornju jednakost primijenimo na matricu $M = tI - A$. Neka je $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ i neka je $B(t)$ adjunkta matrice

$$tI - A = \begin{bmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & t - a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{7.13}$$

Primijetimo da adjunkta $B(t)$ ovisi o varijabli t jer matrica $tI - A$ ovisi o t. Prema relaciji (7.12), matrice $tI - A$ i $B(t)$ i zadovoljavaju

$$(tI - A)B(t) = \det(tI - A)I. \tag{7.14}$$

Element $B_{ij}(t)$ se dobije kao determinanta matrice $tI - A$ iz koje je izbrisan i–ti redak i j–ti stupac. Stoga je $B_{ij}(t)$ polinom stupnja $n - 1$ pa matricu $B(t)$ možemo zapisati u obliku

$$B(t) = B_{n-1}t^{n-1} + B_{n-2}t^{n-2} + \cdots + B_1 t + B_0 \tag{7.15}$$

gdje su $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$ matrica reda $n - 1$ koje ne ovise o varijabli t. Stoga je

$$\begin{aligned} (tI - A)B(t) &= (tI - A)(B_{n-1}t^{n-1} + B_{n-2}t^{n-2} + \cdots + B_1 t + B_0) \\ &= B_{n-1}t^{n-1} + B_{n-2}t^{n-2} + \cdots + B_1 t + B_0 \\ &- t^{n-1}AB_{n-1} - t^{n-2}AB_{n-2} - \cdots - tAB_1 - AB_0 \\ &= t^n B_{n-1} + t^{n-1}(B_{n-2} - AB_{n-1}) + \cdots + t(B_0 - AB_1) - AB_0. \end{aligned} \tag{7.16}$$

S druge strane, karakteristični polinom $\Delta(t)$ ima oblik

$$\Delta(t) = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0 \tag{7.17}$$

za neke skalare $\alpha_i \in \mathbb{F}$. Supstitucijom izraza (7.16) i (7.17) u jednakost (7.14) dobivamo

$$t^n B_{n-1} + t^{n-1}(B_{n-2} - AB_{n-1}) + \cdots + t(B_0 - AB_1) - AB_0 = \\ t^n I + t^{n-1}\alpha_{n-1} I + \cdots + t\alpha_1 I + \alpha_0 I. \quad (7.18)$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije od t zaključujemo da je

$$B_{n-1} = I \quad (7.19)$$
$$B_{n-2} - AB_{n-1} = \alpha_{n-1} I \quad (7.20)$$
$$\vdots$$
$$B_0 - AB_1 = \alpha_1 I \quad (7.21)$$
$$-AB_0 = \alpha_0 I. \quad (7.22)$$

Množenjem jednakosti (7.19)–(7.21) matricama $A^n, A^{n-1}, \ldots, A$, redom, dobivamo

$$A^n B_{n-1} = A^n \quad (7.23)$$
$$A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1} = \alpha_{n-1} A^{n-1} \quad (7.24)$$
$$\vdots$$
$$AB_0 - A^2 B_1 = \alpha_1 A \quad (7.25)$$
$$-AB_0 = \alpha_0 I. \quad (7.26)$$

Sada zbrajanjem lijeve i desne strane ovih jednakosti dobivamo

$$0 = A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = \Delta(A). \quad (7.27)$$

■

Primjer 7.2. Neka je $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Karakteristični polinom matrice B je jednak

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -3 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2) - 6 = t^2 - 3t - 4. \quad (7.28)$$

Sada se lako provjeri da je

$$\Delta(B) = B^2 - 3B - 4I = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -9 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.29)$$

□

Karakteristični polinom je invarijantan u odnosu na konjugaciju matrice. Drugim riječima,

Teorem 7.2. *Slične matrice imaju isti karakteristični polinom.*

Dokaz Neka su A i B slične matrice. Onda postoji regularna matrica P takva da je $B = P^{-1}AP$. Prema Binet–Cauchyevom teoremu je

$$\begin{aligned} \det(tI - B) &= \det(tP^{-1}P - P^{-1}AP) = \det\big(P^{-1}(tI - A)P\big) \\ &= \det(P^{-1}) \det(tI - A) \det(P) = \det(tI - A). \end{aligned} \tag{7.30}$$

Dakle, $\det(tI - B) = \det(tI - A)$ pa matrice A i B imaju iste karakteristične polinome. ■

Ovo svojstvo karakterističnih polinoma nam omogućava da definiramo karakteristični polinom linearnog operatora $T\colon V \to V$.

Definicija 7.2. *Karakteristični polinom linearnog operatora $T\colon V \to V$ je polinom $k_T(t) = det(tI - A)$ gdje je A matrica operatora T u bilo kojoj bazi prostora V.*

Polinom $k_T(t)$ je dobro definiran jer ne ovisi o izboru baze prostora V. Ako su B i B' dvije baze prostora V, onda je $[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P$ gdje je P matrica prijelaza iz baze B u bazu B'. Prema teoremu 7.2 vrijedi

$$\det(tI - [T]_{B'}) = \det(tI - P^{-1}[T]_B P) = \det(tI - [T]_B) \tag{7.31}$$

što pokazuje da je polinom $k_T(t)$ isti u svakoj bazi prostora V.

Primjer 7.3. Promotrimo operator skaliranja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ koji svaki vektor $v = (x, y)$ skalira za faktor α u smjeru x–osi i za faktor β u smjeru y–osi. Njegovo djelovanje je dano sa

$$T(x, y) = (\alpha x, \beta y). \tag{7.32}$$

Odredimo karakteristični polinom operatora T. Neka je $B = \{e_1, e_2\}$ kanonska baza prostora $\mathbb{R}^2$ gdje je $e_1 = (1,0)$ i $e_2 = (0,1)$. Onda je

$$T(e_1) = (\alpha, 0) = \alpha\, e_1, \quad T(e_2) = (0, \beta) = \beta\, e_2 \tag{7.33}$$

pa je matrica operatora dana sa

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}. \tag{7.34}$$

Stoga je karakteristični polinom operatora T jednak

$$k_T(t) = \begin{vmatrix} t-\alpha & 0 \\ 0 & t-\beta \end{vmatrix} = t^2 - (\alpha+\beta)t + \alpha\beta. \tag{7.35}$$

□

7.2 Vlastite vrijednosti i vlastiti vektori operatora

Sada ćemo pobliže promotriti problem dijagonalizacije operatora, odnosno pronalaženja baze, ako postoji, u kojoj operator ima prikaz pomoću dijagonalne matrice. U tom problemu važnu ulogu imaju vlastite vrijednosti i vlastiti vektori operatora.

Definicija 7.3. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $T\colon V \to V$ linearni operator. Ako postoji $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$, takav da je*

$$T(v) = \lambda v \quad \textit{za neki} \quad \lambda \in \mathbb{F}, \tag{7.36}$$

onda kažemo da je λ vlastita vrijednost operatora T, a v vlastiti vektor operatora T.

Primijetimo da nul–vektor $\mathbf{0}$ trivijalno zadovoljava jednakost $T(\mathbf{0}) = \lambda\mathbf{0}$ za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$; stoga je po definiciji vlastiti vektor $v \neq \mathbf{0}$. Vlastiti vektor operatora T ima svojstvo da T na njega djeluje skaliranjem za faktor λ.

Primjer 7.4. Neka je $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operator definiran sa $TX = AX$ gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7.37}$$

Vektor $X = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ je vlastiti vektor operatora T jer je

$$TX = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = X. \tag{7.38}$$

Vlastita vrijednost pridružena vektoru X je $\lambda = 1$. Operator T predstavlja rotaciju oko z–osi za kut α u pozitivnom smjeru pa je vektor X, koji leži na z–osi, očigledno invarijantan na djelovanje operatora T. □

Definicija 7.4. *Svojstveni potprostor pridružen vlastitoj vrijednosti λ je skup*

$$E_\lambda(T) = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}. \tag{7.39}$$

Skup $E_\lambda(T)$ sadrži vlastite vektore operatora T pridružene vlastitoj vrijednosti λ uključujući nul–vektor $\mathbf{0} \in V$.

Propozicija 7.1. *$E_\lambda(T)$ je potprostor vektorskog prostora V.*

Dokaz Neka su $u, v \in V$. Onda je $T(u) = \lambda u$ i $T(v) = \lambda v$ pa vrijedi

$$T(u+v) = T(u) + T(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v) \tag{7.40}$$

što implicira $u + v \in E_\lambda(T)$. Ako je $\alpha \in \mathbb{F}$, onda je

$$T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha(\lambda u) = \lambda(\alpha u) \tag{7.41}$$

pa slijedi da je $\alpha\, u \in E_\lambda(T)$. Dakle, $E_\lambda(T)$ je vektorski potprostor od V. ■

Definicija 7.5. *Dimenzija prostora $E_\lambda(T)$ se naziva geometrijska kratnost vlastite vrijednosti λ.*

Primjer 7.5. Odredite vlastite vektore i vlastite vrijednosti operatora projekcije $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P(x,y) = (x,0)$, te odredite njhove geometrijske kratnosti.

Geometrijsko značenje ovog operatora je projekcija vektora $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ na os x jer vektor $\vec{v}$ preslikava na vektor $x\vec{i}$. Odredimo skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ takve da je

$$P(x,y) = (x,0) = \lambda(x,y). \tag{7.42}$$

Jednadžba (7.42) daje sustav od dvije jednadžbe

$$\lambda x = x, \quad \lambda y = 0. \tag{7.43}$$

Naš zadatak je odrediti sve moguće vrijednosti λ za koje sustav (7.43) ima netrivijalna rješenja.

1. Ako je $\lambda = 0$, onda je $x = 0$ i $y \in \mathbb{R}$ je proizvoljan. Dakle, $\lambda = 0$ je vlastita vrijednost operatora P s pripadnim vlastitim vektorom $v = (0,y)$, $y \neq 0$.

2. Ako je $\lambda \neq 0$, onda treba razlikovati slučajeve $\lambda = 1$ i $\lambda \neq 1$. Za $\lambda = 1$, jednadžba (7.43) ima netrivijalno rješenje, $x \in \mathbb{R}$ je proizvoljan i $y = 0$. Dakle, $\lambda = 1$ je vlastita vrijednost s pripadnim vlastitim vektorom $v = (x,0)$, $x \neq 0$. Ako je $\lambda \neq 1, 0$, onda sustav (7.43) ima samo trivijalno rješenje $x = y = 0$ pa $\lambda \neq 1, 0$ nije vlastita vrijednost operatora P.

Zaključujemo da projekcija P ima dvije vlastite vrijednosti

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{s vlastitim vektorom} \quad v_1 = (0,y),\ y \neq 0, \tag{7.44}$$

$$\lambda_2 = 1 \quad \text{s vlastitim vektorom} \quad v_2 = (x,0),\ x \neq 0. \tag{7.45}$$

Svojstveni potprostori operatora P su

$$E_{\lambda_1}(P) = \{y\, e_2 \mid y \in \mathbb{R}\}, \quad E_{\lambda_2}(P) = \{x\, e_1 \mid x \in \mathbb{R}\} \tag{7.46}$$

gdje su $e_1 = (1,0)$ i $e_2 = (0,1)$. Geometrijske kratnosti vlastitih vrijednosti su $\dim E_{\lambda_1}(P) = 1$ i $\dim E_{\lambda_2}(P) = 1$. $\square$

Definicija 7.6. *Skup svih vlastitih vrijednosti operatora T, u oznaci $\sigma(T)$, nazivamo spektar operatora T.*

Jedan od osnovnih problema u teoriji operatora je određivanje njegovog spektra. Spektralna teorija ima mnoge važne primjene u fizici kao što je određivanje energetskih nivoa u nekom fizikalnom sistemu ili određivanje vlastitih frekvencija titranja sistema. Spektar operatora T je povezan s korijenima karakterističnog polinoma $k_T(t)$. U određivanju vlastith vrijednosti operatora T koristimo se sljedećim teoremom.

Teorem 7.3. *Neka je V vektorski prostor na poljem $\mathbb{F}$. Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ je vlastita vrijednost operatora $T\colon V \to V$ ako i samo ako je λ korijen karakterističnog polinoma od T.*

Dokaz Skalar λ je vlastita vrijednost operatora T ako i samo ako postoji vektor $v \neq 0$ takav da je $T(v) = \lambda v$, odnosno

$$(T - \lambda id_V)(v) = \mathbf{0}. \tag{7.47}$$

Jednadžbu (7.47) možemo zapisati u matričnom obliku

$$([T]_B - \lambda I)[v]_B = \mathbf{0} \tag{7.48}$$

gdje je B bilo koja baza prostora V. Matrična jednadžbe (7.48) predstavlja homogeni sustav jednadžbi za komponente vektora $v \neq 0$. Ovaj sustav ima netrivijalno rješenje $[v]_B \neq 0$ ako i samo ako je

$$\det([T]_B - \lambda I) = \mathbf{0}. \tag{7.49}$$

Dakle, λ je vlastita vrijednost operatora T ako i samo ako je λ korijen karakterističnog polinoma $k_T(t) = \det([T]_B - tI)$. ■

Primijetimo da ovaj postupak određivanje vlastitih vrijednosti ne ovisi o odabiru baze prostora V. Ako je B' neka druga baza od V, onda je matrica operatora $[T]_{B'}$ dana sa $[T]_{B'} = P[T]_B P^{-1}$ gdje P matrica prijelaza iz baze B u B'. Stoga su matrice $[T]_{B'}$ i $[T]_B$ slične pa imaju isti karakteristični polinom jer je prema Binet–Cauchyevom teoremu

$$\begin{aligned} \det([T]_{B'} - \lambda I) &= \det(P[T]_B P^{-1} - \lambda I) \\ &= \det\big(P([T]_B - \lambda I)P^{-1}\big) = \det([T]_B - \lambda I) \end{aligned} \tag{7.50}$$

Primjer 7.6. Odredite vlastite vrijednosti operatora projekcije $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P(x,y) = (x,0)$.

Neka je $B = \{e_1, e_2\}$ kanonska baza prostora $\mathbb{R}^2$. U toj bazi imamo

$$P(e_1) = P(1,0) = (1,0) = 1e_1 + 0e_2, \tag{7.51}$$

$$P(e_2) = P(0,1) = (0,0) = 0e_1 + 0e_2. \tag{7.52}$$

Neka je A matrica operatora P u bazi B,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.53}$$

Karakteristični polinom je dan sa

$$k_P(t) = \det(tI - A) = \begin{vmatrix} t-1 & 0 \\ 0 & t \end{vmatrix} = (t-1)t. \tag{7.54}$$

Korijeni polinoma $k_P(t)$ su $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 1$. Dakle, projekcija P ima dvije vlastite vrijednosti 0 i 1 u skladu s primjerom 7.5. □

Važno je napomenuti da korijeni karakterističnog polinoma ovise o polju $\mathbb{F}$. Pretpostavimo da je $k(t) = t^3 - 2t^2 + t - 2$ karakteristični polinom operatora $T\colon V \to V$. Ako je V realni prostor, onda $k(t)$ možemo fakorizirati kao

$$k(t) = (t^2 + 1)(t - 2) \tag{7.55}$$

pa T ima jednu realnu vlastitu vrijednost $\lambda = 2$. Ako je V kompleksni prostor, onda $k(t)$ možemo faktorizirati na linearne faktore

$$k(t) = (t - i)(t + i)(t - 2) \tag{7.56}$$

pa T ima dvije kompleksne vlastite vrijednosti $\lambda_{1,2} = \pm i$, $i = \sqrt{-1}$, i jednu realnu vlastitu vrijedost $\lambda_3 = 2$.

Ako je A kvadratna matrica reda n, onda njezin karakteristični polinom ima opći oblik

$$\Delta(t) = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \alpha_{n-2}t^{n-2} + \cdots + \alpha_1 t + \alpha_0. \tag{7.57}$$

Prema Osnovnom teoremu algebre, polinom $\Delta(t)$ se uvijek može faktorizirati na linearne faktore s koeficijentima u polju kompleksnih brojeva,

$$\Delta(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)\ldots(t - \lambda_n), \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, \tag{7.58}$$

gdje se neki od korijena λ_i mogu ponavljati više puta. Ako se λ_k ponavlja m_k puta, onda kažemo da je m_k algebarska kratnost vlastite vrijednosti λ_k. Iz faktorizacije (7.58) dobivamo sljedeći važan rezultat.

Teorem 7.4. *Ako je $T\colon V \to V$ linearni operator na kompleksnom prostoru V dimenzije n, onda T ima barem jednu i najviše n različitih vlastitih vrijednosti.*

Doista, ako su sve vlastite vrijednosti u faktorizaciji (7.58) iste, onda je T ima jednu vlastitu vrijednost algebarske karatnosti n. S druge strane, ako su sve vlastite vrijednosti u (7.58) različite, onda T ima n vlastitih vrijednosti kratnosti jedan.

Primjer operatora koji ima točno jednu vlastitu vrijednost je operator čija matrica ima oblik

$$J_{a,n} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a \end{bmatrix}. \tag{7.59}$$

Matrica ovog tipa se naziva Jordanova blok–matrica reda n i njezin karakterstični polinom je dan sa

$$\Delta(t) = (t - a)^n. \tag{7.60}$$

Stoga matrica $J_{a,n}$ ima jednu vlastitu vrijednost $\lambda = a$ algebarske kratnosti n.

Postupak određivanja vlastitih vrijednosti i vlastitih vektora operatora

U postupku određivanja vlastitih vrijednosti i vlastitih vektora operatora T, vodimo se sljedećim koracima. Neka je A matrica operatora T u odabranoj bazi prostora V.

(1) Odredite korijene karakterističnog polinoma $\Delta(t) = \det(tI - A)$.

(2) Za svaki korijen λ polinoma $\Delta(t)$ odredite fundamentalna rješenja homogenog sustava jednadžbi

$$(A - \lambda I)X = \mathbf{0}. \tag{7.61}$$

Fundamentalna rješenja sustava (7.61) su linearno nezavisni vlastiti vektori koji tvore bazu potprostora $E_\lambda(T)$.

(3) Skup svih vlastitih vektora iz koraka (2) koji su dobiveni za svaki korijen polinoma $\Delta(t)$ daje skup svih vlastitih vektora operatora T.

Primjer 7.7. Neka je $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operator zadan matricom

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}. \tag{7.62}$$

Odredite vlastite vrijednosti i vlastite vektore operatora T.

Karakteristični poliom operatora T je dan sa

$$\det(tI - A) = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -3 & t-2 \end{vmatrix} = t^2 - 3t - 4 = (t-4)(t+1). \tag{7.63}$$

Operator T ima dvije vlastite vrijednosti $\lambda_1 = 4$ i $\lambda_2 = -1$.

Za $\lambda_1 = 4$, vlastiti vektori zadovoljavaju homogeni sustav

$$(A - 4I)X = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.64}$$

što povlači $3x_1 - 2x_2 = 0$. Aka za parametar odaberemo x_1, onda je opće rješenje

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{3}{2}x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{R}. \tag{7.65}$$

Stoga za vlastiti vektor možemo odabrati

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}. \tag{7.66}$$

Vektor v_1 razapinje vlastiti potprostor $E_{\lambda_1}(T)$.
Slično, za $\lambda_2 = -1$ vlastiti vektori zadovoljavaju homogeni sustav

$$(A+I)X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7.67}$$

Odavde slijedi da je $x_1 + x_2 = 0$ pa opće rješenje ima oblik

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{R}. \tag{7.68}$$

Stoga za vlastiti vektor možemo odabrati

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{7.69}$$

Vektor v_1 razapinje vlastiti potprostor $E_{\lambda_2}(T)$. U oba slučaja, vlastiti potprostori $E_{\lambda_1}(T)$ i $E_{\lambda_2}(T)$ su jednodimenzionalni. $\square$

Sljedeći primjer pokazuje da vlastiti potprostori mogu biti višedimenzionalni jer jednadžba $T(v) = \lambda v$ može imati više linearno nezavisnih rješenja.

Primjer 7.8. Odredite vlastite vrijednosti i vlastite vektore operatora $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadanog matricom

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{7.70}$$

Markteristični polinom operatora S je

$$\det(tI - A) = \begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = (t-1)^2(t-2). \tag{7.71}$$

Operator S ima vlastite vrijednosti $\lambda_1 = 1$ algebarske kratnosti dva i $\lambda_2 = 2$ algebarske kratnosti jedan.

Za $\lambda_1 = 1$, vlastiti vektori su rješenja homogenog sustava

$$(A - I)X = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7.72}$$

Ovo implicira $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ pa opće rješenje sustava možemo pisati u obliku

$$X = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R}. \tag{7.73}$$

Pripadni vlastiti vektori su dani sa

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{7.74}$$

Vektori v_1 i v_2 razapinju vlastiti potprostor $E_{\lambda_1}(S)$. Slično, vlastiti vektori za $\lambda_2 = 2$ zadovoljavaju homogeni sustav

$$(A - 2I)X = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7.75}$$

Odavde slijedi da je $x_1 + x_3 = 0$ i $x_1 + x_2 = 0$, stoga je opće rješenje dano sa

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{R} \tag{7.76}$$

Za vlastiti vektor možemo odabrati

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{7.77}$$

Vektor v_3 razapinje vlastiti potprostor $E_{\lambda_2}(S)$. U ovom slučaju vidimo da je $\dim E_{\lambda_1}(S) = 2$ i $\dim E_{\lambda_2}(S) = 1$. $\square$

Primjer 7.9. Odredite vlastite vrijednosti i vlastite vektore operatora $T\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ zadanog matricom

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}. \tag{7.78}$$

Matrica A ima karakteristični polinom

$$\det(tI - A) = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & 0 \\ 0 & t-2 & 2 \\ -2 & -2 & t+1 \end{vmatrix} = -t^3 + t^2 - 3t - 5 = -(t+1)(t^2 - 2t + 5). \tag{7.79}$$

Kvadratni polinom ima kompleksne korijene $1 + 2i$ i $1 - 2i$, stoga T ima vlastite vrijednosti $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1 + 2i$ i $\lambda_3 = 1 - 2i$.
Za $\lambda_1 = -1$, vlastiti vektori su rješenja sustava

$$(A + I) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7.80}$$

Sustav ima dvije linearno nezavisne jednadžbe $2x_1 + 2x_2 = 0$ i $2x_2 - 2x_3 = 0$ pa je opće rješenje sustava dano sa

$$X = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R}. \tag{7.81}$$

Stoga je pripadni vlastiti vektor

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{7.82}$$

Za $\lambda_2 = 1 + 2i$, vlastiti vektori zadovoljavaju sustav

$$\big(A - (1+2i)I\big)X = \begin{bmatrix} -2i & 2 & 0 \\ 0 & -2i & -2 \\ 2 & 2 & -2-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.83}$$

iz kojega dobivamo

$$-2ix_1 + 2x_2 = 0, \quad -2ix_2 - 2x_3 = 0, \quad 2x_1 + 2x_2 - (2+2i)x_3 = 0. \tag{7.84}$$

Prve dvije jednadžbe možemo napisati kao

$$x_2 = ix_1, \quad x_3 = ix_2 = -x_1 \tag{7.85}$$

pa uzimajući x_1 za parameter opće rješenje pišemo u obliku

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ ix_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{C}. \tag{7.86}$$

Kako je operator T definiran na kompleksnom vektorskom prostoru, to su koordinate vektora X općenio kompleksni brojevi. Odavde dobivamo pripadni vlastiti vektor

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{7.87}$$

Slično se pokazuje da vlastita vrijednost $\lambda - 3 = 1 - 2i$ ima kompleksni vlastiti vektor

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{7.88}$$

Dakle, matrica A ima jednu realnu i dvije kompleksno konjugirane vlastite vrijednosti $\lambda_2 = \bar{\lambda}_3$. Primijetimo da su pripadni vlastiti vektori također kompleksno konjugirani jer je $v_2 = \bar{v}_3$. Ovo pravilo vrijedi općenito za realne matrice s kompleksnim vlastitim vrijednostima. $\square$

Propozicija 7.2. *Neka je A realna matrica reda n koja ima kompleksnu vlastitu vrijednost $\lambda \in \mathbb{C}$ i pripadni vlastiti vektor $v \in \mathbb{C}^n$. Onda je $\bar{v}$ vlastiti vektor koji pripada vlastitoj vrijednosti $\bar{\lambda}$.*

Dokaz Konjugiranjem jednakosti $Av = \lambda v$ dobivamo $\bar{A}\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$ jer je $\overline{Av} = \bar{A}\bar{v}$. Matrica A je realna, stoga je $\bar{A} = A$ što povlači $A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$. Zaključujemo da je $\bar{v}$ vlastiti vektor matrice A koji pripada vlastitoj vrijednosti $\bar{\lambda}$. $\blacksquare$

Ovo zapažanje skraćuje postupak određivanja vlastitih vektora realne matrice jer je dovoljno izračunati samo jedan vlastiti vektor za svaki par konjugiranih vlastitih vrijednosti λ i $\bar{\lambda}$.

7.3 Dijagonalizacija operatora

Neka je $T\colon V \to V$ linearni operator na prostoru V. Djelovanje operatora T na vektor $v \in V$ se može prikazati umnoškom matrice operatora T i koordinatne matrice vektora v. Algebarske operacije s dijagonalnim matricama su posebno jednostavne. Stoga se prirodno nameće pitanje je li postoji baza prostora V u kojoj je matrica operatora T dijagonalna. Ako takva baza postoji, onda kažemo da se operator T može dijagonalizirati. Problem dijagonalizacije operatora je usko povezan s vlastitim vrijednostima i vlastiti vektorima operatora. U ovom poglavlju ćemo proučiti pod kojim uvjetima se operator može dijagonalizirati te ćemo pobliže upoznati svojstva takvih operatora. Sljedeći teorem je prvi korak ka rješavanju problema dijagonalizacije.

Teorem 7.5. *Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ međusobno različite vlastite vrijednosti operatora $T\colon V \to V$ s pripadnim vlastitim vektorima $v_1, v_2, \ldots, v_n$, redom. Onda je skup $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ linearno nezavisan.*

Dokaz Dokaz provodimo indukcijom po broju vlastitih vektora n. Ako je $n = 1$, onda je skup $S = \{v_1\}$ linearno nezavisan jer je $v_1 \neq \mathbf{0}$ (po definiciji vlastitog vektora). Pretpostavimo sada da su vektori $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ linearno nezavisni. Želimo pokazati da su vektori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linearno nezavisni. Neka je

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}. \tag{7.89}$$

Djelovanjem operatora T na jednakost (7.89) dobivamo

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \cdots \alpha_n \lambda_n v_n = \mathbf{0}. \tag{7.90}$$

Množenjem jednakosti (7.89) s λ_n imamo

$$\alpha_1 \lambda_n v_1 + \alpha_2 \lambda_n v_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n v_n = \mathbf{0} \tag{7.91}$$

pa oduzimanjem (7.91) od (7.90) dobivamo

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)v_1 + \alpha_n(\lambda_2 - \lambda_n)v_2 + \cdot + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)v_{n-1} = \mathbf{0}. \tag{7.92}$$

Po pretpostavci indukcije, vektori $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ su linearno nezavisni, stoga iz jednakosti (7.92) sijedi

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0 \tag{7.93}$$

jer je $\lambda_i - \lambda_n \neq 0$ za sve $i = 1, 2, \dots, n-1$. Sada iz jednakosti (7.91) dobivamo

$$\alpha_n v_n = \mathbf{0} \tag{7.94}$$

što implicira $\alpha_n = 0$ jer je $v_n \neq \mathbf{0}$. Dakle, $\alpha_i = 0$ za sve $i = 1, 2, \dots, n$ pa slijedi da su vektori $v_1, v_2, \dots, v_n$ linearno nezavisni. ■

Važna posljedica prethodnog rezultata je

Teorem 7.6. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $n = \dim_{\mathbb{F}} V$. Ako linearni operator $T\colon V \to V$ ima n različitih vlastitih vrijednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, onda pripadni vlastiti vektori $v_1, v_2, \dots, v_n$ tvore bazu od V.*

Dokaz Prema prethodnom teoremu vektori $v_1, v_2, \dots, v_n$ su linearno nezavisni jer su vlasite vrijednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ među sobno različite. Vektori $v_1, v_2, \dots, v_n$ razapinju prostor V jer je $n = \dim_{\mathbb{F}} V$, stoga je $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ baza od V. ■

Korolar 7.1. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $n = \dim_{\mathbb{F}} V$. Ako karakteristični polinom operatora $T\colon V \to V$ ima n različtih korijena u polju $\mathbb{F}$, onda pripadni vlastiti vektori tvore bazu od V.*

Dokaz Prema teoremu 7.3, korijeni karakterističnog polinoma od T su vlastite vrijednosti operatora T. Stoga T ima n različitih vlastitih vrijednosti pa prema teremu 7.6 vlastiti vektori od T tvore bazu prostora V. ■

U primjeru 7.7, operator $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ima dvije različite vlastite vrijednosti $\lambda_1 = 4$ i $\lambda_2 = -1$. Pripadni vlastiti vektori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{7.95}$$

čine bazu prostora $\mathbb{R}^2$. Važno je, međutim, naglasiti da vlastiti vektori operatora mogu tvoriti bazu prostora i onda kada je broj različitih vlastitih vrijednosti manji od dimenzije prostora. U primjeru 7.8, operator $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ima dvije vlastite vrijednosti λ_1 i $\lambda_2 = 2$, ali ima tri linearno nezavisna vlastita vektora

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{7.96}$$

koji tvore bazu prostora $\mathbb{R}^3$.

Definicija 7.7. *Ako vlastiti vektori operatora $T\colon V \to V$ tvore bazu od V, onda kažemo da T ima potpuni skup vlastitih vektora i T nazivamo poluprosti operator. U protivnom kažemo da je T defektni operator.*

Drugim riječima, defektni operator je operator koji nema dovoljno mnogo linearno nezavisnih vlastitih vektora koji mogu razapeti prostor V. Sada možemo dokazati glavni rezultat o dijagonalizaciji operatora.

Teorem 7.7. *Linearni operator $T\colon V \to V$ se može prikazati dijagonalnom matricom D ako i samo ako V ima bazu koja se sastoji od vlastitih vektora operatora T. U tom slučaju, elementi na dijagonali od D su vlastite vrijednosti operatora T.*

Dokaz Pretpostavimo da V ima bazu $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ koju tvore vlastiti vektori operatora T,

$$T(v_i) = \lambda_i v_i, \quad i = 1, 2 \dots, n, \tag{7.97}$$

(gdje se neke vlastite vrijednosti λ_i mogu ponavljati više puta). U bazi B, vektore $T(v_i)$ možemo zapisati kao

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n, \tag{7.98}$$

$$T(v_2) = \lambda_2 v_2 = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + 0v_n, \tag{7.99}$$

$$\vdots$$

$$T(v_n) = \lambda_n v_n = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + \lambda_n v_n. \tag{7.100}$$

Stoga je matrica operatora T u bazi B dijagonalna matrica

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{7.101}$$

Pretpostavimo sada da je $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ baza prostora V u kojoj T ima dijagonalnu matricu (7.101). Kooridante matrice vektora v_i u bazi B su dane sa

$$[v_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [v_2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots \quad [v_n]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{7.102}$$

Stoga za vektora $T(v_i)$ u bazi B vrijedi

$$[T(v_i)]_B = [T]_B[v_i]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_i [v_i]_B. \tag{7.103}$$

Dakle, $v_1, v_2, \dots, v_n$ su vlastiti vektori operatora T s pripadnim vlastitim vrijedno–stima $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. ■

Iz teorema 7.6 i 7.7 slijedi da se operator $T\colon V \to V$ može dijagonalizirati ako ima n različitih vlastitih vrijednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ gdje je $n = \dim_{\mathbb{F}} V$ jer tada pripadni vlastiti vektori tvore bazu prostora V u kojoj je matrica operatora dijagonalna.

Postupak za dijagonalizaciju matrice operatora

Pretpostavimo da je A matrica operatora $T\colon V \to V$ u nekoj bazi prostora V i neka je $n = \dim_{\mathbb{F}} V$. Naš zadatak je odrediti bazu prostora V koju čine vlastiti vektori operatora T. Ovaj postupak možemo opisati sljedećim koracima.

(1) Odredite vlastite vrijednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ iz korijena karakterističnog polinoma $\Delta(t) = \det(tI - A)$ (neke vlastite vrijednosti se mogu ponavljati više puta).

(2) Odredite linearno nezavisne vlastite vektore $v_1, v_2, \ldots, v_m$.

(3) Ako je $m < n$, onda se T ne može dijagonalizirati. Ako je $m = n$, onda odredimo matricu prijelaza P iz početne baze u bazu vlastitih vektora $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

(4) Matrica operatora T u bazi B je dana sa

$$[T]_B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{7.104}$$

Primjer 7.10. Dijagonalizirajte operator $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ čija je matrica u kanonskoj bazi dana sa

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}. \tag{7.105}$$

(1) Karakteristični polinom matrice A je

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} t-4 & -2 \\ -3 & t+1 \end{vmatrix} = t^2 - 3t - 10 = (t-5)(t+2). \tag{7.106}$$

(2) Vlastite vrijednosti operatora T su $\lambda_1 = 5$ i $\lambda_2 = -2$.
(3) Odredimo vlastite vektore za $\lambda_1 = 5$. Tražimo rješenja homogenog sustava

$$(A - 5I)X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.107}$$

što daje

$$-x_1 + 2x_2 = 0, \quad 3x_1 - 6x_2 = 0. \tag{7.108}$$

Primijetimo da se sustav svodi na jednu jednadžbu $-x_1 + 2x_2 = 0$. Ako za parametar odaberemo varijablu x_2, onda je opće rješenje dano sa

$$X = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R}. \tag{7.109}$$

Stoga za pripadni vlastiti vektor možemo uzeti

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{7.110}$$

Odredimo sada vlastite vektore za $\lambda_2 = -2$. Vlastiti vektori su rješenja sustava

$$(A + 2I)X = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.111}$$

što implicira

$$6x_1 + 2x_2 = 0, \quad 3x_1 + x_2 = 0. \tag{7.112}$$

Dakle, sustav ima jednu jednadžbu $3x_1 + x_2 = 0$ čije rješenje možemo parametrizirati varijablom x_1. Opće rješenje je dano sa

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ -3x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{R}. \tag{7.113}$$

Za pripadni vlastiti vektor možemo odabrati

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}. \tag{7.114}$$

Vektori v_1 i v_2 su linearno nezavisni i tvore bazu prostora $\mathbb{R}^2$. Stoga se operator T može dijagonalizirati u bazi $B = \{v_1, v_2\}$. Matrica prijelaza iz početne baze u bazu B je

$$P = [v_1 \; v_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}. \tag{7.115}$$

Determinanta matrice je $\det(P) = -7$ pa je inverzna matrica

$$P^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}. \tag{7.116}$$

Sada se lako provjeri da je matrica operatora u bazi B dana sa

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}. \tag{7.117}$$

□

Primjer 7.11. Dijagonalizirajte operator $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ čija je matrica u kanonskoj bazi dana sa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{7.118}$$

Vlastiti vektori matrice A su određeni u primjeru 7.8,

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{7.119}$$

Matrica prijelaza iz početne baze u bazu $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ je dana sa

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{7.120}$$

Matrica operatora u bazi B ima dijagonalni oblik

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \tag{7.121}$$

□

Primjer 7.12. Pokažite da je operator $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadan u kanonskoj bazi matricom

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{7.122}$$

defektan.

(1) Karakteristični polinom matrice A je

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ 0 & -2 & t-4 \end{vmatrix} = (t-2)^2(t-3). \tag{7.123}$$

(2) Vlastite vrijednosti operatora su $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 3$.

(3) Odredimo vlastite vektore za $\lambda_1 = 2$. Vlastiti vektori su rješenja homogenog sustava

$$(A - 2I)X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7.124}$$

Odavde dobivamo

$$x_2 = 0, \quad -x_2 - x_3 = 0, \quad 2x_2 + 2x_3 = 0 \tag{7.125}$$

što implicira $x_2 = x_3 = 0$. Dakle, opće rješenje sustava je dano sa

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{R}. \tag{7.126}$$

Neka je

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.127}$$

pripadni vlastiti vektor.
Vlastiti vektori za $\lambda_2 = 3$ su rješenja homogenog sustava

$$(A - 3I)X = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7.128}$$

Odavde dobivamo

$$-x_1 + x_2 = 0, \quad -2x_2 - x_3 = 0, \quad 2x_2 + x_3 = 0, \tag{7.129}$$

odnosno $x_1 - x_2 = 0$ i $2x_2 + x_3 = 0$. Ako za parametar odaberemo varijablu x_2, onda je opće rješenje dano sa

$$X = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ -2x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R}. \tag{7.130}$$

Odaberimo pripadni vlastiti vektor

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}. \tag{7.131}$$

Dakle, operator T ima samo dva linearno nezavisna vlastita vektora v_1 i v_2 koja ne razapinju prostor $\mathbb{R}^3$. Stoga je T defektan operator koji se ne može dijagonalizirati.
□

Primjer 7.13. Neka je V realni vektorski prostor s bazom $\{\sin\theta, \cos\theta\}$,

$$V = \{a\sin\theta + b\cos\theta \mid a, b \in \mathbb{R}\}. \tag{7.132}$$

Pokažite da se operator derivacije $D = \frac{d}{d\theta} : V \to V$ ne može dijagonalizirati.
Djelovanje operatora D na vektore baze je dano sa

$$D(\sin\theta) = \cos\theta = 0 \cdot \sin\theta + 1 \cdot \cos\theta, \tag{7.133}$$

$$D(\cos\theta) = -\sin\theta = -1 \cdot \sin\theta + 0 \cdot \cos\theta. \tag{7.134}$$

Matrica operatora D u bazi B je dana sa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.135}$$

Karakteristični polinom matrice A je

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{vmatrix} = t^2 + 1. \tag{7.136}$$

Polinom $\Delta(t) = t^2 + 1$ nema realnih korijena, stoga D nema (realnih) vlastitih vrijednosti pa se ne može dijagonalizirati. $\square$